Corrigé de la feuille d'exercices n°22

Partie A

Probabilités : fonctions génératrices

Exercice 1.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que les réels a et k sont tels que la suite (p_n) définie, pour $n \geq 0$, par $p_n = \left(\frac{a}{a+1}\right)^n k$ soit la loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Donner alors la fonction génératrice d'une telle variable aléatoire.

Correction.

Il faut et il suffit que $p_n \geq 0$ pour tout entier n et que $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$. Implicitement, on remarque qu'il faut avoir $a \neq -1$, sinon la suite (p_n) n'est pas définie. On remarque d'abord que l'on ne peut pas avoir $k = 0$, sinon $p_n = 0$ pour tout $n \geq 0$ et la deuxième condition ne peut pas être satisfaite. Le cas $a = 0$ entraîne $k = 1$ (dans ce cas, seul p_0 est non nul, avec la convention $0^0 = 1$). Si $a \neq 0$, la première condition appliquée pour $n = 2$ impose $k > 0$. De plus, pour que la série $\sum_n p_n$ converge, on doit avoir

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a}{a+1}\right| < 1 &\iff \left|\frac{1}{a+1} - 1\right| < 1 \\
&\iff -1 < \frac{1}{a+1} - 1 < 1 \\
&\iff 0 < \frac{1}{a+1} < 2 \\
&\iff a+1 > \frac{1}{2} \\
&\iff a > -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Mais alors, comme la série converge, on sait que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = \frac{k}{1 - \frac{a}{a+1}} = k(a+1)$$

et donc on a $k = \frac{1}{a+1}$. Finalement, puisque $k > 0$ et $p_1 > 0$, on doit donc avoir $\frac{a}{a+1} > 0$ ce qui implique $a > 0$ puisqu'on sait déjà que $a + 1 > 0$.
Réciproquement, si $a = 0$ et $k = 1$, ou $a > 0$ et $k = \frac{1}{a+1}$, on vérifie facilement que les deux propriétés précédents sont vérifiées et donc que (p_n) est une distribution de probabilité. La fonction génératrice est alors donnée par

$$G(t) = \sum_{n \geq 0} p_n t^n = \frac{k}{1 - \frac{at}{a+1}} = \frac{1}{a+1-at}.$$

Exercice 2.

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètre respectif λ et μ. Démontrer, à l'aide des fonctions génératrices, que $Z = X + Y$, suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Correction.

Notons $\sum_{n\geq 0} a_n t^n$, $\sum_{n\geq 0} b_n t^n$ et $\sum_{n\geq 0} c_n t^n$ les fonctions génératrices respectives de X, Y et Z. On a donc

$$a_n = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \text{ et } b_n = \frac{e^{-\mu}\mu^n}{n!}.$$

La série génératrice de Z est obtenue en effectuant le produit de Cauchy de ces deux séries. On a donc

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k \mu^{n-k}}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda^k \mu^{n-k} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^n}{n!}. \end{aligned}$$

On reconnait bien la fonction génératrice d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$. Comme la fonction génératrice caractérise la loi d'une variable aléatoire, Z suit bien une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Exercice 3.

1. Démontrer que toutes les racines (complexes) non-nulles du polynôme $P(X) = X^2 + X^3 + \dots + X^{12}$ sont simples.
2. Peut-on truquer un dé de sorte que, en le lançant deux fois de suite, la somme des numéros obtenus suive la loi uniforme sur $\{2, \dots, 12\}$?

Correction.

1. Factorisons P par X^2. On trouve
$$P(X) = X^2 \times (1 + X + \dots + X^{10}).$$
Les racines de $1 + X + \dots + X^{10}$ sont les racines 11-ièmes de l'unité, excepté 1. Elles sont donc toutes simples.
2. Notons p_i la probabilité que le lancer de dé donne le numéro i, $i = 1, \dots 6$. Notons X_1 le résultat du premier lancer, et X_2 le résultat du second lancer. Les fonctions génératrices de

X_1 et X_2 sont égales et valent
$$f(x) = \sum_{i=1}^{6} p_i x^i.$$
Puisque X_1 et X_2 sont indépendantes, la fonction génératrice de leur somme est
$$G_S(x) = \big(f(x)\big)^2.$$
Ainsi, G_S est un polynôme dont toutes les racines (sur $\mathbb{C}$) sont de multiplicité paire (donc au moins égale à 2). Or, si S suivait la loi uniforme sur $\{2, \dots, 12\}$, sa fonction génératrice serait
$$G_U(x) = \frac{1}{11}(x^2 + \cdots + x^{12}).$$
Les racines de G_U, autres que 0, sont de multiplicité au plus égales à 1. On a donc une contradiction.

Exercice 4.

Soit X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle fonction génératrice de X la série entière
$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) t^n.$$

1. Démontrer que le rayon de convergence de G_X est supérieur ou égal à 1.
2. Démontrer que G_X définit une fonction continue sur $[-1, 1]$ et C^∞ sur $]-1, 1[$.
3. Démontrer que si $G_X = G_Y$ sur $]-1, 1[$, alors X et Y ont même loi.
4. Calculer G_X lorsque X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, puis lorsque X suit une loi binomiale de paramètres (n, p).
5. On suppose que X et Y sont indépendantes. Démontrer que, pour tout $t \in]-1, 1[$, on a
$$G_{X+Y}(t) = G_X(t) G_Y(t).$$
6. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres (n, p), et Y une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres (m, p). On suppose que X et Y sont indépendantes. Quelle est la loi de $X + Y$? Retrouver ce résultat autrement que par les fonctions génératrices.

Correction.

1. Il suffit de démontrer que la série $G_X(t)$ converge pour tout $t \in]-1, 1[$. Mais, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|P(X = n)t^n| \leq |t|^n$$
et la série $\sum_{n \geq 0} |t|^n$ converge. Par majoration, la série $\sum_{n \geq 0} P(X = n)t^n$ converge absolument, donc converge.
2. G_X définit une fonction C^∞ sur $]-1, 1[$ car c'est la somme d'une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1. Pour démontrer que G_X définit une fonction continue sur $[-1, 1]$, il suffit de démontrer que la série $\sum_{n \geq 0} P(X = n)t^n$ converge normalement sur

$[-1,1]$, puisque $t \mapsto P(X=n)t^n$ est continue sur $[-1,1]$. Mais, pour tout $t \in [-1,1]$ et tout $n \geq 0$,

$$|P(X=n)t^n| \leq P(X=n)$$

et le terme de droite de cette inégalité est le terme général d'une série numérique convergente (dont la somme vaut 1). On a donc bien prouvé la convergence normale. Remarquons que cette inégalité aurait aussi pu être utilisée à la première question.

3. Rappelons que si les sommes de deux séries entières sont égales sur un intervalle ouvert contenant 0, alors tous les coefficients sont égaux. Ainsi, si $G_X = G_Y$ sur l'intervalle $]-1,1[$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X=n) = P(Y=n)$. Puisque X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, ceci signifie que X et Y ont la même loi.
4. Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, alors $G_X(t) = (1-p) + pt$. Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p, alors

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} t^k = \big((1-p) + pt\big)^n.$$

5. Puisque X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(X+Y=n) = \bigcup_{k=0}^{n} (X=k) \cap (Y=n-k).$$

Par indépendance de X et de Y, on a donc

$$P(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)P(Y=n-k).$$

Reconnaissant le produit de Cauchy de deux séries entières, on conclut que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(X+Y=n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} P(X=k)t^k P(Y=n-k)t^{n-k} = G_X(t)G_Y(t).$$

6. On a

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t) = \big(p + (1-p)t\big)^{n+m}.$$

Ainsi, $X+Y$ suit une loi binomiale de paramètres $n+m$ et p. On pouvait aussi dire que, puisque X est la somme de n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre p et que Y est la somme de m variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre p, et puisque X et Y sont indépendantes, $X+Y$ est la somme de $n+m$ variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètres p. Ainsi, $X+Y$ suit une loi binomiale de paramètre $(n+m,p)$.

Partie B

Équations différentielles

1. Révisions : Equations différentielles de Sup'

a. Equations différentielles linéaires scalaires du 1er ordre

Exercice 5.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $7y' + 2y = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$;
2. $y' + 2y = x^2 - 2x + 3$;
3. $y' + y = xe^{-x}$;
4. $y' - 2y = \cos(x) + 2\sin(x)$;

Correction.

