Corrigé de la feuille d'exercices n°11

1. Exercices basiques

a. Calculs de déterminants

Exercice 1.

1. Calculer le déterminant suivant :
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$
2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -Id_E$. Que dire de la dimension de E ?

Correction.

1. Notons D le déterminant que l'on cherche à calculer. En enlevant la première ligne à toutes les autres, on trouve que
$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$
On a une matrice triangulaire supérieure, et donc $D = -8$.
2. On a d'une part $\det(f^2) = \det(f) \times \det(f) = \big(\det(f)\big)^2$. D'autre part, on a $\det(-Id_E) = (-1)^n$ où $n = \dim(E)$. Ainsi, $(-1)^n$ doit être le carré d'un réel. Ceci n'est possible que si n est pair.

Exercice 2.

Montrer que $D = \begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} = 1+a+b+c$ sans le développer.

Correction.

On somme tout sur la première ligne. On obtient une ligne composée de $1+a+b+c$ qu'on peut extraire du déterminant, c'est-à-dire qu'on obtient

$$D = (1+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix}.$$

On retire ensuite b fois la première ligne à la seconde, et c fois la première ligne à la troisième. On obtient alors

$$D = (1+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Il reste une matrice triangulaire supérieure, avec des 1 sur la diagonale. Celle-ci est de déterminant 1 et donc $D = 1+a+b+c$.

Exercice 3.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs de α pour lesquelles l'application linéaire associée à M_α est bijective.

Correction.

L'application linéaire associée à M_α est bijective si et seulement si la matrice M_α est inversible, si et seulement si le déterminant de M_α est non-nul. On calcule donc ce déterminant. En ajoutant L_3 à L_1 et $2L_3$ à L_2, on trouve :

$$\det(M_\alpha) = \begin{vmatrix} 0 & 4 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 4 & \alpha \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha - 4.$$

L'application linéaire associée à M_α est donc bijective si et seulement si $\alpha \neq 4$.

Exercice 4.

Calculer en mettant en évidence la factorisation le déterminant suivant :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 1 & \cos b & \cos 2b \\ 1 & \cos c & \cos 2c \end{vmatrix}.$$

Correction.

On commence par faire apparaitre des 0 sur la première colonne, puis on transforme la troisième colonne en utilisant la formule

$$\cos 2b - \cos 2a = 2\cos^2 b - 2\cos^2 a.$$

On trouve successivement :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 0 & \cos b - \cos a & \cos 2b - \cos 2a \\ 0 & \cos c - \cos a & \cos 2c - \cos 2a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 0 & \cos b - \cos a & 2\cos^2 b - 2\cos^2 a \\ 0 & \cos c - \cos a & 2\cos^2 c - 2\cos^2 a \end{vmatrix}.$$

On obtient alors, en utilisant que $\cos b - \cos a$ (resp. $\cos c - \cos a$) est un facteur commun de la deuxième (resp. troisième) ligne :

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 0 & \cos b - \cos a & 2(\cos b - \cos a)(\cos b + \cos a) \\ 0 & \cos c - \cos a & 2(\cos c - \cos a)(\cos c + \cos a) \end{vmatrix} \\ &= (\cos b - \cos a)(\cos c - \cos a) \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 0 & 1 & 2(\cos b + \cos a) \\ 0 & 1 & 2(\cos c + \cos a) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

On fait apparaitre un dernier zéro en soustrayant la deuxième ligne à la troisième, puis on développe le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 0 & 1 & 2(\cos b + \cos a) \\ 0 & 0 & 2(\cos c - \cos b) \end{vmatrix} = 2(\cos b - \cos a)(\cos c - \cos a)(\cos c - \cos b).$$

Remarquer la symétrie (prévisible) entre les variables a, b, c dans cette expression.

Exercice 5.

Soient $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} s_1 & \dots & \dots & s_1 \\ \vdots & s_2 & \dots & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{vmatrix}.$$

Correction.

Notons $D_n(s_1, \dots, s_n)$ ce déterminant. Prouvons par récurrence sur n que, pour tous réels $s_1, \dots, s_n$,

$$D_n(s_1, \dots, s_n) = s_1(s_2 - s_1)(s_3 - s_2)\dots(s_n - s_{n-1}).$$

On vérifie cette relation facilement pour les premières valeurs de n. Si la propriété est vraie au rang $n-1$, prouvons la au rang n en retranchant la première colonne à toutes les autres. On trouve

$$D_n(s_1,\dots,s_n)=\begin{vmatrix} s_1 & 0 & \dots & 0\\ s_1 & s_2-s_1 & \dots & s_2-s_1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ s_1 & s_2-s_1 & \dots & s_n-s_1\end{vmatrix}=s_1\begin{vmatrix} s_2-s_1 & \dots & \dots & s_2-s_1\\ s_2-s_1 & s_3-s_1 & \dots & s_3-s_1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ s_2-s_1 & s_3-s_1 & \dots & s_n-s_1\end{vmatrix}.$$

On en déduit que

$$D_n(s_1,\dots,s_n)=s_1D_{n-1}(s_2-s_1,s_3-s_1,\dots,s_n-s_1).$$

Utilisant l'hypothèse de récurrence, on trouve

$$\begin{aligned} D(s_1,\dots,s_n) &= s_1(s_2-s_1)(s_3-s_1-s_2+s_1)\dots(s_n-s_1-s_{n-1}+s_1)\\ &= s_1(s_2-s_1)(s_3-s_2)\dots(s_n-s_{n-1}).\end{aligned}$$

Exercice 6.

