

# Chapitre I

## Introduction aux Nombres Complexes

### Table des matières

<b>Partie A : Nombres complexes : la forme algébrique</b>	<b>2</b>
1. L'ensemble des nombres complexes . . . . .	2
2. Forme algébrique d'un nombre complexe . . . . .	2
3. Opérations et forme algébrique . . . . .	4
4. Conjugué d'un nombre complexe . . . . .	6
<b>Partie B : Nombres complexes et géométrie</b>	<b>12</b>
1. Affixe d'un point ou d'un vecteur . . . . .	12
2. Module d'un nombre complexe . . . . .	14
3. Argument d'un nombre complexe . . . . .	18
<b>Partie C : Nombres complexes et trigonométrie</b>	<b>21</b>
1. Forme trigonométrique . . . . .	21

## Partie A

### Nombres complexes : la forme algébrique

#### 1. L'ensemble des nombres complexes

On admet que l'on peut construire l'ensemble décrit dans le théorème suivant :

##### Théorème 1.

Il existe un ensemble noté  $\mathbb{C}$  et appelé **ensemble des nombres complexes** qui contient l'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels et qui vérifie les propriétés suivantes :

- les opérations d'addition et de multiplication de  $\mathbb{R}$  se prolongent sur  $\mathbb{C}$  et conservent leurs propriétés algébriques (*ex : commutativité, éléments neutres, distributivité, ...*)
- $\mathbb{C}$  possède un nombre noté  $i$  qui vérifie  $i^2 = -1$ .
- tout élément  $z$  de  $\mathbb{C}$  s'écrit de manière **unique**  $z = a + ib$  où  $(a, b)$  est un couple de nombres réels.

##### Proposition 1.

Le nombre complexe  $i$  n'est pas un nombre réel.

##### Démonstration.

On suppose par l'absurde que  $i$  appartient à  $\mathbb{R}$ .  
Comme tout nombre réel au carré est positif, on obtient :

$$-1 = i^2 \geq 0$$

Contradiction !

Il en résulte que  $i$  n'est pas un nombre réel. □

#### 2. Forme algébrique d'un nombre complexe

##### Définition 1.

Soit  $z$  un nombre complexe.

On appelle **forme algébrique** de  $z$  son écriture sous la forme  $z = a + ib$  décrite dans le théorème précédent.

Le nombre  $a$  est appelé **partie réelle** de  $z$  et on le note  $\operatorname{Re}(z)$ .

Le nombre  $b$  est appelé **partie imaginaire** de  $z$  et on le note  $\operatorname{Im}(z)$ .

**Exemple 1.**

- le nombre  $5 + 2i$  a pour partie réelle 5 et partie imaginaire 2
- le nombre  $3 - 2i$  a pour partie réelle 3 et partie imaginaire  $-2$
- $0 = 0 + 0i$ ;  $1 = 1 + 0i$ ;  $i = 0 + 1i$ .

**Exercice 1.**

Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants et donner leurs parties réelles et imaginaires :

1.  $a$  puis  $ai$  pour  $a \in \mathbb{R}$ ;
2.  $2 + \pi i$ ;  $-1 + i$ ;  $7 - i$ ;
3.  $z + z'$ ;  $z \times z'$ ;  $z^2$  pour  $z = 2 + 2i$  et  $z' = 5 - 3i$

**Correction.**

1. On a  $a = a + 0i$  donc  $\operatorname{Re}(a) = a$  et  $\operatorname{Im}(a) = 0$ ;  
on a  $ai = 0 + ai$  donc  $\operatorname{Re}(ai) = 0$  et  $\operatorname{Im}(ai) = a$
2.  $2 + \pi i$  est déjà sous forme algébrique donc  $\operatorname{Re}(2 + \pi i) = 2$  et  $\operatorname{Im}(2 + \pi i) = \pi$ ;  
 $-1 + i = -1 + 1i$  donc  $\operatorname{Re}(-1 + i) = -1$  et  $\operatorname{Im}(-1 + i) = 1$ ;  
 $7 - i = 7 + (-1)i$  donc  $\operatorname{Re}(7 - i) = 7$  et  $\operatorname{Im}(7 - i) = -1$ ;
3.  $z + z' = (2 + 2i) + (5 - 3i) = (2 + 5) + (2 - 3)i = 7 - i$ ;  
 $z \times z' = (2 + 2i)(5 - 3i) = 2 \times 5 - 2 \times 3i + 2i \times 5 - 2i \times 3i$ ;  
 $z^2$  pour  $z = 2 + 2i$  et  $z' = 5 - 3i$

**Définition 2.**

Soit  $z = a + ib$  un nombre complexe.  
Si  $a = 0$ , on dit que  $z$  est un *imaginaire pur*.

**Exemple 2.**

$2i$ ,  $\pi i$ ,  $i$  et  $-i$  sont des imaginaires purs alors que  $3 + 2i$  et  $5$  ne le sont pas.

**Remarque 1.**

Si  $b = 0$ , alors  $z = a$  est un nombre réel.

**Proposition 2.**

Soit  $z$  un nombre complexe. Alors on a  $z = 0$  si, et seulement si,  $\operatorname{Re}(z) = 0$  et  $\operatorname{Im}(z) = 0$ .

Démonstration.

On a noté  $a = \operatorname{Re}(z)$  et  $b = \operatorname{Im}(z)$ ; alors  $z = a + ib$ .

— ( $\Rightarrow$ ) On suppose  $z = 0$ .

Supposons par l'absurde que  $a$  et  $b$  sont non tous nuls.

1<sup>er</sup> cas :  $b = 0$ . Alors  $a = z = 0$ . Contradiction,  $a$  et  $b$  sont non tous nuls

2<sup>ème</sup> cas :  $b \neq 0$ . Comme  $a + ib = 0$ , on a  $i = -\frac{b}{a}$ . Comme  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $i = -\frac{b}{a} \in \mathbb{R}$ .

Contradiction car  $i$  n'appartient pas à  $\mathbb{R}$ .

Dans tous les cas, on aboutit à une contradiction. Par suite,  $a$  et  $b$  sont tous les deux nuls.

— ( $\Leftarrow$ ) On suppose  $a = 0$  et  $b = 0$ . Alors  $z = 0 + i0 = 0$

□

Exercice 2.