1. On résout d'abord l'équation sans second membre $7y' + 2y = 0$. La solution générale est de la forme $y(x) = Ke^{-2x/7}$. On cherche ensuite une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 3. Si $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$, alors P est une solution de l'équation si et seulement si
$$7(3ax^2 + 2bx + c) + 2(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$
soit
$$2ax^3 + (21a + 2b)x^2 + (14b + 2c)x + (7c + 2d) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$
Par identification, on trouve que a, b, c et d sont solutions du système
$$\begin{cases} 2a &= 2 \\ 21a + 2b &= -5 \\ 14b + 2c &= 4 \\ 7c + 2d &= -1 \end{cases}$$
On résout ce système et on trouve qu'une solution particulière est donné par $x^3 - 13x^2 + 93x - 326$. L'ensemble des solutions de l'équation est donnée par les fonctions
$$x \mapsto x^3 - 13x^2 + 93x - 326 + Ke^{-2x/7} \text{ avec } K \in \mathbb{R}.$$
2. On résout l'équation sans second membre $y' + 2y = 0$ dont la solution générale est λe^{-2x}. On cherche ensuite une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 2, $y(x) = ax^2 + bx + c$. En procédant exactement comme à la question précédente, on trouve qu'une solution particulière est donnée par $\frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$. Les solutions de l'équation sont donc les fonctions
$$x \mapsto \lambda e^{-2x} + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$
3. On résout d'abord l'équation sans second membre $y' + y = 0$ qui donne $y(x) = Ke^{-x}$ avec $K \in \mathbb{R}$. On cherche ensuite une solution de l'équation complète sous la forme $y(x) = P(x)e^{-x}$, avec P un polynôme. Puisque dans ce cas $y'(x) = P'(x)e^{-x} - P(x)e^{-x}$, on trouve que y est solution de l'équation si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$P'(x)e^{-x} - P(x)e^{-x} + P(x)e^{-x} = xe^{-x},$$

c'est-à-dire si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P'(x)e^{-x} = xe^{-x} \iff P'(x) = x.$$

Le polynôme $P(x) = x^2/2$ convient, et une solution particulière de l'équation complète est donc $\frac{x^2}{2}e^{-x}$. Les solutions de l'équation sont donc les fonctions

$$x \mapsto \left(\frac{1}{2}x^2 + K\right)e^{-x}, \text{ avec } K \in \mathbb{R}.$$

4. La solution générale de l'équation sans second membre est $y(x) = Ke^{2x}$, $K \in \mathbb{R}$. Il y a ensuite plusieurs méthodes pour rechercher une solution particulière. Par exemple, on peut chercher une solution particulière de l'équation $y' - 2y = \cos x$. Pour cela, on écrit que $\cos x = \Re e(e^{ix})$ et on cherche une solution de $y' - 2y = e^{ix}$. Puisque e^{ix} n'est pas solution de l'équation sans second membre, on cherche une solution particulière sous la forme $y(x) = \alpha e^{ix}$. Cette fonction est solution de $y' - 2y = e^{ix}$ si et seulement si

$$i\alpha e^{ix} - 2\alpha e^{ix} = e^{ix}$$

ie si et seulement si

$$\alpha = \frac{1}{-2+i} = \frac{-2-i}{(-2+i)(-2-i)} = -\frac{2+i}{5}.$$

Une solution particulière de $y' - 2y = \cos x$ est donc donnée par

$$\Re e\left(-\frac{2+i}{5}e^{ix}\right) = -\frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x.$$

On cherche ensuite une solution particulière de $y' - 2y = 2\sin x$ en utilisant exactement la même méthode, mais en remarquant que cette fois $\sin x = \Im m(e^{ix})$. Une solution particulière est donc donnée par

$$2\Im m\left(-\frac{2+i}{5}e^{ix}\right) = -\frac{4}{5}\sin x - \frac{2}{5}\cos x.$$

Par le principe de superposition des solutions, on trouve finalement que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est donnée par les fonctions

$$x \mapsto Ke^{2x} - \frac{4}{5}\cos x - \frac{3}{5}\sin x, \text{ avec } K \in \mathbb{R}.$$

Exercice 6.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$ sur $\mathbb{R}$;
2. $(1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x)$ sur $]-1, +\infty[$;
3. $y' - \frac{y}{x} = x^2$ sur $]0, +\infty[$;
4. $y' - 2xy = -(2x-1)e^x$ sur $\mathbb{R}$;
5. $y' - \frac{2}{t}y = t^2$ sur $]0, +\infty[$;

Correction.

1. On commence par résoudre l'équation homogène $y' + y = 0$ dont la solution générale est $y(x) = \lambda e^{-x}$. On cherche une solution particulière sous la forme $y(x) = \lambda(x)e^{-x}$, de sorte que $y'(x) = \lambda'(x)e^{-x} - \lambda(x)e^{-x}$. On introduit ceci dans l'équation différentielle et on trouve
$$\lambda'(x)e^{-x} - \lambda(x)e^{-x} + \lambda(x)e^{-x} = \frac{1}{1+e^x}.$$
Après simplification, ceci donne :
$$\lambda'(x)e^{-x} = \frac{1}{1+e^x} \implies \lambda'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}.$$
Une solution particulière est donc donné par $y(x) = \ln(1+e^x)e^{-x}$. Finalement, la solution générale de l'équation avec second membre est donnée par
$$x \mapsto \ln(1+e^x)e^{-x} + \lambda e^{-x}.$$

2. On commence par résoudre l'équation homogène $(1+x)y' + y = 0$, dont la solution générale est donnée par $y(x) = \frac{\lambda}{1+x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière par la méthode de variation de la constante, en posant $y(x) = \frac{\lambda(x)}{1+x}$, de sorte que
$$y'(x) = \frac{\lambda'(x)}{1+x} - \frac{\lambda(x)}{(1+x)^2}.$$
En introduisant ceci dans l'équation différentielle, on trouve
$$(1+x)\left(\frac{\lambda'(x)}{1+x} - \frac{\lambda(x)}{(1+x)^2}\right) + \frac{\lambda(x)}{1+x} = 1 + \ln(1+x)$$
ce qui donne après simplifications
$$\lambda'(x) = 1 + \ln(1+x).$$
Une primitive est donnée par $\lambda(x) = (1+x)\ln(1+x)$, et la solution générale de l'équation avec second membre est donc donnée par
$$x \mapsto \frac{\lambda}{1+x} + \ln(1+x).$$

3. On commence par résoudre l'équation sans second membre $y' - \frac{y}{x} = 0$. On remarque que $x \mapsto x$ est une solution. L'ensemble des solutions de l'équation sans second membre est donc les fonctions $x \mapsto Cx$, $C \in \mathbb{R}$. On cherche ensuite une solution particulière sous la forme $y(x) = \lambda(x)x$. Reportant dans l'équation différentielle, on trouve l'équation $\lambda'(x) = x$, ce qui donne $\lambda(x) = \frac{x^2}{2} + C$. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est donc donné par les fonctions
$$x \mapsto Cx + \frac{x^3}{2}.$$

4. On commence par résoudre l'équation homogène $y' - 2xy = 0$. On a
$$y' - 2xy = 0 \iff \frac{y'}{y} = 2x \iff \ln|y| = x^2 + C,$$

et donc la solution générale de l'équation homogène est $t \mapsto \lambda e^{x^2}$. On cherche ensuite une solution particulière de l'équation en utilisant la méthode de variation de la constante. On pose donc $y(x) = \lambda(x)e^{x^2}$ et introduisant y dans l'équation avec second membre, on trouve

$$\lambda'(x)e^{x^2} = (-2x+1)e^x \iff \lambda'(x) = (-2x+1)e^{-x^2+x}.$$

Une primitive est donnée par $\lambda(x) = e^{-x^2+x}$ et donc une solution particulière de l'équation avec second membre est donnée par

$$x \mapsto e^{-x^2+x}e^{x^2} = e^x.$$

Finalement, les solutions de l'équation sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{x^2} + e^x$.

5. On commence par résoudre l'équation homogène $y' - \frac{2}{t}y = 0$. On trouve que les solutions sont les fonctions de la forme $y(t) = \lambda t^2$. On cherche une solution particulière par la méthode de variation de la constante en posant $y(t) = \lambda(t)t^2$. L'équation devient :

$$t^2 = y'(t) - \frac{2}{t}y(t) = \lambda'(t)t^2.$$

Dès lors, $\lambda'(t) = 1$ soit $\lambda(t) = t + C$. Finalement, les solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation de départ sont les fonctions

$$t \mapsto t^3 + Ct^2.$$

Exercice 7.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + \tan(t)y = \sin(2t)$, $y(0) = 1$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$;
2. $(x+1)y' + xy = x^2 - x + 1$, $y(1) = 1$ sur $]-1, +\infty[$ (on pourra rechercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme).

Correction.

1. La solution générale de l'équation homogène est donnée par $t \mapsto \lambda \cos t$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière par la méthode de variation de la constante et posant $y(t) = C(t)\cos(t)$. Introduisant cette fonction dans l'équation, et tenant compte de la formule $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$, on trouve $C'(t) = 2\sin(t)$ dont une primitive est $t \mapsto -2\cos t$. Une solution particulière de l'équation différentielle est donc donnée par la fonction $t \mapsto -2\cos^2 t$. Les solutions de l'équation sont alors les fonctions vérifiant $t \mapsto \lambda \cos t - 2\cos^2 t$. On cherche la solution valant 1 en 0. On trouve $\lambda - 2 = 1$, soit $\lambda = 3$. Ainsi, la solution recherchée est la fonction
$$t \mapsto -2\cos^2 t + 3\cos t.$$
2. La résolution de l'équation homogène amène à chercher une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{-x}{x+1}$. Pour cela, il suffit d'écrire

$$\frac{-x}{x+1} = \frac{-x-1+1}{x+1} = -1 + \frac{1}{x+1}.$$

Les solutions de l'équation homogène, sur l'intervalle $]-1, +\infty[$, sont donc les fonctions $x \mapsto \lambda(x+1)e^{-x}$. On cherche une solution particulière de l'équation sous la forme d'un polynôme. Or, si P est un polynôme, le degré de $(x+1)y' + xy$ vaut le degré de P plus 1. On cherche donc y sous la forme d'un polynôme de degré 1, soit $y(x) = ax+b$. Introduisant cela dans l'équation différentielle, on trouve

$$(x+1)a + x(ax+b) = x^2 - x + 1.$$

Par identification, on trouve $a = 1$, $a + b = -1$, soit $b = -2$. Les solutions de l'équation sont donc les fonctions $x \mapsto (x-2) + \lambda(x+1)e^{-x}$. La solution vérifiant $y(1) = 1$ est obtenue pour $\lambda = e$.