Soient $a_0,\dots,a_{n-1}$ n nombres complexes et soit

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0\\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1}\end{pmatrix}.$$

Calculer $\det(A-xI_n)$.

Correction.

On a, en développant par rapport à la dernière colonne :

$$\begin{aligned}\det(A-xI_n) &= \begin{vmatrix} -x & \dots & \dots & 0 & a_0\\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & -x & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1}-x\end{vmatrix}\\ &= (-x)^{n-1}(a_{n-1}-x)+\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^{n+k-1}a_k\Delta_k\end{aligned}$$

où Δ_k est le déterminant suivant :

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} -x & 0 & \dots & 0 & * & \dots & \dots & * \\ * & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ * & \vdots & \vdots & -x & * & \dots & \dots & * \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * \\ \vdots & & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant Δ_k se calcule par blocs (on a une matrice triangulaire supérieure par blocs). De plus, chacun des blocs diagonaux est lui-même triangulaire (inférieur pour le premier, supérieur pour le second). On en déduit que

$$\Delta_k = (-x)^k 1^{n-1-k}$$

et donc que

$$\begin{aligned} \det(A - xI_n) &= (-x)^{n-1}(a_{n-1} - x) + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{n+k-1}(-1)^k a_k x^k \\ &= (-1)^n \left(x^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right). \end{aligned}$$

Exercice 7.

Soient a, b, c des réels et Δ_n le déterminant de la matrice $n \times n$ suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ c & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \dots & 0 & c & a \end{vmatrix}.$$

1. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $\Delta_{n+2} = a\Delta_{n+1} - bc\Delta_n$.
2. On suppose que $a^2 = 4bc$. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $\Delta_n = \frac{(n+1)a^n}{2^n}$.

Correction.

1. On développe le déterminant par rapport à la première colonne. On trouve :

$$\Delta_{n+2} = a\Delta_{n+1} - c\begin{vmatrix} b & 0 & \dots & & \\ c & a & b & 0 & \dots \\ 0 & c & a & b & \ddots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \end{vmatrix}.$$

   On développe encore le second déterminant par rapport à la première ligne, et on trouve le résultat demandé :

$$\Delta_{n+2} = a\Delta_{n+1} - bc\Delta_n.$$

2. On va procéder par récurrence **double**. Précisément, on va prouver par récurrence sur $n \geq 1$ l'hypothèse H_n suivante :

   H_n : "$\Delta_n = \frac{(n+1)a^n}{2^n}$ et $\Delta_{n+1} = \frac{(n+2)a^{n+1}}{2^{n+1}}$."

b. Eléments propres et polynôme caractéristique

Exercice 8.

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et D l'endomorphisme de E qui à f associe f'. Déterminer les valeurs propres de D et les sous-espaces propres associés.

Correction.

f est un vecteur propre de D associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$ si et et seulement si $f' = \lambda f$. f est donc un multiple de la fonction $x \mapsto \exp(\lambda x)$, et la réciproque est vraie. Autrement dit, tous les réels sont des valeurs propres pour D, et $\exp(\lambda x)$ est une base de l'espace propre associé à λ.

Exercice 9.

Soit $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'espace des suites à coefficients complexes, et ϕ l'endomorphisme de E qui à une suite (u_n) associe la suite (v_n) définie par $v_0 = u_0$ et pour tout $n \geq 1$,

$$v_n = \frac{u_n + u_{n-1}}{2}.$$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de ϕ.

Correction.

Soit (u_n) un vecteur propre associé à la valeur propre λ. Alors on a $u_0 = \lambda u_0$ et pour tout $n \geq 1$, on a

$$\frac{u_n + u_{n-1}}{2} = \lambda u_n \iff (1-2\lambda)u_n = -u_{n-1}.$$

On distingue alors trois cas :

— Si $\lambda = 1$, alors on a $u_0 = u_0$ (qui n'implique plus rien sur u_0), puis pour tout $n \geq 1$, on a $u_n = u_{n-1}$. Réciproquement, toute suite constante est bien vecteur propre de ϕ pour la valeur propre 1. On en déduit que 1 est une valeur propre de ϕ dont l'espace propre associé est constitué par les suites constantes.