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on note  $z = (x^3 + 3x^2 - 4x) + i(|x - 2| - 1)$ . Déterminer les valeurs de  $x$  (si elles existent) pour lesquelles  $z = 0$ .

Correction.

On a  $z = 0$  si, et seulement si,  $x$  vérifie  $x^3 + 3x^2 - 4x = 0$  et  $|x - 2| - 1 = 0$ . Résolvons ces deux équations :

On a  $x^3 + 3x^2 - 4x = x(x^2 + 3x - 4) = x(x - 1)(x + 4)$  donc la première équation a pour solutions  $x = 0$ ,  $x = 1$  et  $x = 4$ .

La deuxième équation s'écrit  $|x - 2| = 1$ . Si  $x \geq 2$ , elle devient  $x - 2 = 1$  et donc  $x = 3$ . Et si  $x < 2$ , elle devient  $2 - x = 1$  et donc  $x = 1$ . Les solutions de la deuxième équation sont donc  $x = 1$  et  $x = 3$ .

Ainsi, les deux équations sont vérifiées simultanément si, et seulement si  $x = 0$ . Et donc  $z = 0$  si, et seulement si,  $x = 0$ .

### 3. Opérations et forme algébrique

#### a. Opérations usuelles

Proposition 3.

Soit  $z = a + ib$  et  $z' = a' + ib'$  des nombres complexes et  $\alpha$  un nombre réel. Les égalités suivantes décrivent la forme algébrique des nombres complexes suivants :

—  $z + z' = (a + a') + i(b + b')$

—  $z - z' = (a - a') + i(b - b')$

—  $\alpha z = (\alpha a') + i(\alpha b')$

—  $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$

Correction.

Il s'agit d'utiliser les propriétés usuelles de distributivité, d'associativité de commutativité de  $\mathbb{R}$  qui ont cours également dans  $\mathbb{C}$  et le fait que  $i^2 = -1$ .

**Corollaire 1.**

Soit  $z, z' \in \mathbb{C}$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On a :

- $\operatorname{Re}(z + z') = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(z')$  et  $\operatorname{Im}(z + z') = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(z')$
- $\operatorname{Re}(z - z') = \operatorname{Re}(z) - \operatorname{Re}(z')$  et  $\operatorname{Im}(z - z') = \operatorname{Im}(z) - \operatorname{Im}(z')$
- $\operatorname{Re}(\alpha z) = \alpha \operatorname{Re}(z)$  et  $\operatorname{Im}(\alpha z) = \alpha \operatorname{Im}(z)$
- $\operatorname{Re}(zz') = \operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(z') - \operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(z')$  et  $\operatorname{Im}(zz') = \operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z') + \operatorname{Re}(z')\operatorname{Im}(z)$

**Proposition 4.**

Soit  $z, z'$  des nombres complexes. On a  $z = z'$  si, et seulement si,  $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z')$  et  $\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z')$ .

Démonstration.

On a  $z = z'$  si, et seulement si,  $z - z' = 0$  et donc, d'après la proposition 2, si, et seulement si,  $\operatorname{Re}(z - z') = 0$  et  $\operatorname{Im}(z - z') = 0$ . Or d'après les propriétés des parties réelles et imaginaires,  $\operatorname{Re}(z - z') = \operatorname{Re}(z) - \operatorname{Re}(z')$  et  $\operatorname{Im}(z - z') = \operatorname{Im}(z) - \operatorname{Im}(z')$  ; donc  $z = z'$  si, et seulement si,  $\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Re}(z') = 0$  et  $\operatorname{Im}(z) - \operatorname{Im}(z') = 0$  et finalement :  $z = z'$  si, et seulement si,  $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z')$  et  $\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z')$ . □

**Exercice 3.**

Résoudre l'équation d'inconnue  $z$  dans  $\mathbb{C}$  :

$$z^2 = i$$

Correction.

On écrit  $z = a + ib$ , alors l'équation  $z^2 = 0 + 1i$  est équivalente au système  $\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 1 \end{cases}$ .

Par suite,  $a^2 = b^2$  et donc  $b = a$  ou  $b = -a$ .

Si  $b = a$ , on obtient par substitution  $a^2 = \frac{1}{2}$  et donc  $a = b = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$  et ainsi  $z = \pm(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i)$

Si  $b = -a$ , on obtient par substitution  $a^2 = -\frac{1}{2}$  ce qui est impossible dans  $\mathbb{R}$ .

Ainsi, les deux solutions (on vérifie réciproquement qu'elles le sont bien) sont  $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$  et  $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ .

#### Exercice 4.

Faire les exercices 1 à 13 p18

#### Exercice 5.

Faire l'exercice 30 p20

### b. Inverse d'un nombre complexe

#### Définition 3.

Soit  $z \in \mathbb{C}$ . On dit que  $z$  admet une *inverse* dans  $\mathbb{C}$  s'il existe  $z' \in \mathbb{C}$  tel que  $zz' = 1$ .

On démontrera dans le paragraphe dédié au conjugué la formule suivante qui donne la forme algébrique du quotient d'un nombre complexe :

#### Proposition-Notation 5.

Soit  $z$  un complexe **non nul**. Alors  $z$  admet une unique inverse dans  $\mathbb{C}$  que l'on note  $\frac{1}{z}$ .  
De plus, si  $z = a + ib$ , la forme algébrique de son inverse est :

$$\frac{a}{a^2 + b^2} + i \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

## 4. Conjugué d'un nombre complexe

### a. Définition

#### Définition 4.

Soit  $z$  un nombre complexe de forme algébrique  $z = a + ib$ . On appelle *conjugué* de  $z$  et on note  $\bar{z}$  le nombre complexe

$$\bar{z} = a - ib$$

Autrement dit  $\bar{z}$  est le nombre complexe possédant la même partie réelle que  $z$  et une partie imaginaire opposée à celle de  $z$ .

#### Exemple 3.

- $5 + 3i$  a pour conjugué  $5 - 3i$  i.e.  $\overline{5 + 3i} = 5 - 3i$  ;
- $-6i$  a pour conjugué  $6i$  i.e.  $\overline{-6i} = 6i$  ;
- $45$  a pour conjugué  $45$  i.e.  $\overline{45} = 45$  ;

## b. Propriétés du conjugué

### Proposition 6. Conjugué et opérations

Soit  $z, z'$  des nombres complexes et  $n$  un entier naturel. On a :

- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{zz'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$
- $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$
- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$  si  $z \neq 0$

#### Démonstration.

On note  $z = a + ib$  et  $z' = a' + ib'$  les formes algébriques de  $z, z'$ .