Exercice 8.

1. Soient $C, D \in \mathbb{R}$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \begin{cases} C\exp\left(\frac{-1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ D\exp\left(\frac{-1}{x}\right) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

   (a) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur C et D pour que f se prolonge par continuité en 0.

   (b) Démontrer que si cette condition est remplie, ce prolongement, toujours noté f, est alors dérivable en 0 et que f' est continue en 0.

2. On considère l'équation différentielle

$$x^2y' - y = 0.$$

   Résoudre cette équation sur les intervalles $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$.

3. Résoudre l'équation précédente sur $\mathbb{R}$.

Correction.

1. (a) Il est clair que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, indépendamment de la valeur de C, et que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \pm\infty$ si $D \neq 0$, et $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ si $D = 0$. Ainsi, on a un prolongement continu en 0 si et seulement si $D = 0$. Dans ce cas, on a $f(0) = 0$.

   (b) On suppose donc que $D = 0$. La fonction f étant identiquement nulle à gauche de 0, elle est dérivable à gauche en 0 et sa dérivée est nulle. Pour $x > 0$, on a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{C}{x}\exp(-1/x).$$

   Posons $u = \frac{1}{x}$. Lorsque x tend vers 0^+, u tend vers $+\infty$ et

$$\frac{1}{x}\exp(-1/x) = u\exp(-u).$$

   Par comparaison des fonctions polynomes et exponentielle, on en déduit que $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0^+, et donc f' est dérivable à droite en 0, de dérivée nulle. Ainsi, on a bien que f est dérivable en 0, avec $f'(0) = 0$. La continuité à gauche de f' en 0 ne pose alors pas de problèmes. En ce qui concerne la dérivée à droite, on remarque que, pour $x > 0$, on a

$$f'(x) = \frac{C}{x^2}\exp(-1/x) = Cu^2\exp(-u)$$

toujours avec le même changement de variables. Comme précédemment, on en tire que $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$, et donc que f est continue en 0.

2. Sur l'intervalle $]0, +\infty[$, la fonction x^2 ne s'annule pas et l'équation est équivalente à

$$y' = \frac{1}{x^2}y.$$

Les solutions de cette équation sont les fonctions $y(x) = C\exp(-1/x)$, où $C \in \mathbb{R}$. La résolution sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ donne exactement le même ensemble de solutions.

3. Soit y une solution sur $\mathbb{R}$. Sa restriction à $]0, +\infty[$ est solution sur $]0, +\infty[$, et donc il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x > 0$, $y(x) = C\exp(-1/x)$. La restriction de y à $]-\infty, 0[$ est aussi solution sur $]-\infty, 0[$, et donc il existe une constante $D \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x < 0$, $y(x) = D\exp(-1/x)$. Remarquons ici que C et D n'ont aucune raison d'être égaux. En effet, les résolutions sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ se font totalement indépendamment. D'ailleurs, le résultat des premières questions entraîne que, pour que y soit continue en 0, il est nécessaire que $D = 0$. Dans ce cas, la fonction y est de classe C^1, et elle vérifie bien l'équation différentielle : c'est clair pour $x \neq 0$, et c'est aussi vrai en 0 par continuité de y et y' en 0.

Exercice 9.

Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles suivantes :

1. $ty' - 2y = t^3$;
2. $t^2y' - y = 0$;
3. $(1-t)y' - y = t$.

Correction.

Les trois équations ont en commun que le terme devant y' s'annule. Il faut donc résoudre l'équation sur des intervalles où cette fonction ne s'annule pas (par exemple, $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$ pour la première équation), puis étudier si les solutions se recollent correctement (ie si en "collant" une solution sur $]0, +\infty[$ et une solution sur $]-\infty, 0[$ on peut obtenir une solution C^1 sur $\mathbb{R}$).

1. $ty' - 2y = t^3$: sur $]0, +\infty[$, on résout d'abord l'équation sans second membre

$$ty' - 2y = 0 \iff \frac{y'}{y} = \frac{2}{t}$$

et donc les solutions de l'équation sans second membre sont les fonctions de la forme $y(t) = \lambda t^2$. Pour trouver les solutions de l'équation avec second membre, on peut utiliser la méthode de variation des constantes, ou remarquer plus facilement que $t \mapsto t^3$ est solution. Une fonction y est donc solution de l'équation sur $]0, +\infty[$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y(t) = \lambda t^2 + t^3$. De même, une fonction y est donc solution de l'équation sur $]-\infty, 0[$ si et seulement s'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $y(t) = \mu t^2 + t^3$. Essayons maintenant de résoudre l'équation sur $\mathbb{R}$. Si $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est solution de l'équation sur $\mathbb{R}$, alors il existe deux constantes

λ et μ telles que

$$y(t) = \begin{cases} \lambda t^2 + t^3 & \text{si } t > 0 \\ \mu t^2 + t^3 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

On veut que y soit continue en 0. Mais on remarque que

$$\lim_{t\to 0-} y(t) = \lim_{t\to 0^+} y(t) = 0.$$

y ainsi définie et prolongée par $y(0) = 0$ est bien continue en 0. De même, il faut que y soit dérivable en 0. Mais, y est dérivable à droite en 0, et $y'_d(0) = 0$ (c'est la dérivée de $t \mapsto \lambda t^2 + t^3$ en 0), et y est dérivable à gauche en 0 avec $y'_g(0) = 0$. Ainsi, la formule précédente définit bien une fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, y est solution de l'équation. On pourra remarquer que l'ensemble des solutions, dans ce cas, est de dimension 2.

2. $t^2y' - y = 0$: On résout d'abord l'équation sur $]0, +\infty[$. Elle est équivalente à $y'/y = \frac{1}{t^2}$, ce qui nous dit qu'une fonction y est solution sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $y(t) = \lambda e^{-1/t}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. De même, une fonction y est solution sur $]-\infty, 0[$ si et seulement si $y(t) = \mu e^{-1/t}$ avec $\mu \in \mathbb{R}$. Si on cherche maintenant une solution y sur $\mathbb{R}$, ses restrictions à $]0, +\infty[$ et à $]-\infty, 0[$ sont aussi solutions, et il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$y(t) = \begin{cases} \lambda e^{-1/t} & \text{si } t > 0 \\ \mu e^{-1/t} & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

On étudie la continuité éventuelle de y en 0. On a

$$\lim_{t\to 0^+} y(t) = \lim_{t\to 0^+} \lambda e^{-1/t} = 0,$$

tandis que

$$\lim_{t\to 0^-} y(t) = \lim_{t\to 0^-} \mu e^{-1/t} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \mu > 0 \\ -\infty & \text{si } \mu < 0 \\ 0 & \text{si } \mu = 0. \end{cases}$$

Pour assurer la continuité de y en 0, il est donc nécessaire que $\mu = 0$ et on prolonge y par continuité en 0 en posant $y(0) = 0$. Mais alors, pour $t > 0$, on a

$$y'(t) = \frac{1}{t^2} e^{-1/t}$$

et par comparaison des fonctions puissance et exponentielle, on a

$$\lim_{t\to 0^+} y'(t) = 0.$$

Puisque bien sûr $\lim_{t\to 0^-} y'(t) = 0$ (rappelons que $\mu = 0$), y est dérivable en 0. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation sont donc les fonctions

$$y(t) = \begin{cases} \lambda e^{-1/t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

On pourra remarquer que l'ensemble des solutions, dans ce cas, est de dimension 1.

3. $(1-t)y' - y = t$: on résout cette fois l'équation sur chacun des intervalles $]1, +\infty[$ et $]-\infty, 1[$. Les solutions de l'équation homogène associée, sur $]1, +\infty[$, sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto \frac{\lambda}{1-t},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

On résout ensuite l'équation générale par la méthode de variation de la constante. En posant $y(t) = \frac{\lambda(t)}{1-t}$, on trouve

$$\lambda'(t) = t$$

et donc une solution particulière est donnée par $y(t) = \frac{t^2}{2(1-t)}$. On a donc prouvé qu'une fonction y est solution sur $]1, +\infty[$ de l'équation si et seulement s'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $y(t) = \frac{2\lambda+t^2}{2(1-t)}$. Quand λ décrit $\mathbb{R}$, 2λ décrit lui aussi $\mathbb{R}$ et on peut réécrire cet ensemble de solutions plus simplement comme l'ensemble des fonctions qui s'écrivent $y(t) = \frac{\lambda+t^2}{2(1-t)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On résout de même l'équation sur $]-\infty, 1[$. Considérons maintenant y une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation. Alors il existe deux constantes λ et μ telles que

$$y(t) = \begin{cases} \frac{\lambda+t^2}{2(1-t)} & \text{si } t > 1 \\ \frac{\mu+t^2}{2(1-t)} & \text{si } t < 1. \end{cases}$$

Pour que y soit continue en 1, puisque $1 - t \to 0$ lorsque t tend vers 1, il est nécessaire que $\lambda + t^2 \to 0$ lorsque $t \to 1$, soit $\lambda = -1$. De même, on doit avoir $\mu = -1$. Ainsi, si y est solution sur $\mathbb{R}$, pour $t \neq 1$, elle s'écrit

$$y(t) = \frac{t^2 - 1}{2(1-t)} = -\frac{1}{2}(1+t).$$

Cette fonction se prolonge par continuité en 1, et on vérifie aisément qu'elle est solution de l'équation. Dans ce cas, l'ensemble des solutions est un espace affine de dimension 0.