— Si $\lambda = 1/2$, alors le système devient $u_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$, $u_{n-1} = 0$ ce qui implique que (u_n) est la suite nulle et donc $1/2$ n'est pas valeur propre de ϕ.

— Dans tous les autres cas, le système devient $u_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = \frac{1}{2\lambda - 1} u_{n-1}.$$

Ainsi, la suite (u_n) est là-encore la suite nulle, et λ n'est pas valeur propre.

En conclusion, la seule valeur propre est 1, et les seuls vecteurs propres sont les suites constantes.

Exercice 10.

Déterminer les éléments propres des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Correction.

Procédons d'abord avec A. Son polynôme caractéristique vaut

$$\chi_A(X) = (X-1)(X-2)(X+4).$$

Il suffit de chercher pour chaque valeur propre un vecteur propre associé. D'abord pour 1, on résoud AX=X, c'est-à-dire le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -x+2y-z & = & 0 \\ 3x-3y & = & 0 \\ -2x+2y & = & 0 \end{array}\right.$$

Ce système est équivalent à $x = y = z$ et un vecteur propre est donc donnée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On fait de même pour 2 et -4, et on trouve respectivement $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. La matrice A est donc semblable à $\mathrm{diag}(1, 2, -4)$, la matrice de passage étant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Poursuivons avec B dont on calcule le polynôme caractéristique :

$$P_B(X) = X^3 - 5X^2 + 8X - 4.$$

1 est racine évidente, on factorise par $X-1$ et finalement on trouve

$$\chi_B(X) = (X-1)(X-2)^2.$$

On cherche le sous-espace propre associé à 1 en résolvant $BX = X$, c'est-à-dire le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -x+3y+2z &=& 0 \\ -2x+4y+2z &=& 0 \\ 2x-3y-z &=& 0 \end{array}\right.$$

Ce système est équivalent à $x = y = -z$. Ainsi, le sous-espace propre associé à 1 est de dimension 1, engendré par le vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. L'étude du sous-espace propre associé à 2 conduit au système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -2x+3y+2z &=& 0 \\ -2x+3y+2z &=& 0 \\ 2x-3y-2z &=& 0 \end{array}\right.$$

Ces trois équations se ramènent à $2x-3y-2z = 0$, qui est l'équation d'un plan de $\mathbb{R}^3$. Le sous-espace propre associé à 2 est donc de dimension 2, et une base est donnée par les vecteurs $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. B est donc semblable à la matrice $\mathrm{diag}(1,2,2)$, la matrice de passage P étant donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de C est $\chi_C(X) = -(1-X)^2(2-X)$. On procède exactement comme précédemment, et on trouve que (u_1,u_2) forme une base de l'espace propre associé à la valeur propre 1, avec $u_1 = (1,1,0)$ et $u_2 = (0,1,1)$ et que (u_3) forme une base de l'espace propre associé à la valeur propre 2, avec $u_3 = (0,0,1)$. Ainsi, C s'écrit $C = PDP^{-1}$ avec D la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11.

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et soit ϕ l'endomorphisme de E défini par $\phi(P) = P - (X+1)P'$. Donner les éléments propres de ϕ.

Correction.

On va écrire la matrice de ϕ dans la base canonique de E. Remarquons que pour tout $k = 0, \dots, n$, on a

$$\phi(X^k) = (-k+1)X^k - kX^{k-1}.$$

Ainsi, la matrice de ϕ dans la base $(1, X, \dots, X^n)$ est triangulaire supérieure, et ses coefficients diagonaux sont $1, 0, \dots, -n+1$. Les valeurs propres d'une matrice triangulaire supérieure étant exactement les valeurs situées sur la diagonale, on en déduit que ϕ est diagonalisable, ses valeurs propres étant les $(n+1) = \dim(E)$ réels distincts $1, 0, -1, \dots, -n+1$.

Exercice 12.

Soit $\phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M \mapsto {}^tM$. Déterminer les valeurs propres de ϕ.

Correction.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \neq 0$ tel que $\phi(M) = \lambda M$. Les termes diagonaux donnent $m_{i,i} = \lambda m_{i,i}$ pour $1 \leq i \leq n$, les termes non-diagonaux donnent $m_{i,j} = \lambda m_{j,i}$, pour $1 \leq j < i \leq n$. On en déduit que $m_{i,j} = \lambda^2 m_{i,j}$ pour tous les couples (i,j). Ceci entraîne que $\lambda = \pm 1$. On distingue plusieurs cas.

— Si $\lambda = -1$, tous les coefficients sur la diagonale sont égaux à 0 et on a $m_{i,j} = -m_{j,i}$. On en déduit que -1 est une valeur propre de ϕ, les vecteurs propres appartenant à $\mathrm{vect}(f_{i,j};\ 1 \leq j < i \leq n)$ avec $f_{i,j} = E_{i,j} - E_{j,i}$. L'espace propre associé est donc de dimension $n(n-1)/2$.