- On a :

$$\begin{aligned} \overline{z + z'} &= \overline{(a + a') + i(b + b')} \\ &= (a + a') - i(b + b') \\ &= (a - ib) + (a' - ib') \\ \overline{z + z'} &= \overline{z} + \overline{z'} \end{aligned}$$

- On a :

$$\begin{aligned} \overline{zz'} &= \overline{(aa' - bb') + i(ab' + ba')} \\ &= (aa' - bb') - i(ab' + ba') \\ &= (a - ib)(a' - ib') \\ \overline{zz'} &= \overline{z} \cdot \overline{z'} \end{aligned}$$

- On démontre, par récurrence sur  $\mathbb{N}$ , que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$ .

— **Initialisation :**

Par convention, tout nombre complexe élevé à la puissance 0 vaut 1, d'où :

$$\overline{z^0} = \overline{1} = 1 \text{ et } (\overline{z})^0 = 1$$

donc  $\overline{z^0} = (\overline{z})^0$

Ainsi, la propriété est vérifiée au rang  $n = 0$ .

— **Hérédité :** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose  $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$ . Montrons que  $\overline{z^{n+1}} = (\overline{z})^{n+1}$

On a :

$$\begin{aligned} \overline{z^{n+1}} &= \overline{zz^n} \\ &= \overline{z} \cdot \overline{z^n} \text{ d'après le point précédent} \\ &= \overline{z} \cdot (\overline{z})^n \text{ par H.R.} \\ \overline{z^{n+1}} &= (\overline{z})^{n+1} \end{aligned}$$

Ce qui achève le raisonnement par récurrence.

Il en résulte que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$ .

- On suppose  $z \neq 0$ . On a, d'après la formule du conjugué d'un produit :

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} \cdot \overline{z} = \frac{1}{z} \cdot z = \overline{1} = 1$$

Par suite,  $\overline{z}$  est inversible d'inverse  $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$ . Par unicité de l'inverse, on a alors :

$$\frac{1}{\overline{z}} = \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}.$$

□

**Proposition 7.**

Soit  $z$  un nombre complexe. Alors :

- $z$  est réel si, et seulement si,  $\bar{z} = z$  ;
- $z$  est imaginaire pur si, et seulement si,  $\bar{z} = -z$  ;

**Démonstration.**

Soit  $z$  un nombre complexe de forme algébrique  $a + ib$ .

- ( $\Rightarrow$ ) On suppose que  $z \in \mathbb{R}$ . Alors  $b = 0$  et  $z = a$ . Donc on a :

$$\bar{z} = a - ib = a - i \times 0 = a = z.$$

- ( $\Leftarrow$ ) On suppose que  $\bar{z} = z$ . Alors  $a - ib = a + ib$  d'où  $(2i)b = 0$ . Si un produit dans  $\mathbb{C}$  est nul alors un des facteurs est nul (propriété qui généralise celle connue sur  $\mathbb{R}$ ) ; or  $2i \neq 0$ , donc  $b = 0$  et ainsi  $z = a \in \mathbb{R}$ .

- ( $\Rightarrow$ ) On suppose que  $z$  imaginaire pur. Alors  $b = 0$  et  $z = -ib$ . Donc on a :

$$\bar{z} = a - ib = 0 - ib = -ib = -z.$$

- ( $\Leftarrow$ ) On suppose que  $\bar{z} = -z$ . Alors  $a - ib = -a - ib$  d'où  $2a = 0$ . Si un produit dans  $\mathbb{R}$  est nul alors un des facteurs est nul ; or  $2 \neq 0$ , donc  $a = 0$  et ainsi  $z = ib$  est imaginaire pur.

□

**Proposition 8.** *Propriétés du conjugué*

Soit  $z$  un nombre complexe. On a :

- $\overline{\bar{z}} = z$
- $z\bar{z} = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2$
- $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$
- $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$
- $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}$  si  $z \neq 0$

**Démonstration.**

Soit  $z$  un nombre complexe de forme algébrique  $z = a + ib$ .

- On a :

$$\begin{aligned} \overline{\bar{z}} &= \overline{a - ib} \\ &= a + ib \\ \overline{\bar{z}} &= z \end{aligned}$$

- On a :

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= (a + ib)(a - ib) \\ &= a^2 - (ib)^2 = a^2 - (-1)b^2 = a^2 + b^2 \\ z\bar{z} &= \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2 \end{aligned}$$



- On a :

$$\begin{aligned} z + \bar{z} &= (a + ib) + (a - ib) \\ &= 2a \\ z + \bar{z} &= 2\operatorname{Re}(z) \end{aligned}$$

- On a :

$$\begin{aligned} z - \bar{z} &= (a + ib) - (a - ib) \\ &= 2ib \\ z - \bar{z} &= 2i\operatorname{Im}(z) \end{aligned}$$

- On suppose  $z \neq 0$ . Alors  $\bar{z} \neq 0$  et on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} \\ \frac{1}{z} &= \frac{\bar{z}}{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} \end{aligned}$$

□

### Méthode pour obtenir la forme algébrique d'une fraction :

Soit  $z = a + ib \in \mathbb{C}$  avec  $z \neq 0$ . Pour obtenir la forme algébrique de  $\frac{1}{z}$ , on multiplie le dénominateur et le numérateur par  $\bar{z} = a - ib$ .

### c. Exercices

#### **Exercice 6.** Basiques

1. *Conjugué* : 14,16,17,18 p19
2. *Quotient* : 23,28 p19

#### **Exercice 7.** Classiques

1. Déterminer les nombres  $z \in \mathbb{C}$  tels que  $2z - \bar{z}^2$  est réel.
2. Résoudre l'équation  $z + 5i = iz + 3$ .
3. Résoudre l'équation  $z + 5i = i\bar{z} + 3$ .

#### Correction.

- 1.

**Méthode :** on peut procéder de deux manières,

- soit en utilisant que  $\omega \in \mathbb{R}$  si, et seulement si,  $\bar{\omega} = \omega$  ;
- soit en utilisant  $\omega \in \mathbb{R}$  si, et seulement si,  $\operatorname{Im}(\omega) = 0$ .