Exercice 10.

Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes :

1. $(x \ln x)y' - y = -\frac{1+\ln x}{x}$ sur $]1, +\infty[$, puis sur $]0, +\infty[$;
2. $xy' + 2y = \frac{x}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$;
3. $y' \cos^2 x - y = e^{\tan x}$ sur $\mathbb{R}$;

Correction.

1. Sur $]1, +\infty[$, la fonction $x \mapsto x \ln x$ ne s'annule pas et donc on a bien affaire à une équation différentielle linéaire d'ordre 1 sur cet intervalle. L'ensemble de ces solutions est donc une droite affine. On commence par résoudre l'équation sans second membre,

$$(x \ln x)y' - y = 0 \iff \frac{y'}{y} = \frac{1}{x \ln x}.$$

Puisqu'une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ est $\ln(\ln(x))$, on intègre et on trouve $\ln|y| = \ln(\ln(x)) + K$, soit $y(x) = C \ln(x)$. On cherche maintenant une solution particulière en utilisant la méthode de variation de la constante : on cherche donc une solution sous la forme

$$f(x) = C(x) \ln(x).$$

En dérivant,

$$f'(x) = C'(x) \ln(x) + \frac{C(x)}{x}.$$

On introduit alors dans l'équation pour obtenir :

$$(x\ln(x))\ln(x)C'(x) = -(1+\ln(x))/x$$

soit

$$C'(x) = -\frac{1+\ln(x)}{x^2(\ln(x))^2}.$$

Ceci est de la forme $-u'/u^2$, avec $u(x) = x\ln(x)$. On peut donc intégrer pour trouver qu'une solution particulière est donnée par $C(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$, soit $f(x) = \frac{1}{x}$. Finalement, on trouve que les fonctions solutions de l'équation différentielle sur $]1,+\infty[$ sont les fonctions

$$x \mapsto \frac{1}{x} + C\ln(x),\ C \in \mathbb{R}.$$

Etudions maintenant cette équation sur $\mathbb{R}_+^*$. Le problème est que $x \mapsto x\ln x$ s'annule en 1 et que l'on sort du cadre des théorèmes usuels. On ne sait donc même pas s'il existe des solutions sur cet intervalle et, s'il en existe, quelle sera la dimension de l'espace des solutions. En revanche, on sait résoudre l'équation sur $]1,+\infty[$ et aussi sur $]0,1[$ (exactement de la même façon). Si f est donc une solution sur $]0,+\infty[$, il existe donc deux constantes C et D telle que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + C\ln x & \text{si } x>1 \\ \frac{1}{x} + D\ln x & \text{si } x \in]0,1[. \end{cases}$$

Il faut remarquer que les constantes C et D peuvent être distinctes, puisqu'on a simplement écrit que f est d'une part solution sur $]1,+\infty[$, d'autre part solution sur $]0,1[$. Tout le travail maintenant consiste à savoir s'il y a raccordement de ces solutions, c'est-à-dire si on peut choisir C et D de sorte que la formule précédente définisse une fonction dérivable sur $]0,+\infty[$. D'une part, puisque $\ln(1) = 0$, on remarque que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1.$$

La fonction est donc continue en 1, quelles que soient les valeurs de C et D. On dérive, et on sait que $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{C}{x}$ si $x > 1$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{D}{x}$ sinon. On a donc

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = -1 + C \text{ tandis que } \lim_{x\to 1^-} f'(x) = -1 + D.$$

Les limites à droite et à gauche de f' coincident si et seulement si $C = D$. Autrement dit, f' est dérivable en 1 si et seulement si $C = D$. Ainsi, les solutions de l'équation sur $]0,+\infty[$ sont les fonctions qui s'écrivent

$$x \mapsto \frac{1}{x} + C\ln(x),\ C \in \mathbb{R}.$$

2. On va résoudre l'équation différentielle sur $I_1 =]0,+\infty[$ et sur $I_2 =]-\infty,0[$, intervalles où la fonction devant y' ne s'annule pas. On fixe donc j dans $\{1,2\}$. On résoud sur I_j l'équation sans second membre, $xy' + 2y = 0$. Les solutions qui ne s'annulent pas vérifient $y'/y = -2/x$, soit $\ln|y(x)/C| = \ln|1/x^2|$ avec k une constante. Les fonctions $x \mapsto 1/x^2$ sont donc solutions, et puisqu'on sait que l'ensemble des solutions est de dimension 1, on trouve que l'ensemble des solutions sur I_j de l'équation $xy' + 2y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto C_j/x^2$. On résoud maintenant l'équation avec second membre en utilisant la méthode de variation de la constante. On pose donc $y(x) = \lambda(x)/x^2$. y est solution de l'équation différentielle si et seulement si
$$\lambda'(x) = \frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}.$$

En intégrant, une solution particulière est donnée par

$$\lambda(x) = \frac{x - \arctan x}{x^2}.$$

Les solutions sur I_j de l'équation différentielle sont donc les fonctions

$$x \mapsto \frac{x - \arctan x + C_j}{x^2}.$$

Soit maintenant z une solution sur $\mathbb{R}$. Alors $z_{|I_j}$ est solution de l'équation différentielle sur I_j. Ainsi, il existe des constantes C_1 et C_2 telle que z vérifie sur I_j

$$z(x) = \frac{x - \arctan x + C_j}{x^2}.$$

Il faut que z soit continue en 0. Pour que la fonction admette une limite finie en 0, il est nécessaire que $C_j = 0$. Réciproquement, si $z(x) = \frac{x - \arctan x}{x^2}$ pour $z \neq 0$, alors on effectue un dl et on trouve

$$z(x) = \frac{x}{3} + o(x).$$

Il suit que z, prolongée par $z(0) = 0$, est dérivable en 0 avec $z'(0) = 1/3$. z est donc l'unique solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$.

3. On commence par résoudre l'équation différentielle sur un intervalle du type $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$, avec $k \in \mathbb{Z}$, intervalle sur lequel la fonction tan est bien définie. La solution générale de l'équation homogène est de la forme $x \mapsto \lambda e^{\tan x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. La recherche d'une solution particulière par la méthode de variation de la constante amène à

$$\lambda'(x)\cos^2(x)e^{\tan x} = e^{\tan x}$$

ce qui donne comme solution particulière $x \mapsto e^{\tan x}(\tan x + \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Lorsque x tend vers $\pi/2 + k\pi$ (par valeurs inférieures), cette fonction tend vers $+\infty$: il n'y a donc pas de raccodement possible.

Exercice 11.

L'accroissement de la population P d'un pays est proportionnel à cette population. La population double tous les 50 ans. En combien de temps triple-t-elle ?

Correction.

L'accroissement de la population est mesuré par $P'(t)$, cette fonction est donc proportionnelle à $P(t)$. Autrement dit, P vérifie une équation différentielle du type $P'(t) = kP(t)$. Sa solution est de la forme $P(t) = Ce^{kt}$. De l'autre information (la population double tous les 50 ans), on déduit que $P(t + 50) = 2P(t)$ pour tout $t \geq 0$. Ainsi, on a

$$Ce^{kt}e^{50k} = 2Ce^{kt} \implies 50k = \ln 2 \implies k = \ln 2/50.$$

On cherche x tel que $P(t + x) = 3P(t)$ pour tout $t \geq 0$. Ceci donne

$$Ce^{kt}e^{kx} = 3Ce^{kt} \implies kx = \ln 3 \implies x = \frac{50 \ln 3}{\ln 2} \simeq 79,24.$$

La population triple environ tous les 79 ans un quart.

b. Equations différentielles linéaires scalaires du 2nd ordre à coefficients constants

Exercice 12.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 2y' + y = x$, $y(0) = y'(0) = 0$;
2. $y'' + 9y = x + 1$, $y(0) = 0$;
3. $y'' - 2y' + y = \sin^2 x$;

Correction.

1. On commence par résoudre l'équation homogène $y'' - 2y' + y = 0$. Son équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = 0$, dont 1 est racine double. Les solutions générales de l'équation homogène sont donc les fonctions
$$x \mapsto \lambda e^x + \mu x e^x.$$
Comme 0 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on va chercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 1. Mais $y(x) = ax + b$ est solution de l'équation différentielle si et seulement si :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ -2a + ax + b = x \iff \forall x \in \mathbb{R}, (a-1)x + (b-2a) = 0.$$
Un polynôme réel étant identiquement nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, on en déduit que $a = 1$ et $b = 2$. Les solutions de l'équation sont donc les fonctions de la forme
$$x \mapsto \lambda e^x + \mu x e^x + (x+2).$$
Si on ajoute les conditions $y(0) = y'(0) = 0$, on obtient les équations
$$\lambda + 2 = 0 \text{ et } \lambda + \mu + 1 = 0,$$
soit $\lambda = -2$ et $\mu = 1$. La seule solution de l'équation est donc la fonction
$$x \mapsto (x-2)e^x + (x+2).$$
2. L'équation homogène $y'' + 9y = 0$ admet pour équation caractéristique associée $r^2 + 9 = 0$, dont les racines sont $3i$ et $-3i$. Les solutions réelles de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme $t \mapsto \cos(3x)$ et $t \mapsto \sin(3x)$. On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 1, et on trouve $x \mapsto \frac{x+1}{9}$. Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions de la forme
$$x \mapsto A\cos(3x) + B\sin(3x) + \frac{x+1}{9}.$$
La condition $y(0) = 0$ entraîne $A = -1/9$.