— Si $\lambda = 1$, on n'a plus de contraintes sur les éléments diagonaux, et $m_{i,j} = m_{j,i}$ pour les éléménts non-diagonaux. On en déduit que 1 est valeur propre, les vecteurs propres étant éléments de $\mathrm{vect}(E_{i,i}, g_{i,j};\ 1 \leq j < i \leq n)$, avec $g_{i,j} = E_{i,j} + E_{j,i}$. L'espace propre associé est donc de dimension $n + n(n-1)/2 = n(n+1)/2$.

Exercice 13.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique si ses coefficients sont des réels positifs ou nuls et si la somme des coefficients de chacune de ses lignes est égale à 1.

1. Démontrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A, alors $|\lambda| \leq 1$.
2. Démontrer que 1 est valeur propre et donner un vecteur propre associé.

Correction.

1. Supposons que $\lambda \in \mathbb{C}$ soit une valeur propre de A et soit Z un vecteur propre non-nul associé. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $|z_i| = \max_{j=1,\dots,n} |z_j|$. La i-ème coordonnée de AZ est $\sum_{j=1}^n a_{i,j} z_j$ et ceci doit être égal à λz_i. Prenant les valeurs absolues et utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$|\lambda||z_i| \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j}|z_j| \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j}|z_i| \leq |z_i|$$

où on a utilisé aussi que $a_{i,j} \geq 0$ et que $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$. On a donc obtenu $|\lambda||z_i| \leq |z_i|$. Comme $|z_i| \neq 0$ (sinon Z serait le vecteur nul), ceci entraîne encore que $|\lambda| \leq 1$.

2. Il suffit de choisir $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ pour remarquer que $AZ = Z$. Ainsi, Z est un vecteur propre pour la valeur propre 1.

Exercice 14.

1. Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Démontrer que MN est inversible si et seulement si M et N sont inversibles.
2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Démontrer que

$$\chi_A(B) \in GL_n(\mathbb{C}) \iff \mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \varnothing.$$

Correction.

1. On a

$$\begin{aligned} MN \in GL_n(\mathbb{C}) &\iff \det(MN) \neq 0 \\ &\iff \det(M) \times \det(N) \neq 0 \\ &\iff \det(M) \neq 0 \text{ et } \det(N) \neq 0 \\ &\iff M \in GL_n(\mathbb{C}) \text{ et } N \in GL_n(\mathbb{C}). \end{aligned}$$

2. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A, répétées autant de fois que leur multiplicité, de sorte que $\chi_A(X) = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$. On a donc

$$\chi_A(B) = \prod_{i=1}^n (B - \lambda_i I_n).$$

D'après la première question (et une récurrence immédiate), $\chi_A(B)$ est inversible si et seulement, pour tout $i = 1, \dots, n$, $B - \lambda_i I_n$ est inversible, c'est-à-dire si et seulement si, pour tout $i = 1, \dots, n$, $\lambda_i \notin \mathrm{Sp}(B)$. Ceci revient à dire que $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \varnothing$.

Exercice 15.

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. On note P le polynôme caractéristique de A et Q celui de A^{-1}. Quelle relation a-t-on pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$ entre $Q(\lambda)$ et $P(\lambda^{-1})$?

Correction.

On écrit, pour $\lambda \neq 0$,

$$\begin{aligned} Q(\lambda) &= \det(\lambda I_n - A^{-1}) \\ &= \det(A^{-1}(\lambda A - I_n)) \\ &= \det(A^{-1})\det(\lambda A - I_n) \\ &= \det(A^{-1})\det(-\lambda(\lambda^{-1}I_n - A)) \\ &= \det(A^{-1})(-\lambda)^n \det(\lambda^{-1}I_n - A) \\ &= \frac{(-\lambda)^n}{\det(A)} P(\lambda^{-1}). \end{aligned}$$

Exercice 16.

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On souhaite prouver que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

1. Démontrer le résultat si A ou B est inversible.
2. Dans le cas général, on considère les matrices de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$

$$M = \begin{pmatrix} BA & -B \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} 0 & -B \\ 0 & AB \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix}.$$

   Vérifier que $PN = MP$ et conclure.

Correction.

1. Si par exemple A est inversible, AB et BA sont semblables. En effet, on peut écrire

$$A^{-1}(AB)A = BA.$$

2. Il est clair que

$$PN = MP = \begin{pmatrix} 0 & -B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   De plus, P est une matrice triangulaire inférieure avec des 1 sur sa diagonale, donc P est inversible. Il vient que M et N sont semblables donc ont le même polynôme caractéristique. Mais le calcul de χ_M fait intervenir le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure par blocs. On peut calculer ce déterminant par blocs et on trouve que

$$\chi_M(X) = X^k \chi_{BA}(X).$$

   De même, on a aussi

$$\chi_N(X) = X^k \chi_{AB}(X).$$

   Puisque $\chi_M = \chi_N$, on en déduit que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

c. Diagonalisation

Exercice 17.

