Feuille d'exercices n°23

Partie A

Equations différentielles d'ordre 2

Exercice 1.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 2y' + y = x$, $y(0) = y'(0) = 0$;
2. $y'' + 9y = x + 1$, $y(0) = 0$;
3. $y'' - 2y' + y = \sin^2 x$;

Exercice 2.

Déterminer une équation différentielle vérifiée par la famille de fonctions

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3.

On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$x^2 y"{-}3xy' + 4y = 0.\ (E)$$

1. Analyse. Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $z(t) = y(e^t)$.
   (a) Calculer pour $t \in \mathbb{R}$, $z'(t)$ et $z''(t)$.
   (b) En déduire que z vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants que l'on précisera (on pourra poser $x = e^t$ dans (E)).
   (c) Résoudre l'équation différentielle trouvée à la question précédente.
   (d) En déduire le "portrait robot" de y.
2. Synthèse. Vérifier que, réciproquement, les fonctions trouvées à la fin de l'analyse sont bien toutes les solutions de (E) et conclure.

Exercice 4.

Rechercher les fonctions polynômes solutions de

$$(x^2 - 3)y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

En déduire toutes les solutions de cette équation sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.

On considère l'équation différentielle notée (E) :

$$(t^2+t)x''+(t-1)x'-x=0.$$

1. Déterminer les solutions polynômiales de (E).
2. En déduire toutes les solutions de (E) sur $]1,+\infty[$.
3. Reprendre le même exercice avec

$$x^2y''-3xy'+4y=x^3$$

dont on déterminera les solutions sur $]0,+\infty[$. On cherchera d'abord les solutions polynômiales de l'équation homogène !

Exercice 6.

On considère l'équation différentielle

$$xy''-y'+4x^3y=0 \qquad (E)$$

dont on se propose de déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$.

1. Question préliminaire : soient a,b,c,d 4 réels et $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ll} a\cos(x^2)+b\sin(x^2) & \text{si } x>0\\ c\cos(x^2)+d\sin(x^2) & \text{si } x<0\end{array}\right.$$

A quelle condition sur a,b,c,d la fonction f se prolonge-t-elle en une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$? On recherche les solutions de (E) qui sont développables en série entière au voisinage de 0. On note $x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ une telle solution, lorsqu'elle existe, et on désigne par R son rayon de convergence.
2. Montrer qu'il existe une relation de récurrence, que l'on explicitera, entre a_{n+4} et a_n.
3. Pour $p\in\mathbb{N}$, déterminer a_{4p+1} et a_{4p+3}.
4. Pour $p\in\mathbb{N}$, déterminer a_{4p} en fonction de a_0 et de p (respectivement a_{4p+2} en fonction de a_2 et p).
5. Quel est le rayon de la série entière obtenue ? Exprimer la comme combinaison linéaire de deux fonctions "classiques".
6. Soit S le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont solutions de (E) sur $\mathbb{R}$. Préciser une base de S.

Exercice 7.

Pour les équations différentielles suivantes :

1. Chercher les solutions développables en séries entières
2. Résoudre complètement l'équation sur un intervalle bien choisi par la méthode du wronskien
3. Résoudre l'équation sur $\mathbb{R}$.

1. $xy''+2y'-xy=0$ **2**. $x(x-1)y''+3xy'+y=0$.

Exercice 8.

a et b étant deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, on considère (E) l'équation différentielle

$$x^2y'' + a(x)y' + b(x)y = 0.$$

On note S^+ l'espace vectoriel des fonctions de classe C^2 solutions de (E) sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ et S^- l'espace vectoriel des fonctions de classe C^2 solutions de (E) sur l'intervalle $J =]-\infty, 0[$, et on note S l'espace vectoriel des fonctions de classe C^2 solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ tout entier. L'objectif de l'exercice est d'étudier les valeurs possibles pour la dimension de S.

1. Rappeler la dimension de S^+ et de S^-.
2. On note φ l'application linéaire de S vers $S^+ \times S^-$ définie par $\varphi(f) = (f_{|I}, f_{|J})$. Donner le noyau de φ. En déduire que $\dim S \leq 4$.
3. Dans cette question, on suppose que $a(x) = x$ et que $b(x) = 0$, d'où (E) est l'équation $x^2y'' + xy' = 0$. Déterminer S^+ et S^-. En déduire ensuite S et sa dimension.
4. Dans cette question, (E) est l'équation $x^2y'' - 6xy' + 12y = 0$. Déterminer deux solutions sur I de la forme $x \mapsto x^\alpha$ (α réel). En déduire S^+ puis S^-. En déduire S et sa dimension.
5. En s'inspirant de la question précédente, donner un exemple d'équation différentielle du type $x^2y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ tel que $\dim S = 0$.

Exercice 9.

Soit (E) l'équation différentielle

$$2xy'' - y' + x^2y = 0.$$

1. Trouver les solutions développables en série entière en 0. On les exprimera à l'aide de fonctions classiques.
2. A l'aide d'un changement de variables, résoudre l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
3. En déduire toutes les solutions sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10.

Soit E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des applications de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On définit $\phi : E \to E$ par

$$\begin{aligned} \phi(f) : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto f'(t) + tf(t). \end{aligned}$$

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de ϕ.
2. Faire de même pour ϕ^2.
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle

$$y'' + 2xy' + (x^2 + 3)y = 0.$$

Partie B

Continuité des fonctions à plusieurs variables

Exercice 11.

1. Montrer que si x et y sont des réels, on a :
$$2|xy| \leq x^2 + y^2$$
2. Soit f l'application de $A = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$f(x,y) = \frac{3x^2 + xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$
Montrer que, pour tout (x,y) de A, on a :
$$|f(x,y)| \leq 4\|(x,y)\|_2,$$
où $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$. En déduire que f admet une limite en $(0,0)$.

Exercice 12.

Les fonctions suivantes ont-elles une limite en $(0,0)$?

1. $f(x,y) = (x+y)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$
2. $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
3. $f(x,y) = \frac{|x+y|}{x^2+y^2}$

Exercice 13.

Les fonctions suivantes ont-elles une limite en l'origine ?

1. $f(x,y,z) = \dfrac{xy+yz}{x^2+2y^2+3z^2}$;
2. $f(x,y) = \left(\dfrac{x^2+y^2-1}{x}\sin x, \dfrac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.
3. $f(x,y) = \dfrac{1-\cos(xy)}{xy^2}$.

Exercice 14.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } f(0,0) = 0.$$

La fonction f est-elle continue en (0,0) ?