3. L'équation caractéristique est $r^2-2r+1=0$ dont 1 est racine double. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme

$$x\mapsto (A+Bx)e^x,\ A,B\in\mathbb{R}.$$

Pour résoudre l'équation avec second membre, on linéarise $\sin^2 x=\frac{1-\cos(2x)}{2}$. Par le principe de superposition des solutions, on cherche d'abord une solution particulière qui correspond à $1/2$. La fonction constante égale à $1/2$ convient. On cherche ensuite une solution particulière convenant à $\cos(2x)$ (il suffira ensuite de multiplier par $-1/2$ pour trouver une solution convenant à $-\cos(2x)/2$). On cherche cette solution particulière sous la forme $y(x)=c\cos(2x)+d\sin(2x)$. On a alors

$$y''(x)-2y'(x)+y(x)=(-3c-4d)\cos(2x)+(4c-3d)\sin(2x).$$

On cherche donc c et d solutions du système

$$\begin{cases}-3c-4d= & 1\\ 4c-3d= & 0\end{cases}$$

On trouve $c=-3/25$ et $d=-4/25$. Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions

$$x\mapsto (A+Bx)e^x+\frac{1}{2}+\frac{3}{50}\cos(2x)+\frac{2}{25}\sin(2x),\ A,B\in\mathbb{R}.$$

Exercice 13.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y''-4y'+3y=(2x+1)e^{-x}$;
2. $y''-4y'+3y=(2x+1)e^{x}$;
3. $y''-2y'+y=(x^2+1)e^x+e^{3x}$;
4. $y''-4y'+3y=x^2e^x+xe^{2x}\cos x$;
5. $y''-2y'+5y=-4e^{-x}\cos(x)+7e^{-x}\sin x-4e^x\sin(2x)$;

Correction.

1. On commence par résoudre l'équation homogène $y''-4y'+3y=0$. Son équation caractéristique est $r^2-4r+3=0$, dont les racines sont 1 et 3. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions $x\mapsto \lambda e^x+\mu e^{3x}$. Comme -1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme $y(x)=(ax+b)e^{-x}$. En dérivant, on trouve

$$y'(x)=(-ax+(-b+a))e^{-x},\ y''(x)=(ax+(b-2a))e^{-x}$$

et donc a et b sont solutions du système :

$$\begin{cases}8a&=&2\\ 8b-6a&=&1\end{cases}$$

On résoud ce système, et on trouve qu'une solution particulière est donnée par $y_0(x)=$

$\left(\frac{x}{4}+\frac{5}{16}\right)e^{-x}$. Finalement, les solutions de l'équation avec second membre sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \left(\frac{x}{4}+\frac{5}{16}\right)e^{-x}+\lambda e^{x}+\mu e^{3x},\ \ \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

2. L'équation homogène a déjà été résolue à la question précédente. Pour résoudre l'équation avec second membre, on remarque cette fois que 1 est racine simple de l'équation caractéristique. On cherche donc une solution particulière sous la forme $y(x)=(ax^2+bx)e^x$ (on peut trouver un polynôme sans terme constant car la fonction $x\mapsto e^x$ est solution de l'équation homogène). On dérive pour trouver

$$y'(x)=\big(ax^2+(2a+b)x+b\big)e^x \text{ et } y''(x)=\big(ax^2+(4a+b)x+(2a+2b)\big)e^x.$$

Par identification, a et b sont solutions du système

$$\left\{\begin{array}{rcl} -4a &=& 2\\ 2a-2b &=& 1\end{array}\right.$$

On obtient comme solution $a=-1/2$ et $b=-1$. La solution générale de l'équation avec second membre est donc donnée par la formule

$$y\mapsto \left(\frac{-x^2}{2}-x\right)e^x+\lambda e^x+\mu e^{3x},\ \ \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

3. On commence par résoudre l'équation homogène $y''-2y'+y=0$. L'équation caractéristique associée est $r^2-2r+1=0$ qui admet 1 comme racine double. La solution générale de l'équation homogène est donc $(Ax+B)e^x$.
On cherche une solution particulière de l'équation générale en utilisant le principe de superposition des solutions. On commence donc à chercher une solution de $y''-2y'+y=(x^2+1)e^x$. On la cherche sous la forme d'une exponentielle polynôme $P(x)e^x$. Comme 1 est racine double de l'équation caractéristique, on sait qu'on va trouver une solution avec un polynôme P de degré inférieur ou égal à 4. Utilisant

$$y'(x)=\big(P'(x)+P(x)\big)e^x\ \ y''(x)=\big(P''(x)+2P'(x)+P(x)\big)e^x,$$

on obtient

$$y''(x)-2y'(x)+y(x)=P''(x)e^x.$$

y est donc solution de l'équation si et seulement si $P''=x^2+1$. On obtient donc une solution particulière sous la forme

$$\left(\frac{x^4}{12}+\frac{x^2}{2}\right)e^x.$$

On cherche maintenant une solution particulière de $y''-2y'+y=e^{3x}$. Cette fois, 3 n'est pas racine de l'équation caractéristique, et on peut chercher une solution particulière sous la forme $y(x)=\alpha e^{3x}$. On obtient, en introduisant dans l'équation

$$9\alpha-6\alpha+\alpha=1 \iff \alpha=\frac{1}{4}.$$

Les solutions de l'équation générale de départ sont donc les fonctions

$$x\mapsto\left(\frac{x^4}{12}+\frac{x^2}{2}+Ax+B\right)e^x+\frac{1}{4}e^{3x}.$$

4. On résoud l'équation homogène $y'' - 4y' + 3y = 0$. On introduit l'équation caractéristique $r^2 - 4r + 3 = 0$. Ses racines sont 1 et 3. On en déduit que la solution générale de l'équation sans second membre est
$$x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{3x},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$
On cherche une solution particulière en utilisant le principe de superposition des solutions. On cherche donc d'abord une solution de $y'' - 4y' + 3y = x^2 e^x$. Puisque 1 est solution de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme $y_1(x) = (ax^3 + bx^2 + cx)e^x$. En dérivant et en identifiant, on obtient le système
$$\left\{\begin{array}{rcl} -6a & = & 1 \\ 6a - 4b & = & 0 \\ 2b - 2c & = & 0 \end{array}\right.$$
Une solution particulière est donc obtenue par
$$y_1(x) = -\left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\right) e^x.$$
On cherche ensuite une solution particulière de $y'' - 4y' + 3y = xe^{2x} \cos x$. On va en fait chercher une solution particulière de $y'' - 4y' + 3y = xe^{(2+i)x}$ et on en prendra la partie réelle. $2 + i$ n'étant pas solution de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme $y_2(x) = (ax + b)e^{(2+i)x}$. Après dérivation et identification, on trouve le système
$$\left\{\begin{array}{rcl} -2a & = & 1 \\ 2ia - 2b & = & 0. \end{array}\right.$$
On trouve $y_2(x) = \left(-\frac{1}{2}x - \frac{i}{2}\right) e^{(2+i)x}$. Prenant la partie réelle, une solution particulière de $y'' - 4y' + 3y = xe^{2x} \cos x$ est obtenue par
$$x \mapsto \left(-\frac{x}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x\right) e^{2x}.$$
La solution générale de l'équation différentielle initiale est donc donnée par
$$x \mapsto -\left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\right) e^x + \left(-\frac{x}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x\right) e^{2x} + \lambda e^x + \mu e^{3x}.$$

5. L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 5 = 0$, dont les racines sont $1 + 2i$ et $1 - 2i$. La solution générale de l'équation homogène est donc donnée par
$$x \mapsto \lambda e^x \cos(2x) + \mu e^x \sin(2x),$$
avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On cherche ensuite une solution particulière de l'équation
$$y'' - 2y' + 5y = -4e^{-x} \cos(x) + 7e^{-x} \sin(x).$$
On va plutôt résoudre $y'' - 2y' + 5y = e^{(-1+i)x}$, puis considérer les parties réelles et imaginaires. Comme $-1 + i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une fonction de la forme $y_0(x) = ae^{(-1+i)x}$. On trouve, en dérivant et en utilisant l'équation
$$\big((-1 + i)^2 - 2(-1 + i) + 5\big)a = 1.$$

Il vient $a = 1/(7-4i) = (7+4i)/65$. Une solution particulière de $y'' - 2y' + 5y = -4e^{-x}\cos(x) + 7e^{-x}\sin(x)$ est alors donnée par

$$\begin{aligned} -4\Re e\left(ae^{(-1+i)x}\right) + 7\Im m\left(ae^{(-1+i)x}\right) &= -4\Im m\left(iae^{(-1+i)x}\right) + 7\Im m\left(ae^{(-1+i)x}\right)\\ &= \Im m\left((-4i+7)ae^{(-1+i)x}\right)\\ &= \Im m\left(e^{(-1+i)x}\right)\\ &= e^{-x}\sin x. \end{aligned}$$

On cherche ensuite une solution particulière de l'équation

$$y'' - 2y' + 5y = -4e^{x}\sin(2x).$$

On cherche de la même façon à résoudre $y'' - 2y' + 5y = -4e^{(1+2i)x}$. Comme $1+2i$ est solution de l'équation caractéristique, on va chercher une solution sous la forme $axe^{(1+2i)x}$, dont on prendra ensuite -4 fois la partie imaginaire. On trouve finalement que $xe^x\cos(2x)$ est solution de $y'' - 2y' + 5y = -4e^x\sin(2x)$. Finalement, les solutions de l'équation de départ sont les fonctions

$$x \mapsto xe^x\cos(2x) + e^{-x}\sin x + \lambda e^x\cos(2x) + \mu e^x\sin(2x),\ \ \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

Exercice 14.