Expliquer sans calculs pourquoi la matrice suivante n'est pas diagonalisable :

$$A = \begin{pmatrix} \pi & 1 & 2 \\ 0 & \pi & 3 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}.$$

Correction.

La matrice A étant triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont données par les éléments de la diagonale. La seule valeur propre de A est donc π. Si A était diagonalisable, alors il existerait une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que

$$A = P(\pi I_3)P^{-1}.$$

Mais puisque I_3 commute avec toutes les matrices, on aurait

$$A = \pi I_3 P P^{-1} = \pi I_3.$$

Ce n'est pas le cas : A n'est donc pas diagonalisable.

Exercice 18.

Diagonaliser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On donnera aussi la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres.

Correction.

Procédons d'abord avec A. Son polynôme caractéristique vaut

$$\chi_A(X) = (X-1)(X-2)(X+4).$$

Il est scindé à racines simples, ce qui assure que A est diagonalisable. Il suffit de chercher pour chaque valeur propre un vecteur propre associé. D'abord pour 1, on résoud AX=X, c'est-à-dire le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -x+2y-z & = & 0 \\ 3x-3y & = & 0 \\ -2x+2y & = & 0 \end{array} \right.$$

Ce système est équivalent à $x=y=z$ et un vecteur propre est donc donnée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On fait de même pour 2 et -4, et on trouve respectivement $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. La matrice A est donc semblable à $\mathrm{diag}(1,2,-4)$, la matrice de passage étant

$$P=\begin{pmatrix}1&4&2\\1&3&-3\\1&-2&2\end{pmatrix}.$$

Poursuivons avec B dont on calcule le polynôme caractéristique :

$$P_B(X)=X^3-5X^2+8X-4.$$

1 est racine évidente, on factorise par $X-1$ et finalement on trouve

$$\chi_B(X)=(X-1)(X-2)^2.$$

On cherche le sous-espace propre associé à 1 en résolvant $BX=X$, c'est-à-dire le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl}-x+3y+2z&=&0\\-2x+4y+2z&=&0\\2x-3y-z&=&0\end{array}\right.$$

Ce système est équivalent à $x=y=-z$. Ainsi, le sous-espace propre associé à 1 est de dimension 1, engendré par le vecteur propre $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$. L'étude du sous-espace propre associé à 2 conduit au système :

$$\left\{\begin{array}{rcl}-2x+3y+2z&=&0\\-2x+3y+2z&=&0\\2x-3y-2z&=&0\end{array}\right.$$

Ces trois équations se ramènent à $2x-3y-2z=0$, qui est l'équation d'un plan de $\mathbb{R}^3$. Le sous-espace propre associé à 2 est donc de dimension 2, et une base est donnée par les vecteurs $\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. B est donc semblable à la matrice $\mathrm{diag}(1,2,2)$, la matrice de passage P étant donnée par

$$P=\begin{pmatrix}1&3&1\\1&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de C est $\chi_C(X)=-(1-X)^2(2-X)$. On procède exactement comme précédemment, et on trouve que (u_1,u_2) forme une base de l'espace propre associé à la valeur propre 1, avec $u_1=(1,1,0)$ et $u_2=(0,1,1)$ et que (u_3) forme une base de l'espace propre associé à la valeur propre 2, avec $u_3=(0,0,1)$. Ainsi, C s'écrit $C=PDP^{-1}$ avec D la matrice diagonale

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

et

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}.$$

Exercice 19.

Soit A la matrice suivante :
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
Démontrer que A est diagonalisable et donner une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. En déduire la valeur de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction.

Le calcul du polynôme caractéristique ne pose pas de problèmes, et on trouve, sous forme factorisée, $\chi_A(x) = (2-x)(4-x)^2$. On ne peut pas conclure directement que A est diagonalisable, il faut déterminer une base des sous-espaces propres associés. Pour la valeur propre 2, on résoud l'équation $AX = 2X$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On trouve le système
$$\begin{cases} x &= x \\ y &= -2x \\ z &= x \end{cases}$$
Ainsi, le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Cherchons ensuite le sous-espace propre associé à la valeur propre 4. On doit résoudre $AX = 4X$ et on trouve cette fois le système :
$$\begin{cases} x &= x \\ y &= y \\ z &= -x \end{cases}$$
Une base de l'espace propre associé à la valeur propre 4 est donc donné par (u_2, u_3), avec $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Les dimensions des sous-espaces propres sont égales aux multiplicités des valeurs propres correspondantes, donc A est diagonalisable. Plus précisément on a $A = PDP^{-1}$ avec
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$
Il vient alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$. D^n est tout simplement égale à
$$D = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}.$$
Après un petit calcul, on trouve que
$$P^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit finalement que

$$A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^n+4^n & 0 & 2^n-4^n \\ 2(4^n-2^n) & 2.4^n & 2(4^n-2^n) \\ 2^n-4^n & 0 & 2^n+4^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 20.