Explicitons la première méthode :

Soit  $z \in \mathbb{C}$ . On a  $2z - \bar{z}^2 \in \mathbb{R}$  si, et seulement si,  $2z - \bar{z}^2 = \overline{2z - \bar{z}^2}$ . Or,

$$\begin{aligned}\overline{2z - \bar{z}^2} &= \overline{2z} - \overline{\bar{z}^2} \\ &= 2\bar{z} - z^2\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}2z - \bar{z}^2 &= \overline{2z - \bar{z}^2} \\ \Leftrightarrow 2z - \bar{z}^2 &= 2\bar{z} - z^2 \\ \Leftrightarrow 2(z - \bar{z}) + \underbrace{z^2 - \bar{z}^2}_{(z - \bar{z})(z + \bar{z})} &= 0 \\ \Leftrightarrow (z - \bar{z})(2 + z + \bar{z}) &= 0 \\ \Leftrightarrow z - \bar{z} = 0 \text{ ou } 2 + z + \bar{z} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2i\text{Im}(z) = 0 \text{ ou } 2\text{Re}(z) = -2 \\ \Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0 \text{ ou } \text{Re}(z) = -1\end{aligned}$$

Par suite,  $2z - \bar{z}^2 \in \mathbb{R}$  si, et seulement si,  $z \in \mathbb{R} \cup \{-1 + ib \mid b \in \mathbb{R}\}$

2.

**Méthode :** pour une équation faisant intervenir seulement  $z$  à la puissance 1 (équation polynomiale de degré 1), on peut procéder de deux manières,

- soit en résolvant directement l'équation comme on avait l'habitude dans  $\mathbb{R}$  ;
- soit en utilisant la forme algébrique de  $z$  et la proposition 4.

Explicitons la première méthode : on a

$$\begin{aligned}z + 5i &= iz + 3 \\ \Leftrightarrow z - iz &= 3 - 5i \\ \Leftrightarrow (1 - i)z &= 3 - 5i \\ \Leftrightarrow z &= \frac{3 - 5i}{1 - i} \\ \Leftrightarrow\end{aligned}$$

$$\text{Or, } \frac{3 - 5i}{1 - i} = \frac{(1 + i)(3 - 5i)}{1^2 + 1^2} = \frac{8 - 2i}{2} = 4 - i.$$

La solution de l'équation est alors  $z = 4 - i$ .

3.

**Méthode :** pour une équation faisant intervenir  $z$  et son conjugué, on utilise la forme algébrique de  $z$  et la proposition 4.

On considère la forme algébrique  $z = a + ib$  de  $z$ . Alors  $\bar{z} = a - ib$  et on a :

$$\begin{aligned} z + 5i &= i\bar{z} + 3 \\ \Leftrightarrow a + ib + 5i &= ia + b + 3 \\ \Leftrightarrow a - b + i(b - a) &= 3 - 5i \end{aligned}$$

Or deux nombres complexes sont égaux s'ils ont mêmes parties réelles et mêmes parties imaginaires, donc

$$\begin{aligned} z + 5i &= i\bar{z} + 3 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a - b = 3 \\ b - a = -5 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a - b = 3 \\ a - b = 5 \end{cases} \\ & \text{Impossible!} \end{aligned}$$

Cette équation n'a donc pas de solution !

Voir les exercices corrigés p13 et les exercices 30,34 p20

## Partie B

### Nombres complexes et géométrie

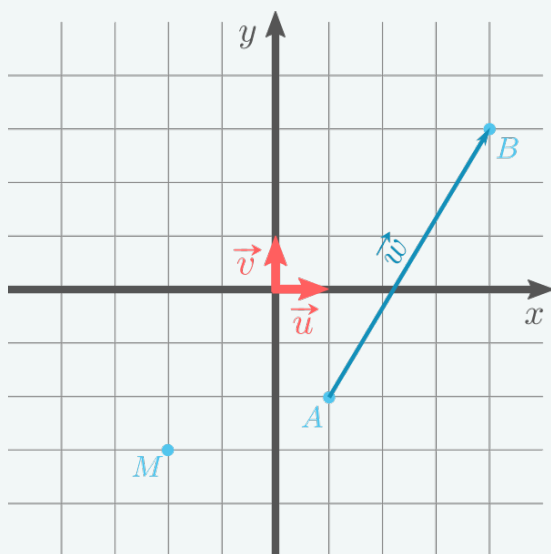
#### 1. Affixe d'un point ou d'un vecteur

##### a. Affixe

**Définition 5.** *Plan complexe ; affixe d'un point/vecteur*

- On appelle **plan complexe** le plan muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .
- Soit  $M$  un point du plan complexe de coordonnées  $(x, y)$  et  $\vec{w}$  un vecteur du plan complexe de coordonnées  $(x', y')$ .
  - On appelle **affixe du point**  $M$  le nombre complexe  $z = x + iy$
  - On appelle **affixe du vecteur**  $\vec{w}$  le nombre complexe  $z' = x' + iy'$

**Exemple 4.**



- Le point  $M$  a pour affixe  $-2 - 3i$  ;
- Le vecteur  $\vec{w}$  a pour affixe  $3 + 5i$ .

**Proposition 9.**

- Soit  $A, B$  des points du plan complexe d'affixes respectives  $z_A, z_B$ .
- L'affixe du  $A$  et l'affixe du vecteur  $\vec{OA}$  sont égales.
  - Le vecteur  $\vec{AB}$  a pour affixe  $z_B - z_A$ .

## b. Propriétés des affixes

### Proposition 10.

Soit  $\vec{w}_1, \vec{w}_2$  des vecteurs du plan complexe d'affixes respectives  $z_1, z_2$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors :

- le vecteur  $\vec{w}_1 + \vec{w}_2$  a pour affixe  $z_1 + z_2$
- le vecteur  $\lambda \vec{w}_1$  a pour affixe  $\lambda z_1$

### Proposition 11. Affixe du milieu

Soit  $A, B, I$  des points du plan complexe d'affixes respectives  $z_A, z_B, z_I$ . Alors  $I$  est le milieu du segment  $[AB]$  si, et seulement si,  $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$ .

### Exercice 8.

Exercices 1 à 12 p42

Voir les exercices corrigés p33 et 14,15,16 p42

### Exercice 9.

#### Remarque :

Soit  $M$  un point du plan complexe d'affixe  $z \in \mathbb{C}$ .