On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$x^2y"{-}3xy' + 4y = 0.\ (E)$$

1. Cette équation est-elle linéaire ? Qu'est-ce qui change par rapport au cours ?
2. Analyse. Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $t\in\mathbb{R}$, on pose $z(t) = y(e^t)$.
   (a) Calculer pour $t\in\mathbb{R}$, $z'(t)$ et $z''(t)$.
   (b) En déduire que z vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants que l'on précisera (on pourra poser $x = e^t$ dans (E)).
   (c) Résoudre l'équation différentielle trouvée à la question précédente.
   (d) En déduire le "portrait robot" de y.
3. Synthèse. Vérifier que, réciproquement, les fonctions trouvées à la fin de l'analyse sont bien toutes les solutions de (E) et conclure.

Correction.

1. Oui, il s'agit bien d'une équation linéaire, mais elle n'est pas à coefficients constants.
2. (a) On doit dériver une fonction composée. On trouve

$$z'(t) = e^ty'(e^t) \text{ et } z''(t) = e^ty'(e^t) + e^{2t}y''(e^t).$$

   (b) En posant, comme indiqué dans l'énoncé, $x = e^t$, (E) se réécrit :

$$e^{2t}y''(e^t) - 3e^ty'(e^t) + 4y(e^t) = 0.$$

On exprime ensuite $y'(e^t)$ et $y''(e^t)$ en fonction de $z'(t)$ et de $z''(t)$. On trouve :

$$y'(e^t) = e^{-t}z'(t) \text{ et } y''(e^t) = e^{-2t}z''(t) - e^{-t}y'(e^t) = e^{-2t}\big(z''(t) - z'(t)\big).$$

En introduisant cela dans (E), on obtient

$$z''(t) - z'(t) - 3z'(t) + 4z(t) = 0 \iff z''(t) - 4z'(t) + 4z(t) = 0.$$

(c) Il s'agit maintenant d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. Son polynôme caractéristique est $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$, dont la seule solution est $\lambda = 2$. Ainsi, il existe deux constantes a et b telles que $z(t) = ae^{2t} + bte^{2t}$.

(d) On revient à y par $y(x) = z(\ln x)$ et $t = \ln x$. On trouve que si y est solution de l'équation, alors on a

$$y(x) = ax^2 + bx^2\ln(x).$$

3. On a montré que si y est solution de (E), alors il existe deux réels a, b tels que, pour tout $x > 0$, on a $y(x) = ax^2 + bx^2\ln(x)$. Réciproquement, il est facile de vérifier que la fonction $x \mapsto ax^2 + bx^2\ln x$ est solution de l'équation. On a donc trouvé toutes les solutions de l'équation.

Exercice 15.

Pour les équations différentielles suivantes, déterminer l'unique fonction solution :

1. $y'' + 2y' + 4y = xe^x$, avec $y(0) = 1$ et $y(1) = 0$.
2. $y'' - 2y' + (1 + m^2)y = (1 + 4m^2)\cos(mx)$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$; on discutera suivant que $m = 0$ ou $m \neq 0$.

Correction.

1. On commence par résoudre l'équation homogène. Son équation caractéristique est $r^2 + 2r + 4 = 0$, dont le discriminant est -12 et les racines sont $-1 + i\sqrt{3}$ et $-1 - i\sqrt{3}$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme

$$y(x) = ae^{-x}\cos(\sqrt{3}x) + be^{-x}\sin(\sqrt{3}x),$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$. Cherchons maintenant une solution de l'équation avec second membre. On peut chercher une solution de la forme $y_p(x) = (cx + d)e^x$. On a alors

$$y_p''(x) + 2y_p'(x) + 4y_p(x) = (7cx + 7d + 4c)e^x.$$

Après identification des coefficients, on trouve une solution particulière pour $c = \frac{1}{7}$ et $d = \frac{-4}{49}$. Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions de la forme

$$ae^{-x}\cos(\sqrt{3}x) + be^{-x}\sin(\sqrt{3}x) + \frac{xe^x}{7} - \frac{4e^x}{49},$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$. Maintenant, si l'on cherche une solution vérifiant $y(0) = 1$, on doit avoir

$$a = \frac{53}{49}.$$

La condition $y(1)=0$ est alors satisfaite si et seulement si

$$b=-\frac{53\cos\sqrt{3}+3e^2}{49\sin\sqrt{3}}.$$

Remarquons qu'on démontre que l'équation différentielle, avec les conditions imposées, admet une unique solution, ce qui n'est pas un résultat de cours (existence et unicité sont obtenues sous une condition de la forme $y(x_0)=y_0$ et $y'(x_0)=y_1$).

2. On commence par traiter le cas $m=0$, où l'équation différentielle devient $y''-2y+y=1$. Son équation caractéristique est $r^2-2r+1=0$, qui admet 1 pour racine double. On peut continuer la résolution, ou bien remarquer que l'on sait par le cours qu'il existe une unique solution au problème (avec les conditions initiales), et que la fonction constante $y=1$ est solution du problème ! Traitons maintenant le cas $m\neq 0$. L'équation caractéristique admet pour discriminant $-4m^2$ dont les racines sont $\pm 2im$. Les solutions de l'équation caractéristique sont donc $1\pm im$ et les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme

$$y(x)=a\exp(x)\cos(mx)+b\exp(x)\sin(mx),$$

avec $a,b\in\mathbb{R}$. Cherchons maintenant une solution particulière sous la forme $y_p(x)=c\cos(mx)+d\sin(mx)$. On a

$$\begin{array}{rcl} y''(x)-2y'(x)+(1+m^2)y(x) & = & \big(-cm^2-2dm+(1+m^2)c\big)\cos(mx)+\\ & & \big(-dm^2+2cm+(1+m^2)d\big)\sin(mx). \end{array}$$

Par identification, on cherche c et d satisfaisant le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} -cm^2-2dm+(1+m^2)c & = & (1+4m^2)\\ -dm^2+2cm+(1+m^2)d & = & 0. \end{array}\right.$$

La résolution de ce système donne $c=1$ et $d=-2m$. Les solutions de l'équation sont donc les fonctions de la forme

$$y(x)=a\exp(x)\cos(mx)+b\exp(x)\sin(mx)+\cos(mx)-2m\sin(mx).$$

La condition $y(0)=1$ donne $a=0$, tandis que la condition $y'(0)=0$ donne $b=2m$. L'unique solution au problème est donc la fonction

$$x\mapsto 2m\exp(x)\sin(mx)+\cos(mx)-2m\sin(mx).$$

2. Spé : systèmes différentiels

Exercice 16.

Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique suivant l'axe (Oz) est régi par un système différentiel de la forme

$$\left\{\begin{array}{rcl} x'' & = & \omega y'\\ y'' & = & -\omega x'\\ z'' & = & 0 \end{array}\right.$$

où ω dépend de la masse et de la charge de la particule, ainsi que du champ magnétique. En posant $u = x' + iy'$, résoudre ce système différentiel.

Correction.

D'abord, l'équation $z'' = 0$ donne facilement $z(t) = at + b$, avec a et b des constantes. Ensuite, on a

$$u' = x'' + iy'' = \omega y' - i\omega x' = -i\omega u.$$

On en déduit que $u(t) = (c + id)e^{-i\omega t}$. En prenant les parties réelles et imaginaires, on trouve que

$$\begin{array}{rcl} x'(t) & = & c\cos(\omega t) + d\sin(\omega t) \\ y'(t) & = & d\cos(\omega t) - c\sin(\omega t). \end{array}$$

Il suffit d'intégrer une nouvelle fois pour trouver les valeurs de x et de y :

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & c'\sin(\omega t) - d'\cos(\omega t) + x_0 \\ y(t) & = & d'\sin(\omega t) + c'\cos(\omega t) + y_0 \end{array}$$

où on a posé $c' = c/\omega$ et $d' = d/\omega$. Il s'agit d'un mouvement hélicoïdal.

Exercice 17.

Résoudre les systèmes différentiels suivants :

$$\textbf{1.} \left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & x + 2y - z \\ y' & = & 2x + 4y - 2z \\ z' & = & -x - 2y + z \end{array} \right. \qquad \textbf{2.} \left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & y + z \\ y' & = & -x + 2y + z \\ z' & = & x + z \end{array} \right.$$

Correction.