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A.
2. Calculer A^n en fonction de n.
3. On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par leur premier terme u_0, v_0 et w_0 et les relations suivantes :
$$\begin{cases} u_{n+1} &= -4u_n - 6v_n \\ v_{n+1} &= 3u_n + 5v_n \\ w_{n+1} &= 3u_n + 6v_n + 5w_n \end{cases}$$
pour $n \geq 0$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Exprimer X_{n+1} en fonction de A et X_n. En déduire u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Correction.

1. On calcule le polynôme caractéristique de A. On trouve
$$P_A(X) = (X+1)(X-2)(X-5).$$
$A \in M_3(\mathbb{R})$ a trois valeurs propres, $-1, 2, 5$: A est donc diagonalisable. On cherche les sous-espaces propres associés. Pour -1, on a, pour $X = (x, y, z)$,
$$AX = -X \iff \begin{cases} -3x - 6y &= 0 \\ 3x + 6y &= 0 \\ 3x + 6y + 6z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= -2y \\ y &= y \\ z &= 0 \end{cases}$$
Le vecteur $(2, -1, 0)$ est donc un vecteur propre de A associé à la valeur propre -1. On fait de même avec 2, et on trouve (par exemple) le vecteur propre $(1, -1, 1)$ et pour 5, et on trouve le vecteur propre $(0, 0, 1)$. Ainsi, en posant
$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$
on a $PDP^{-1} = A$. Le calcul de P^{-1} donne
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On a $A = PDP^{-1}$, ce qui entraîne par récurrence $A = PD^nP^{-1}$. D^n se calcule facilement en mettant les coefficients de la diagonale à la puissance n. En effectuant les deux produits de matrice, on trouve finalement :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2(-1)^n - 2^n & 2(-1)^n - 2^{n+1} & 0 \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^{n+1} & 0 \\ -2^n + 5^n & -2^{n+1} + 2.5^n & 5^n \end{pmatrix}.$$

3. On a $X_{n+1} = AX_n$. Par récurrence, on a $X_n = A^nX_0$. Grâce au calcul de A^n effectué à la question précédente, on trouve

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u_n & = & (2(-1)^n - 2^n)u_0 + (2(-1)^n - 2^{n+1})v_0 \\ v_n & = & ((-1)^{n+1} + 2^n)u_0 + ((-1)^{n+1} + 2^{n+1})v_0 \\ w_n & = & (-2^n + 5^n)u_0 + (-2^{n+1} + 2.5^n)v_0 + 5^nw_0. \end{array} \right.$$

Exercice 21.

Soient f, g deux endomorphismes du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie tels que f est diagonalisable. Démontrer que f et g commutent si et seulement si les sous-espaces propres de f sont stables par g.

Correction.

D'abord si f et g commutent, on sait que $\ker(P(f))$ est stable par g pour tout polynôme P, en particulier pour les polynômes $P(X) = X - \lambda$. Ainsi, chaque sous-espace propre de f est stable par g. Réciproquement, on suppose que g laisse stable tous les sous-espaces propres de f. Soit E_λ un tel sous-espace propre et soit $x \in E_\lambda$. Alors d'une part

$$g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x)$$

et d'autre part, puisque $g(x) \in E_\lambda$ on a aussi

$$f(g(x)) = \lambda g(x).$$

Autrement dit, si $x \in E_\lambda$, on a $f(g(x)) = g(f(x))$. Maintenant, comme f est diagonalisable, E est somme directe des sous-espaces propres de f. Écrivant tout $x \in E$ comme somme de x_i, où $x_i \in E_{\lambda_i}$, on prouve que $f(g(x)) = g(f(x))$ et donc que g et f commutent.

Exercice 22.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u, v deux endomorphismes de E.

1. Démontrer que si $u \circ v = v \circ u$, alors $\mathrm{Im}(u)$ et $\ker(u)$ sont stables par v. La réciproque est-elle vraie ?
2. On suppose désormais que u est un projecteur. Démontrer que $u \circ v = v \circ u$ si et seulement si $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par v.

Correction.