- Le point  $M(z)$  se trouve sur l'axe des abscisses si, et seulement si,  $z$  est un réel.
- Le point  $M(z)$  se trouve sur l'axe des ordonnées si, et seulement si,  $z$  est un imaginaire pur.

1. Soit  $A$  d'affixe  $1 + i$  et  $B$  d'affixe  $3 - i$ .
  - (a) Quel est l'affixe du vecteur  $\vec{AB}$  ?
  - (b) Montrer que l'axe des abscisses coupe le segment  $[AB]$  en son milieu.
2. Soit  $A$  le point d'affixe  $i(\sqrt{3} + i)^{12}$ . Montrer que  $A$  se trouve sur l'axe des ordonnées.
3. Soit  $M(z)$  et  $M'(z')$  des points du plan complexe tels que  $z' = z^2$ . Déterminer les points  $M$  tels que  $M'$  se situe sur l'axe des abscisses.
4. Soit  $z \in \mathbb{C}$ . On pose  $z' = i \frac{z^3 - \bar{z}^3}{z + \bar{z} + 1}$ . Montrer que le point  $A$  d'affixe  $z'$  se situe sur l'axe des ordonnées.

Correction.

1. Soit  $A$  d'affixe  $1 + i$  et  $B$  d'affixe  $3 - i$ .

(a) L'affixe de  $\overrightarrow{AB}$  est  $z_b - z_A = (3 - i) - (1 + i) = 2 - 2i$ .

(b) Soit  $I(z_I)$  le milieu de  $[AB]$ . Alors

$$z_I = \frac{1}{2}(z_A + z_B) = \frac{1}{2}((3 - i) + (1 + i)) = 2 \in \mathbb{R}$$

Par suite, le milieu de  $[AB]$  se trouve sur l'axe des abscisses et comme deux droites se coupe en un unique point (si elle ne sont pas parallèles bien-sûr) ; on en déduit que l'axe des abscisses coupe le segment  $[AB]$  en son milieu.

2. on remarque que  $(\sqrt{3} + i)^3 = 2^3 i = 8i$ . Donc :

$$i(\sqrt{3} + i)^{12} = i((\sqrt{3} + i)^3)^4 = i(8i)^4 = 8^4 i$$

Donc l'affixe de  $A$  est un imaginaire pur, d'où  $A$  est sur l'axe des ordonnées.

3. On met  $z$  sous sa forme algébrique  $z = a + ib$ . Alors  $z' = a^2 - b^2 + 2iab$ . Or  $M'$  est sur l'axe des abscisses si, et seulement si,  $z' \in \mathbb{R}$  i.e.  $2ab = \text{Im}(z') = 0$  ce qui équivaut à  $a = 0$  ou  $b = 0$ .

Par suite,  $M'$  est sur l'axe des abscisses si, et seulement si,  $z$  est réel ou imaginaire pur ce qui équivaut à  $M$  est sur l'axe des abscisses ou sur l'axe des ordonnées.

4. On a :

$$\begin{aligned} \overline{z'} &= \overline{\left( i \frac{z^3 \bar{z}^3}{z + \bar{z} + 1} \right)} \\ &= \bar{i} \frac{\overline{z^3 \bar{z}^3}}{\overline{z + \bar{z} + 1}} \\ &= -i \frac{\bar{z}^3 z^3}{\bar{z} + z + 1} \\ &= -i \frac{z^3 \bar{z}^3}{\bar{z} + z + 1} \\ \overline{z'} &= -z' \end{aligned}$$

Donc  $z'$  est un imaginaire pur. Ainsi,  $A$  d'affixe  $z'$  se situe sur l'axe des ordonnées.

## 2. Module d'un nombre complexe

### a. Le module

#### Définition 6. Module

Soit  $z$  un nombre complexe de forme algébrique  $z = a + ib$ . On appelle **module** de  $z$  et on note  $|z|$  le nombre réel positif :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

#### Exemple 5.

Le complexe  $1 + i$  a pour module  $|2 + 3i| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ .

**Proposition 12.** *Interprétation géométrique*

Soit  $z, z_A, z_B$  des nombres complexes.

- Soit  $\vec{w}$  le vecteur du plan complexe d'affixe  $z$ . On a  $\|\vec{w}\| = |z|$ .
- Soit  $M$  le point du plan complexe d'affixe  $z$ . On a  $OM = |z|$ .
- Soit  $A, B$  les points d'affixes respectives  $z_A, z_B$ . On a  $AB = |z_B - z_A|$ .

**Démonstration.**

Soit  $z$  un nombre complexe de forme algébrique  $z = a + ib$  et  $\vec{w}$  un vecteur du plan complexe d'affixe  $z$ . Alors  $\vec{w}$  est de coordonnées  $(a, b)$  dans le repère **orthonormé**  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  et donc  $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ . Comme  $\vec{u}, \vec{v}$  sont orthogonaux, alors  $a\vec{u}$  et  $b\vec{v}$  le sont aussi; donc, d'après le théorème de Pythagore, on a :

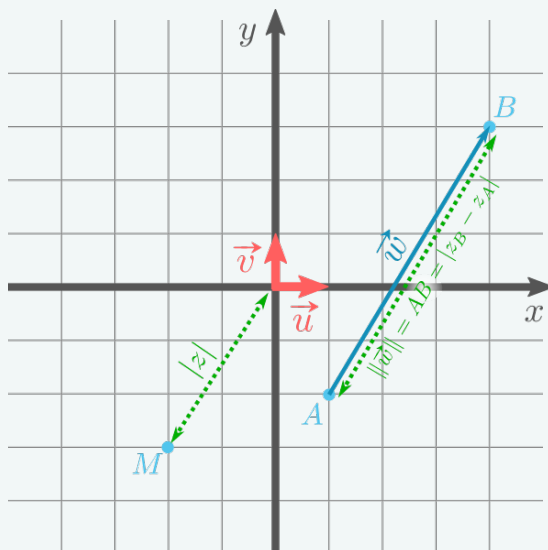
$$\|\vec{w}\|^2 = \|a\vec{u}\|^2 + \|b\vec{v}\|^2 = a^2 \underbrace{\|\vec{u}\|^2}_{=1} + b^2 \underbrace{\|\vec{v}\|^2}_{=1} = a^2 + b^2.$$

Par suite,

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|.$$

Pour les deux autres affirmations, il suffit de remarquer que pour deux points  $M, M'$  du plan,  $MM' = \|\overrightarrow{MM'}\|$ . □

**Exemple 6.**



- Le point  $M$  a pour module  $|z| = \sqrt{13}$ ;
- Le vecteur  $\vec{w}$  a pour module  $\sqrt{34}$ .