1. Introduisons la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$
de sorte que le système s'écrit $X' = AX$ avec $X(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de A est $X^2(X-6)$. 0 est valeur propre double, mais A est de rang 1 et donc $\ker(A)$ est de dimension 2. Une base de $\ker(A)$ est donnée par les vecteurs $u_1 = (1, 0, 1)$ et $u_2 = (2, -1, 0)$. D'autre part, une base de $\ker(A - 6I)$ est donné par $u_3 = (1, 2, -1)$. Les solutions sont donc données par les triplets s'écrivant
$$X(t) = \lambda u_1 + \mu u_2 + \gamma e^{6t} u_3.$$

2. Introduisons cette fois la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
de sorte que le système s'écrit $X' = AX$ avec $X(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est $X(X-1)(X-2)$, de sorte que ses valeurs propres sont $0, 1, 2$, de vecteurs propres respectifs associés $u_0 = (1, 1, -1)$, $u_1 = (0, -1, 1)$, et $u_2 = (1, 1, 1)$. Ainsi, les solutions sont données par les triplets
$$X(t) = \lambda u_0 + \mu e^t u_1 + \gamma e^{2t} u_2.$$

Exercice 18.

Donner les solutions réelles du système différentiel $X' = AX$ lorsque

$$\mathbf{1}.A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{2}.A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Correction.

1. Les valeurs propres (complexes) de A sont 2, $1+i$ et $1-i$. Un vecteur propre associé à 2 est donné par $(1, 1, 1)$. Pour les deux autres valeurs propres, et pour trouver les solutions réelles, on va appliquer la méthode des coefficients indéterminés. On cherche donc une solution $X(t)$ s'écrivant
$$X(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} e^t \cos t + \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} e^t \sin t$$
et on cherche les relations sur les coefficients $a, \dots, f$ pour que $X(t)$ soit solution du système. La relation $X'(t) = AX(t)$ donne le système :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} (a+b)e^t \cos t + (d+e)e^t \sin t & = & (a+d)e^t \cos t + (-a+d)e^t \sin t \\ (-a+2b+c)e^t \cos t + (-d+2e+f)e^t \sin t & = & (b+e)e^t \cos t + (-b+e)e^t \sin t \\ (a+c)e^t \cos t + (d+f)e^t \sin t & = & (c+f)e^t \cos t + (-c+f)e^t \sin t \end{array} \right.$$
Par identification, on trouve
$$\left\{ \begin{array}{rcl} b & = & d \\ e & = & -a \\ b & = & -c \\ e & = & -f \\ a & = & f \\ d & = & -c \end{array} \right.$$
Les deux dernières équations sont inutiles car elles se déduisent des précédentes. On peut alors choisir a et b comme paramètre, et on obtient un espace vectoriel de dimension deux

de solutions, décrit par

$$\lambda e^t\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\\ \sin t\end{pmatrix}+\mu e^t\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\\ -\cos t\end{pmatrix}.$$

En conclusion, un triplet $(x_1(t),x_2(t),x_3(t))$ est solution du système ssi il existe trois constantes α,λ et μ telles que

$$\begin{cases}x_1(t)=\alpha e^{2t}+\lambda e^t\cos t+\mu e^t\sin t\\ x_2(t)=\alpha e^{2t}-\lambda e^t\sin t+\mu e^t\cos t\\ x_3(t)=\alpha e^{2t}+\lambda e^t\sin t-\mu e^t\cos t\end{cases}$$

2. Les valeurs propres de la matrice sont 1, i et $-i$. Un vecteur propre associé à 1 est $V_1=\begin{pmatrix}1\\-3\\-4\end{pmatrix}$. Un vecteur propre associé à i est $V_i=\begin{pmatrix}i\\1\\2\end{pmatrix}$. Bien entendu, la matrice étant réelle, un vecteur propre associé à $-i$ est $\overline{V_i}$. Pour obtenir des solutions réelles, on peut considérer (toujours parce que la matrice A est réelle) $\Re e(V_ie^{it})$ et $\Im m(V_ie^{it})$. On trouve alors les solutions (indépendantes)

$$\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\\ 2\cos t\end{pmatrix}\text{ et }\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\\ 2\sin t\end{pmatrix}.$$

La solution générale du système dans $\mathbb{R}$ est donc

$$\begin{pmatrix}\lambda e^t-\mu\sin t+\nu\cos t\\ -3\lambda e^t+\mu\cos t+\nu\sin t\\ -4\lambda e^t+2\mu\cos t+2\nu\sin t\end{pmatrix}.$$

Exercice 19.

Résoudre le système différentiel $X'=AX$ lorsque

$$\mathbf{1}.\ A=\begin{pmatrix}0&2&2\\-1&2&2\\-1&1&3\end{pmatrix}\qquad \mathbf{2}.\ A=\begin{pmatrix}-6&5&3\\-8&7&4\\-2&1&1\end{pmatrix}$$

Correction.

1. On calcule le polynôme caractéristique de A qui est $(X-2)^2(X-1)$. On cherche ensuite un vecteur propre pour la valeur propre 1. On trouve $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$. La fonction $t\mapsto e^t\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ est donc une solution. Malheureusement, si on calcule $A-2I$, on obtient que la matrice est de rang 2, et donc le sous-espace propre associé à 2 est de dimension 1 : la matrice n'est pas diagonalisable ! On applique alors la méthode des coefficients indéterminés pour obtenir l'espace vectoriel de dimension 2 des solutions associé à cette valeur propre. Autrement dit,

on cherche les conditions sur a, b, c, d, e, f pour que la fonction

$$X(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} at + b \\ ct + d \\ et + f \end{pmatrix}$$

soit solution de $X'(t) = AX(t)$. Ceci est équivalent à

$$\begin{pmatrix} 2at + (a + 2b) \\ 2ct + (c + 2d) \\ 2et + (e + 2f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(c + e)t + 2(d + f) \\ (-a + 2c + 2e)t + (-b + 2d + 2f) \\ (-a + c + 3e)t + (-b + d + 3f) \end{pmatrix}$$

On identifie d'abord les termes de degré 1. On trouve le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a & = & c + e \\ 2c & = & -a + 2c + 2e \\ 2e & = & -a + c + 3e \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a - c - e & = & 0 \\ a - 2e & = & 0 \\ a - c - e & = & 0 \end{array} \right.$$

La première et la troisième ligne sont identiques. On trouve donc

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 2e \\ c & = & e \\ e & = & e \end{array} \right.$$

On identifie ensuite les termes constants. On trouve :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a + 2b & = & 2(d + f) \\ c + 2d & = & -b + 2d + 2f \\ e + 2f & = & -b + d + 3f \end{array} \right.$$

On remplace a et c par leur valeur en fonction de e (qui est un paramètre), puis on simplifie. Deux équations sont identiques et on trouve que le système précédent est équivalent à :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -b + 2c + 2f & = & e \\ -b + 2f & = & e \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} b & = & 2d - e \\ d & = & d \\ f & = & d \end{array} \right.$$

Ainsi, la solution générale de l'équation est

$$\lambda e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} 2et + 2d - e \\ et + d \\ et + d \end{pmatrix},$$

λ, d et e étant des paramètres réels.

2. Le polynôme caractéristique de A est $X(X - 1)^2$. On peut vérifier que $A(A - I) \neq 0$, et donc que le polynôme minimal de A est $X(X - 1)^2$. La matrice A n'est pas diagonalisable. On recherche ensuite la valeur propre 0. Un vecteur propre associé est $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et donc la fonction $t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ est une solution. On étudie ensuite la valeur propre 2 en appliquant la

méthode des coefficients indéterminés. On pose $X(t) = \begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \\ et+f \end{pmatrix} e^t$ et on étudie à quelle condition $X'(t) = AX(t)$, c'est à dire :

$$\begin{cases} at + (a+b) &= (-6a+5c+3e)t + (-6b+5d+3f) \\ ct + (c+d) &= (-8a+7c+4e)t + (-8b+7d+4f) \\ et + (e+f) &= (-2a+c+e)t + (-2b+d+f) \end{cases}$$

On peut alors résoudre ce système (en fait, exprimer tous les paramètres en fonction de 2). On peut aussi utiliser la méthode suivante. On cherche une solution sous la forme

$$X(t) = e^t(tV_2 + V_1).$$

On a $X'(t) = AX(t)$ si et seulement si

$$\begin{cases} AV_2 &= V_2 \\ AV_1 &= V_1 + V_2 \end{cases} \iff \begin{cases} V_2 &= (A-I)V_1 \\ (A-I)^2V_1 &= 0 \end{cases}$$

On cherche alors l'expression d'un élément V_1 de $\ker(A-I)^2$. Il est facile de vérifier que le noyau de $(A-I)^2$ est le plan d'équation $3X - 2Y - Z = 0$, dont une base est constituée des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. V_1 s'écrit donc

$$V_1 = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

avec λ, μ des réels. On en déduit

$$V_2 = (A-I)V_1 = (\lambda + 2\mu) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Finalement, les solutions s'écrivent donc

$$\nu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} \lambda+\mu \\ \lambda \\ \lambda+3\mu \end{pmatrix} + (\lambda+2\mu)te^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 20.

Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. Calculer $\exp(A)$. En déduire la solution générale du sytème $X' = AX$.

Correction.

Introduisons

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est facile de remarquer que

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $B^n = 0$ pour $n \geq 3$. De plus, $A = (aI_3 + bB + cB^2)$. Puisque I_3, B et B^2 commutent, on a

$$\exp(A) = \exp(a)\exp(bB)\exp(cB^2).$$

Or, utilisant que $B^n = 0$ pour $n \geq 3$, on trouve

$$\begin{aligned} \exp(bB) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(bB)^n}{n!} \\ &= I_3 + bB + \frac{b^2B^2}{2}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \exp(cB^2) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(cB^2)^n}{n!} \\ &= I_3 + cB^2. \end{aligned}$$

Il vient

$$\begin{aligned} \exp(A) &= e^a \left(I_3 + bB + \frac{b^2B^2}{2} \right) (I_3 + cB^2) \\ &= e^a \left(I_3 + bB + \left(\frac{b^2}{2} + c \right) B^2 \right) \end{aligned}$$

soit

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} e^a & be^a & \left(\frac{b^2}{2} + c\right) e^a \\ 0 & e^a & be^a \\ 0 & 0 & e^a \end{pmatrix}.$$

La solution générale de $X' = AX$ est alors donnée par $X(t) = \exp(tA)X(0)$, soit, en posant $X(0) = (\alpha, \beta, \gamma)$

$$X(t) = \alpha e^{at} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^{at} \begin{pmatrix} bt \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma e^{at} \begin{pmatrix} ct + \frac{b^2t^2}{2} \\ bt \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 21.

Résoudre les systèmes différentiels suivants :

1. $\left\{\begin{array}{lcl} x_1'(t) & = & 6x_1(t)+3x_2(t)-3t+4e^{3t} \\ x_2'(t) & = & -4x_1(t)-x_2(t)+4t-4e^{3t} \end{array}\right.$ **2.** $\left\{\begin{array}{lcl} x_1'(t) & = & x_1(t)+2x_2(t)+t \\ x_2'(t) & = & -4x_1(t)-3x_2(t). \end{array}\right.$

On donnera les solutions réelles.

Correction.

1. Soit $A=\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice du système. Ses valeurs propres sont 2 et 3, avec vecteurs propres respectifs $(-3,4)$ et $(4,-4)$. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la nouvelle base, c'est-à-dire

$$P=\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix},\ P^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soit $Y(t)=\binom{y_1(t)}{y_2(t)}$ tel que $X(t)=PY(t)$. Le système se réécrit alors en

$$PY(t)=APY(t)+B(t) \iff Y(t)=P^{-1}APY(t)+P^{-1}B(t),$$

où $B(t)=\binom{-3t+4e^{3t}}{4t-4e^{3t}}$. Ainsi, on obtient le système différentiel diagonal suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1'(t) & = & 2y_1(t)+t \\ y_2'(t) & = & 3y_2(t)+e^{3t}. \end{array}\right.$$

Il est désormais facile de résoudre séparément chacune des équations différentielles séparément, en cherchant notamment une solution particulière sous la forme d'une exponentielle-polynôme. On trouve alors que

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1(t) & = & \lambda e^{2t}-\frac{t}{2}-\frac{1}{4} \\ y_2(t) & = & \mu e^{3t}+te^{3t} \end{array}\right.$$

Revenant à $X(t)$, on trouve que les solutions du système différentiel initial sont les fonctions

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1(t) & = & -3\lambda e^{2t}+4\mu e^{3t}+\frac{3t}{2}+\frac{3}{4}+4te^{3t} \\ x_2(t) & = & 4\lambda e^{2t}-4\mu e^{3t}-2t-1-4te^{3t}. \end{array}\right.$$

2. La méthode est similaire, mais cette fois la matrice n'est diagonalisable que sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$. On pose donc $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ la matrice du système. Ses valeurs propres sont $-1+2i$ et $-1-2i$, avec vecteurs propres respectifs $(1-i,2i)$ et $(1+i,-2i)$. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la nouvelle base, c'est-à-dire

$$P=\begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ 2i & -2i \end{pmatrix},\ P^{-1}=\frac{i}{4}\begin{pmatrix} -2i & -1-i \\ -2i & 1-i \end{pmatrix}.$$

Soit $Y(t)=\binom{y_1(t)}{y_2(t)}$ tel que $X(t)=PY(t)$. Le système se réécrit alors en

$$PY(t)=APY(t)+B(t) \iff Y(t)=P^{-1}APY(t)+P^{-1}B(t),$$

où $B(t) = \binom{t}{0}$. Ainsi, on obtient le système différentiel diagonal suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1'(t) & = & (-1+2i)y_1(t) + t/2 \\ y_2'(t) & = & (-1-2i)y_2(t) + t/2. \end{array}\right.$$

Ses solutions (complexes) sont

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1(t) & = & c_1 e^{(-1+2i)t} + \frac{t}{10} + \frac{3}{50} + \frac{it}{5} - \frac{2i}{25} \\ y_2(t) & = & c_1 e^{(-1-2i)t} + \frac{t}{10} + \frac{3}{50} - \frac{it}{5} + \frac{2i}{25} \end{array}\right.$$

avec $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Si on revient à x_1 et x_2, et en remplaçant $e^{(-1+2i)t}$ par $e^{-t}(\cos(2t)+i\sin(2t))$, on trouve

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1(t) & = & \big((c_1+c_2) - i(c_1-c_2)\big)e^{-t}\cos(2t) + \big(i(c_1-c_2) + (c_1+c_2)\big)e^{-t}\sin(2t) + \frac{3t}{5} - \frac{1}{25} \\ x_2(t) & = & 2i(c_1-c_2)e^{-t}\cos(2t) - 2(c_1+c_2)e^{-t}\sin(2t) - \frac{4t}{5} + \frac{8}{25}. \end{array}\right.$$

On pose $\lambda = c_1 + c_2$ et $\mu = i(c_1 - c_2)$. Le couple (λ, μ) parcourt $\mathbb{C}^2$ lorsque (c_1, c_2) parcourt $\mathbb{C}^2$, et les solutions complexes du système sont

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1(t) & = & (\lambda-\mu)e^{-t}\cos(2t) + (\lambda+\mu)e^{-t}\sin(2t) + \frac{3t}{5} - \frac{1}{25} \\ x_2(t) & = & 2\mu e^{-t}\cos(2t) - 2\lambda e^{-t}\sin(2t) - \frac{4t}{5} + \frac{8}{25}. \end{array}\right.$$

Pour obtenir les solutions réelles, il suffit de prendre λ, μ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 22.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice complexe. Montrer que toutes les solutions du système $X'(t) = AX(t)$ tendent vers 0 en $+\infty$ si et seulement si les valeurs propres de A sont toutes de partie réelle strictement négative.

Correction.

On peut réduire la matrice A sur $\mathbb{C}$. Il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ est égale à l'une des deux matrices suivantes :

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ ou } T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Posant $Y(t) = P^{-1}X(t)$, le système est équivalent à

$$PY'(t) = APY(t) \iff Y'(t) = TY(t).$$

Toutes les normes sur $\mathbb{C}^2$ étant équivalentes, il suffit de vérifier que les lignes de $Y(t)$ sont toujours bornées.

— Dans le premier cas (A diagonalisable), les solutions sont les fonctions de la forme

$$y_1(t) = C_1 e^{\lambda t} \text{ et } y_2(t) = C_2 e^{\mu t}.$$

Ces deux fonctions tendent toujours vers 0 en $+\infty$ si et seulement si $\Re e(\lambda) < 0$ et $\Re e(\mu) < 0$.

— Dans le second cas (A trigonalisable), les solutions sont de la forme

$$y_1(t) = e^{\lambda t}(C_1 + tC_2) \text{ et } y_2(t) = C_2 e^{\lambda t}.$$

Par comparaison des fonctions exponentielles et des polynômes, ceci tend toujours vers 0 en $+\infty$ si et seulement si $\Re e(\lambda) < 0$.

Exercice 23.

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Démontrer l'équivalence de

1. A est antisymétrique ;
2. toutes les solutions de l'équation $X' = AX$ sont de norme constante.

Correction.

On va noter M^T la transposée d'une matrice. La norme de X (au carré) est donnée par $Y(t) = X(t)^T X(t)$. On cherche une condition sur A pour que, pour toute solution X, la dérivée de Y est constante. Or,

$$Y'(t) = X'(t)^T X(t) + X(t)^T X'(t) = X(t)^T (A^T + A) X(t).$$

Ainsi, si A est antisymétrique, on a bien $Y'(t) = 0$ et les solutions sont de norme constante. Réciproquement, si les solutions sont toutes de norme constante, on sait que, quelque soit le choix de $X(0) \in \mathbb{R}$, on a

$$X(0)^T (A^T + A) X(0) = 0.$$

Par suite, si $X(0)$ est un vecteur propre de l'endomorphisme symétrique $A^T + A$, associé à la valeur propre λ, on a

$$\lambda \|X(0)\|^2 = 0,$$

et donc $\lambda = 0$. Donc la seule valeur propre de $A^T + A$ est 0. Cet endomorphisme étant symétrique, donc diagonalisable, on en déduit qu'il est nul et que $A^T = -A$, c'est-à-dire que A est antisymétrique.