1. Commençons par prouver que $\mathrm{Im} u$ est stable par v. Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$, $y = u(x)$ avec $x \in E$. Alors $v(y) = v(u(x)) = u(v(x)) \in \mathrm{Im}(u)$. Prenons ensuite $z \in \ker(u)$. Alors $u(z) = 0$ et $u(v(z)) = v(u(z)) = 0$ et donc $v(z) \in \ker(u)$. La réciproque est fausse. En effet, si u et v sont tous les deux des automorphismes, il est clair que $\ker(u) = \{0\}$ et $\mathrm{Im}(u) = E$ sont stables car v est bijective. Mais il n'y a aucune raison pour que u et v commutent. Donnons un exemple, en prenant pour u et v les automorphismes de $\mathbb{R}^2$ dont les matrices dans la base canonique sont respectivement
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
On vérifie aisément que $AB \neq BA$.
2. Puisque u est un projecteur, on sait que $E = \ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$. Prenons $x \in E$ et écrivons le $x = y + z$ dans cette décomposition. Alors
$$u(v(x)) = u(v(y)) + u(v(z)).$$
Mais $v(y) \in \ker(u)$ et donc $u(v(y)) = 0$ et $v(z) \in \mathrm{Im}(u)$ et donc $u(v(z)) = v(z)$. D'autre part,
$$v(u(x)) = v(0 + z) = v(z).$$
On a donc bien $u \circ v = v \circ u$.

Exercice 23.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1.

1. On suppose que f est diagonalisable. Démontrer que $f \circ f$ n'est pas l'endomorphisme nul.
2. Réciproquement, on suppose que $f \circ f$ n'est pas l'endomorphisme nul, et on note $u \in E$ tel que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}(u)$.
   (a) Démontrer que u est un vecteur propre associé à une valeur propre non nulle.
   (b) En déduire que f est diagonalisable.

Correction.

1. On sait, puisque le rang de f est 1, et donc que la dimension de son noyau est $n - 1$, que 0 est valeur propre de f d'ordre $n - 1$. Si f est diagonalisable, alors il existe une base de vecteurs propres pour f et donc il existe $x \in E$ vecteur propre associé à une valeur propre non nulle. Mais si $f(x) = \lambda x$, avec $\lambda \neq 0$, alors $f \circ f(x) = \lambda^2 x$ avec $\lambda^2 \neq 0$, et donc $f \circ f$ n'est pas l'endomorphisme nul.
2. (a) On a $f(u) \in \mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}(u)$, et donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(u) = \lambda u$. Si λ était égal à 0, alors, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \lambda_x u$ pour un certain $\lambda_x \in \mathbb{R}$, on aurait $f \circ f(x) = 0$, et donc $f \circ f = 0$, ce qui n'est pas le cas. Donc $\lambda \neq 0$.
   (b) Notons $\lambda \neq 0$ tel que $f(u) = \lambda u$. Alors λ est valeur propre de f, et son espace propre est de dimension au moins égale à 1. De plus, 0 est valeur propre de f, et son espace propre est de dimension égale à $n - 1$. La somme des dimensions des espaces propres étant supérieure ou égale à n (et donc en réalité égale à n), f est diagonalisable.

2. Exercices d'entraînement

a. Calculs de déterminants

Exercice 24.

Soient $n \geq 1$, $p \geq 0$. Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n}{p} \\ \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \dots & \binom{n+1}{p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n+p}{0} & \binom{n+p}{1} & \dots & \binom{n+p}{p} \end{vmatrix}.$$

Correction.

Notons Δ_p ce déterminant (de taille $p+1$), et prouvons que $\Delta_p = \Delta_{p-1}$ pour tout $p \geq 1$. En effet, on effectue successivement les opérations suivantes :

$$L_p - L_{p-1} \to L_p,\ L_{p-1} - L_{p-2} \to L_{p-1}, \dots, L_2 - L_1 \to L_2.$$

Clairement, on fait apparaître des zéros dans la première colonne, excepté sur la première ligne. Pour les autres colonnes, le coefficient du déterminant à la i-ème ligne et à la j-ème colonne vaut initialement $\binom{n+i-1}{j-1}$. Après les opérations, il vaut

$$\binom{n+i-1}{j-1} - \binom{n+i-2}{j-1} = \binom{n+i-2}{j-2}$$

où la dernière égalité vient de la formule du triangle de Pascal. Autrement dit, on a prouvé que

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & * & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n}{p-1} \\ 0 & \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \dots & \binom{n+1}{p-1} \\ 0 & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \binom{n+p-1}{0} & \binom{n+p-1}{1} & \dots & \binom{n+p-1}{p-1} \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la première colonne, on trouve bien comme annoncé que $\Delta_p = \Delta_{p-1}$. Puisque $\Delta_0 = 1$, le déterminant recherché est égal à 1.

Exercice 25.

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$. Calculer $\det(u)$ dans chacun des cas suivants :

1. $u(P) = P + P'$;
2. $u(P) = P(X+1) - P(X)$;
3. $u(P) = XP' + P(1)$.

Correction.

1. Cherchons la matrice de u dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$. On a $u(1) = 1$ et pour $j \geq 1$, $u(X^j) = X^j + jX^{j-1}$. Autrement dit, la matrice de u dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \dots \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & n \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice est triangulaire supérieure et on en déduit aisément que $\det(u) = 1$.