**b. Propriétés du module**

**Proposition 13.**

Soit  $z$  un nombre complexe. Alors :

$$|z| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} \text{ et } |\operatorname{Re}(z)| \leq |z|; |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|.$$

**Démonstration.**

- On considère la forme algébrique  $z = a + ib$  de  $z$ . Par définition des parties réelle et imaginaire,  $\operatorname{Re}(z) = a$  et  $\operatorname{Im}(z) = b$ , donc, par définition du module :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}.$$

- On a, par croissance de la racine carrée :

$$|\operatorname{Re}(z)| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2} \leq \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} = |z|$$

et

$$|\operatorname{Im}(z)| = \sqrt{\operatorname{Im}(z)^2} \leq \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} = |z|$$

□

**Proposition 14.**

Soit  $z$  un nombre complexe. Alors  $z = 0$  si, et seulement si,  $|z| = 0$ .

**Démonstration.**

- ( $\Leftarrow$ ). On suppose  $z = 0$ . Alors  $z = 0 + i0$ , donc  $|z| = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$ .  
 — ( $\Rightarrow$ ). On suppose  $|z| = 0$ . On a, d'après la proposition précédente

$$0 \leq |\operatorname{Re}(z)| \leq \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} = |z| = 0 \text{ et } 0 \leq |\operatorname{Im}(z)| \leq \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} = |z| = 0.$$

Ainsi,  $\operatorname{Re}(z) = 0$  et  $\operatorname{Im}(z) = 0$  et donc  $z = 0$ .

□

**Proposition 15.** Module et conjugaison

Soit  $z$  un nombre complexe. On a :

$$|z|^2 = z\bar{z} \text{ et } |\bar{z}| = |z| = |-z|.$$



Démonstration.

— D'après la Proposition 8, on a :

$$z\bar{z} = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2 = |z|^2.$$

— On considère la forme algébrique  $a = a + ib$  de  $z$ . Alors

$$|\bar{z}| = |a - ib| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

et

$$|-z| = |-a - ib| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|.$$

□

### c. Opérations et module

**Proposition 16.** *Produit/Quotient*

Soit  $z, z'$  des nombres complexes. On a :

- $|zz'| = |z| \cdot |z'|$
- $|z^n| = |z|^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$
- $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$  si  $z \neq 0$
- $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$  si  $z' \neq 0$

Démonstration.

• On a

$$|zz'| = zz'\overline{zz'} = zz'\bar{z}\bar{z}' = z\bar{z}.z'\bar{z}' = |z| \cdot |z'|.$$

• On démontre, par récurrence sur  $\mathbb{N}$ , que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $|z^n| = |z|^n$ .

— **Initialisation :**

Par convention, tout nombre complexe élevé à la puissance 0 vaut 1, d'où :

$$|z^0| = |1| = 1 \text{ et } |z|^0 = 1$$

donc  $|z^0| = |z|^0$

Ainsi, la propriété est vérifiée au rang  $n = 0$ .

— **Hérédité :** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose  $|z^n| = |z|^n$ . Montrons que  $|z^{n+1}| = |z|^{n+1}$

On a :

$$\begin{aligned} |z^{n+1}| &= |zz^n| \\ &= |z| \cdot |z^n| \text{ d'après le point précédent} \\ &= |z| \cdot |z|^n \text{ par H.R.} \\ |z^{n+1}| &= |z|^{n+1} \end{aligned}$$

Ce qui achève le raisonnement par récurrence.

Il en résulte que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|z^n| = |z|^n$ .

• On suppose  $z \neq 0$ . On a, d'après le premier point :

$$\left| \frac{1}{z} \right| \cdot |z| = \left| \frac{1}{z} \cdot z \right| = |1| = 1$$

Donc,  $\left|\frac{1}{z}\right|$  est l'inverse de  $|z|$ ; ainsi, par unicité de l'inverse :

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}.$$

- On suppose  $z' \neq 0$ . On a, d'après le premier point et le point précédent :

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \left|\frac{1}{z'} \cdot z\right| = \left|\frac{1}{z'}\right| \cdot |z| = \frac{1}{|z'|} \cdot |z| = \frac{|z|}{|z'|}.$$

□

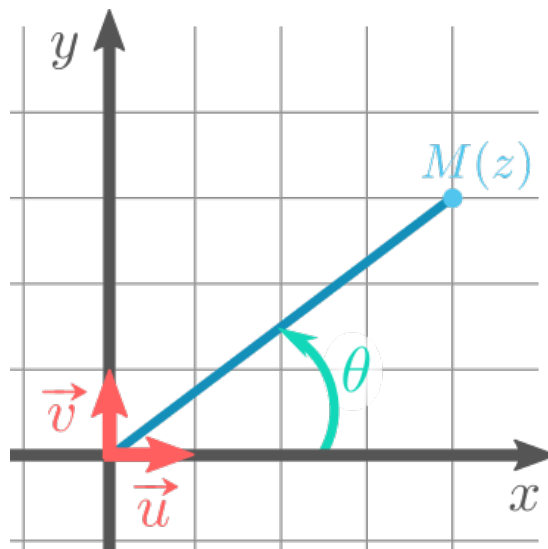
#### d. Exercices

##### Exercice 10.

Exercices 17 à 22 p42

Voir exercices corrigés p35 et 65 p46

### 3. Argument d'un nombre complexe



**Définition 7.** Argument d'un nombre complexe

Soit  $z$  un nombre complexe **non nul** et  $M$  le point du plan complexe d'affixe  $z$ .  
On appelle **argument** de  $z$  et on note  $\arg(z)$  une *mesure (en radian) de l'angle orienté*  $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ .

**Remarque 2.**

Un nombre complexe non nul  $z$  possède une infinité d'arguments qui sont tous égaux "à  $2k\pi$ " près. Ainsi, si  $\theta$  est un argument de  $z$ , on note :

$$\arg(z) = \theta [2\pi] \text{ ou } \arg(z) = \theta \bmod 2\pi$$

De plus, il existe un unique argument de  $z$  dans  $] -\pi, \pi]$ . Cet argument est appelé **argument principal** de  $z$ .