2. On peut appliquer la même méthode ou remarquer plus simplement que u n'est pas injective, car les polynômes constants sont dans $\ker(u)$. Ainsi, u n'étant pas inversible, $\det(u) = 0$.
3. On calcule toujours la matrice de u dans la base $(1, X, \dots, X^n)$. Puisque $u(1) = 1$ et $u(X^j) = jX^j + 1$, la matrice est triangulaire supérieure, de coefficients diagonaux $1, 1, 2, \dots, n$. Ainsi, $\det(u) = n!$.

Exercice 26.

Soient $a_1, \dots, a_n$ des nombres complexes, $\omega = e^{2i\pi/n}$, et A et M les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & \dots & a_1 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \dots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Calculer $\det(AM)$ et en déduire $\det(A)$.

Correction.

Effectuons le calcul demandé. La i-ème ligne de A est

$$(a_{n-i+2} \ \dots \ a_n \ a_1 \ \dots \ a_{n-i+1}).$$

Si on multiplie cette ligne par la j-ième colonne de M, on obtient le coefficient

$$a_{n-i+2} + a_{n-i+3}w^{j-1} + \dots + a_1 w^{(j-1)(i-1)} + a_2 w^{(j-1)i} + \dots + a_{n-i+1} w^{(j-1)(n-1)}.$$

Si on factorise ce coefficient par $w^{(j-1)(i-1)}$, on trouve qu'il est égal à

$$w^{(j-1)(i-1)} \times \left(a_1 + a_2\omega^{j-1} + \dots + a_n\omega^{(j-1)(n-1)}\right).$$

En notant

$$P(x) = a_1 + a_2 x + \dots + a_n x^{n-1},$$

on a donc obtenu que la j-ème colonne de AM est égale à la j-ème colonne de M multipliée par $P(\omega^{j-1})$. Ceci entraîne que

$$\det(AM) = P(1)P(\omega)\dots P(\omega^{n-1})\det(M).$$

Comme d'autre part

$$\det(AM) = \det(A)\det(M)$$

et que le déterminant de M est non nul (c'est un déterminant de Vandermonde), on a :

$$\det(A) = P(1)P(\omega)\dots P(\omega^{n-1}).$$

Exercice 27.

Soit ϕ l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ défini par $\phi(A) = {}^tA$. Calculer le déterminant de ϕ.

Correction.

$M_n(\mathbb{R})$ est la somme directe du sous-espace vectoriel des matrices symétriques et des matrices antisymétriques. Soit $(A_1,\dots,A_p)$ et $(B_1,\dots,B_q)$ une base respective de l'espace vectoriel des matrices symétriques et antisymétriques. $(A_1,\dots,A_p,B_1,\dots,B_q)$ forme une base de $M_n(\mathbb{R})$, et il suffit de calculer le déterminant dans cette base. Mais $\phi(A_i) = A_i$ tandis que $\phi(B_j) = -B_j$. On a donc $\det(\phi) = (-1)^q$. Il suffit ensuite de se souvenir que $p = \frac{n(n+1)}{2}$, ou $q = \frac{n(n-1)}{2}$.

Exercice 28.

Soit $n \geq 2$. Déterminer toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que, pour tout $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.

Correction.

Soit A une telle matrice. Commençons par vérifier que A n'est pas inversible. En effet, en appliquant la formule avec $B = A$, on a $\det(2A) = 2\det(A)$ alors que $\det(2A) = 2^n\det(A)$. Puisque $n \geq 2$, ces deux égalités sont possibles seulement si $\det(A) = 0$, autrement dit si A n'est pas inversible. Supposons maintenant que A n'est pas la matrice nulle. Notons $(C_1,\dots,C_n)$ les colonnes de A. Alors, une de ces colonnes, disons C_i, est non nulle. On peut alors la compléter en $(E_1,\dots,E_{i-1},C_i,E_{i+1},\dots,E_n)$ une base de $\mathbb{K}^n$. Notons B la matrice dont les colonnes sont $(E_1-C_1,\dots,E_{i-1}-C_{i-1},0,E_{i+1}-C_{i+1},\dots,E_n-C_n)$. Alors la matrice B n'est pas inversible car elle contient une colonne nulle et donc $\det(A)+\det(B) = 0$. Mais les colonnes de $A+B$ sont $(E_1,\dots,E_{i-1},C_i,E_{i+1},\dots,E_n)$ qui forment une base de $\mathbb{K}^n$. Ainsi, $A+B$ est inversible et $\det(A+B) \neq 0$, une contradiction avec $\det(A+B) = \det(A)+\det(B)$. Ainsi, la seule matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui vérifie $\det(A+B) = \det(A)+\det(B)$ pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice nulle.