**Exemple 7.**

- $5$  a pour argument  $0 [2\pi]$  et  $0$  pour argument principal ;
- $-i$  a pour argument  $\frac{3\pi}{2} [2\pi]$  et  $-\frac{\pi}{2}$  pour argument principal ;
- $1 + i$  a pour argument  $\frac{\pi}{4} [2\pi]$

**Exercice 11.**

En s'appuyant sur le plan complexe, donner un argument et l'argument principal des nombres complexes suivants :  $\frac{i}{2}$  ;  $-5$  et  $-2 - 2i$

**Correction.**

- $\arg\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$  ; et c'est l'argument principal
- $\arg(-5) = \pi [2\pi]$  ; et c'est l'argument principal
- $\arg(-2 - 2i) = \frac{5\pi}{4} [2\pi]$  et l'argument principal est  $-\frac{3\pi}{4}$

**Proposition 17.**

Soit  $z$  un complexe non nul. On a :

- $\arg(z) = 0 [2\pi]$  si, et seulement si,  $z$  est un réel strictement positif ;
- $\arg(z) = \pi [2\pi]$  si, et seulement si,  $z$  est un réel strictement négatif ;
- $\arg(z) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$  si, et seulement si,  $z$  est un imaginaire pur avec  $\text{Im}(z)$  strictement positif ;
- $\arg(z) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$  si, et seulement si,  $z$  est un imaginaire pur avec  $\text{Im}(z)$  strictement négatif.

Démonstration.

Soit  $M$  le point d'affixe  $z$ . On obtient les résultats de la proposition en comparant le vecteur  $\overrightarrow{OM}$  aux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  (qui pour affixe respectives 1 et  $i$ ).  $\square$

**Exercice 12.**

Soit  $z, z'$  des nombres complexes. En s'appuyant sur le plan complexe, conjecturer un argument de  $-z$  et de  $\bar{z}$ .

Correction.

On peut conjecturer :

- $\arg(-z) = \arg(z) + \pi [2\pi]$ .
- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) [2\pi]$ .

**Exercice 13.**

Exercices 40 à 50 p44

## Partie C

### Nombres complexes et trigonométrie

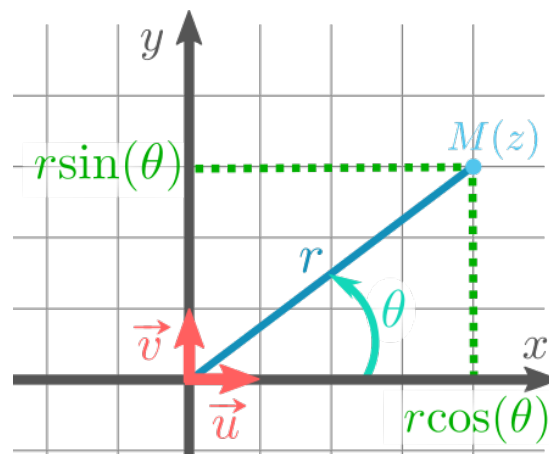
#### 1. Forme trigonométrique

##### Définition-Proposition 8.

Soit  $z$  un nombre complexe non nul. Alors pour  $r = |z|$  et  $\theta = \arg(z) [2\pi]$ , on a :

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

Cette écriture du nombre complexe  $z$  est appelée **forme trigonométrique** de  $z$ .



##### Démonstration.

Soit  $z$  un nombre complexe non nul. On considère sa forme algébrique  $z = a + ib$  et  $M, N$  les points du plan complexe d'affixes respectives  $z$  et  $a$ . Alors le triangle  $MNO$  est rectangle en  $N$  : en effet, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{NO} \cdot \overrightarrow{NM} &= \frac{1}{2}((-a)(\overline{z-a}) + (-a)(z-a)) \\ &= \frac{1}{2}(-a(\overline{z-a}) + (-a)(z-a)) \\ &= -\frac{a}{2}((z-a) + \overline{z-a}) \\ &= -\frac{a}{2}(2\operatorname{Re}(z-a)) = -a(a-a) \\ \overrightarrow{NO} \cdot \overrightarrow{NM} &= 0\end{aligned}$$

Par suite, on a, d'après la définition géométrique du cosinus et du sinus de l'angle  $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$  de mesure  $\theta$ ,

$$\cos(\theta) = \frac{ON}{OM} = \frac{a}{r} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{NM}{OM} = \frac{b}{r}$$

Et ainsi,

$$r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = r\left(\frac{a}{r} + i\frac{b}{r}\right) = a + ib = z.$$

□

### Exemple 8.

- $1 + i = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}))$ .
- $2i = 2(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}))$ .
- $4 = 4(\cos(0) + i\sin(0))$ .

### Exercice 14.

Exercices 56,57,59 p45

Exercices résolus p37

### Proposition 18.

Soit  $z, z'$  des complexes non nuls. Alors  $z = z'$  si, et seulement si :

$$\begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) = \arg(z') [2\pi] \end{cases}$$

#### Démonstration.

Soit  $z, z'$  des complexes non nuls de formes trigonométriques.

Si  $z = z'$ , alors  $|z| = |z'|$  et  $\arg(z) = \arg(z') [2\pi]$ .

Réciproquement, si  $|z| = |z'|$  et  $\arg(z) = \arg(z') [2\pi]$ , alors  $z$  et  $z'$  ont la même forme trigonométrique et donc son égaux. □

## 2. Propriétés trigonométriques

### Proposition 19. Rappel de l'identité fondamentale

Pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1.$$

**Proposition 20.** *Formules d'addition*

Soit  $a, b$  des réels. On a :

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$$

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$$

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a)$$

$$\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \sin(b) \cos(a)$$

**Démonstration.**

Soit  $A, B$  les points d'affixes respectives  $z_A = \cos(a) + i \sin(a)$  et  $z_B = \cos(b) + i \sin(b)$ . Alors  $OA = |z_A| = 1 = |z_B| = OB$ ,  $\arg(z_A) = a [2\pi]$  et  $\arg(z_B) = b [2\pi]$ .

Ainsi, on a  $(\vec{u}, \vec{OA}) = a [2\pi]$  et  $(\vec{u}, \vec{OB}) = b [2\pi]$ ; or, par la relation des angles orientés :

$$(\vec{OB}, \vec{OA}) = (\vec{OB}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{OA}) = (\vec{u}, \vec{OA}) - (\vec{u}, \vec{OB}) = a - b [2\pi]$$

et donc,

$$\vec{OB} \cdot \vec{OA} = OB \cdot OA \cdot \cos(\vec{OB}, \vec{OA}) = OB \cdot OA \cdot \cos(a - b) = \cos(a - b).$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} \vec{OB} \cdot \vec{OA} &= \frac{1}{2}(z_B \bar{z}_A + \bar{z}_B z_A) \\ &= \operatorname{Re}(z_B \bar{z}_A) \\ &= \operatorname{Re}((\cos(b) + i \sin(b))(\cos(a) - i \sin(a))) \\ &= \operatorname{Re}((\cos(b) \cos(a) + \sin(b) \sin(a)) + i(\sin(b) \cos(a) - \cos(b) \sin(a))) \\ \vec{OB} \cdot \vec{OA} &= \cos(b) \cos(a) + \sin(b) \sin(a) \end{aligned}$$

Il en résulte que  $\cos(a - b) = \cos(b) \cos(a) + \sin(b) \sin(a)$ .

Pour les autres formules, on utilise les propriétés suivantes :

- $\cos(a + b) = \cos(a - (-b))$  et la parité de  $\cos$ ;
- $\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$  et  $\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$  - on prouve ces relations en remarquant que les points d'affixe  $z_1 = \cos(x) + i \sin(x)$  et  $z_2 = \cos(\frac{\pi}{2} - x) + i \sin(\frac{\pi}{2} - x)$  sont symétriques par rapport à la droite  $\operatorname{Im}((1 + i)z) = 0$  (en coordonnées cartésiennes, il s'agit de la droite d'équation  $y = x$ !).

□

**Exercice 15.**

1. Déterminer les cosinus et sinus de  $\frac{7\pi}{12}$  et de  $\frac{\pi}{12}$
2. Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\cos'(x) = -\sin(x)$  et  $\sin'(x) = \cos(x)$ .

Correction.

1. On a  $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$  et  $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ , donc, d'après les formules d'addition :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) &= \sqrt{2}\frac{1-\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} \\ \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) &= \sqrt{2}\frac{1+\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

Et également,

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \sqrt{2}\frac{1+\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \sqrt{2}\frac{\sqrt{3}-1}{4}\end{aligned}$$

*On aurait également pu utiliser le fait que  $\frac{\pi}{12} = \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{2}$ .*

2. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On a  $\cos'(x) = -\sin(x)$  et  $\sin'(x) = \cos(x)$ . De plus,

$$\begin{aligned}\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\sin(x)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \sin(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(x) \\ &= \cos(x)\end{aligned}$$

Donc  $\cos'(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$  et  $\sin'(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ .



Les formules suivantes sont à savoir mais aussi à savoir retrouver à partir des précédentes !

**Proposition 21.** *Formules de linéarisation*

Soit  $\theta$  un réel. On a :

$$\cos(2\theta) = 2 \cos^2(\theta) - 1 \text{ et } \sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta).$$

*Démonstration.*

— On remarque tout d'abord que, d'après l'identité fondamentale,  $\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$ . Ainsi, d'après les formules d'addition :

$$\begin{aligned} \cos(2\theta) &= \cos(\theta + \theta) \\ &= \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \\ &= \cos^2(\theta) - (1 - \cos^2(\theta)) \\ \cos(2\theta) &= 2 \cos^2(\theta) - 1 \end{aligned}$$

— On a, d'après les formules d'addition :

$$\begin{aligned} \sin(2\theta) &= \sin(\theta + \theta) \\ &= 2 \sin(\theta) \cos(\theta) \end{aligned}$$

□

Voir les exercices résolus p55 et 1,2,3,6,9,10,12,13 p64

### 3. Propriétés de l'argument

**Proposition 22.**

Soit  $z, z'$  des complexes non nuls et  $n$  un entier naturel.

- $\arg(-z) = \arg(z) + \pi [2\pi]$
- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) [2\pi]$
- $\arg(z.z') = \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$
- $\arg(z^n) = n\arg(z) [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$ .

## 4. Exercices

### Exercice 16.

1. Déterminer la forme algébrique du nombre complexe  $z$  de module 4 et d'argument principal  $\frac{2\pi}{3}$ .
2. Déterminer la forme trigonométrique de  $z = -5 - 5i\sqrt{3}$ .
3. Déterminer l'argument de  $z = (1 + i)^{12}$

### Correction.

1. Connaissant le module  $r$  et un argument  $\theta$  d'un nombre complexe  $z$ , on obtient sa forme trigonométrique  $z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ . Ainsi :

$$z = 4 \left( \cos \left( \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{2\pi}{3} \right) \right) = 4 \left( \frac{1}{2} + i \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = -2 + 2\sqrt{3}i.$$

2. Pour passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique, on factorise  $z$  par son module puis on reconnaît, si elles sont connues bien-sûr, les valeurs de  $\cos(\theta)$  et  $\sin(\theta)$ . Ici, on a :

$$|z| = \sqrt{(-5)^2 + (-5\sqrt{3})^2} = \sqrt{25 + 75} = \sqrt{100} = 10.$$

Donc

$$z = 10 \left( -\frac{1}{2} + i \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = 10 \left( \cos \left( \frac{-2\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{-2\pi}{3} \right) \right).$$

3. On utilise la formule  $\arg(z^n) = n\arg(z) [2\pi]$  pour  $z = 1 + i$  et  $n = 12$ . On commence par déterminer un argument de  $z$  en le mettant sous forme algébrique (même méthode que la question précédente) :

$$z = \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + i \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right) = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) = \sqrt{2} \left( \cos \left( \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

d'où  $\arg(z) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$ . Ainsi, on a :

$$\arg((1 + i)^{12}) = \arg(z^{12}) = 12\arg(z) = 12\frac{\pi}{4} = 3\pi = \pi [2\pi]$$

*Supplément : on en déduit que  $z$  est un nombre réel négatif, et comme  $|z^{12}| = |z|^{12} = \sqrt{2}^{12} = 2^6 = 64$ , on a donc  $z = -64$ .*

### Exercice 17.

Exercices 66 p46 et 80p47

Exercices corrigés p37 et 48,49,50 p44 ; 56,60,61 p45