Terminales maths expertes, M. ARNT – Mme BEAUJARD

Correction de l'IE1 du mercredi 29 septembre

I Correction du Vrai- Faux

1. **VRAI**.
   Pour savoir si $(1+i)$ est solution de $z^2+z(1-i)-2-2i=0$ ou non ; on calcule $z^2+z(1-i)-2-2i$ en remplaçant z par $(1+i)$:
   $$(1+i)^2+(1+i)(1-i)-2-2i=2i+2-2-2i=0$$
   Ainsi, $(1+i)$ est solution de $z^2+z(1-i)-2-2i=0$.
2. **VRAI**.
   On a $z=\sqrt{3}-i$ et $z'=(1+i)z$, donc :
   $$z'=(1+i)(\sqrt{3}-i)=\sqrt{3}-i+i\sqrt{3}-\underbrace{i^2}_{=-1}=\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1);$$
   ce qui correspond bien au z' annoncé.
3. **VRAI**.
   On a :
   $$(1+i)^{12}=\left((1+i)^2\right)^6=(2i)^6=2^6\underbrace{i^6}_{(i^2)^3}=2^6\times(-1)^3=-2^6\in\mathbb{R}$$
4. **FAUX**.
   On cherche un contre-exemple à l'affirmation ; $z=i$ convient :
   - d'une part, $\text{Re}(z^2)=\text{Re}(i^2)=\text{Re}(-1)=-1$
   - d'autre part, $\text{Re}(z)^2=\text{Re}(i)^2=0^2=0$

   Donc $\text{Re}(z^2)\neq\text{Re}(z)^2$ en général.
5. **FAUX**.
   On a $(1+i)^4=((1+i)^2)^2=(2i)^2=-4$.
   Par suite,
   - $\text{Re}((1+i)^4)=-4$
   - $4\text{Re}((1+i))=4\times1=4$.

   Ainsi, $\text{Re}((1+i)^4)\neq 4\text{Re}((1+i))$
6. **VRAI**.

Soit $z \in \mathbb{C}$. On sait Z est imaginaire pur si, et seulement si, $\overline{Z} = -Z$. Or on a :

$$\begin{aligned}
\overline{Z} &= \overline{\left(\frac{z^2 - \overline{z}^2}{z\overline{z} + 3}\right)} \\
&= \frac{\overline{z^2 - \overline{z}^2}}{\overline{z\overline{z} + 3}} \\
&= \frac{\overline{z^2} - \overline{\overline{z}^2}}{\overline{z}\,\overline{\overline{z}} + \overline{3}} \\
&= \frac{\overline{z}^2 - \overline{\overline{z}}^2}{\overline{z}z + 3} \\
&= \frac{\overline{z}^2 - z^2}{z\overline{z} + 3} \\
&= -\frac{z^2 - \overline{z}^2}{z\overline{z} + 3} \\
\overline{Z} &= -Z
\end{aligned}$$

Donc Z est bien un imaginaire pur.

II Correction des exercices

1. Soit A et B d'affixes respectives notée $z_A = 3 - 2i$ et $z_B = -1 + i$.

a. On note z l'affixe de $\overrightarrow{AB}$. Alors $z = z_B - z_A$ donc :

$$z = (-1 + i) - (3 - 2i) = -4 + 3i.$$

Ainsi, l'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $-4 + 3i$.

b. On sait que si I d'affixe z_I est le milieu du segment $[AB]$ alors $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$. Par suite, l'affixe du milieu de $[AB]$ est :

$$\frac{z_A + z_B}{2} = \frac{(-1 + i) + (3 - 2i)}{2} = \frac{2 - i}{2} = 1 - \frac{1}{2}i.$$

2. On a :

$$\begin{aligned}
(3 + i)z &= 4 + 2i \\
z &= \\
z &= \tfrac{3-i}{3-i}\tfrac{4+2i}{3+i} \\
z &= \tfrac{14}{10} + \tfrac{1}{5}i
\end{aligned}$$

3. Soit $a \in \mathbb{R}$. On a, en mettant $(a + i)^3$ sous forme algébrique :

$$(a + i)^3 = (a + i)(a + i)^2 = (a + i)(a^2 + 2ai - 1) = (a^3 - 3a) + (3a^2 - 1)i$$

On sait qu'un complexe est réel si, et seulement si, sa partie imaginaire est nulle donc $(a + i)^3$ est un réel, si, et seulement si, $3a^2 - 1 = 0$.
Or $3a^2 - 1 = 0$ équivaut à $a = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.
Il en résulte que :

$$(a + i)^3 \text{ est un réel, si, et seulement si, } a = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ou } a = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

4. Soit x un réel. On sait qu'un complexe est un imaginaire pur si, et seulement si, sa partie réelle est nulle. Ainsi, z est imaginaire pur si, et seulement si, $x^2 + 4x + 3 = 0$.

Soit on utilise le discriminant, soit on s'aperçoit que -1 et -3 sont racines de X^2+4X+3 ; quoi qu'il en soit on trouve que : $x^2 + 4x + 3 = 0$ si et seulement si, $x = -1$ ou $x = -3$.

Ainsi, z est imaginaire pur si, et seulement si, $x = -1$ ou $x = -3$.

5. On sait qu'un point A est sur l'axe des abscisses si, et seulement si, son affixe est un réel. Ainsi, $M(z')$ est sur l'axe des abscisses si, et seulement si, $z' = 2z^2 - 3iz \in \mathbb{R}$.
On considère z sous sa forme algébrique $z = a + ib$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} z' & = & 2(a+ib)^2 - 3i(a+ib) \\ & = & 2(a+ib)^2 - 3i(a+ib) \\ z' & = & 2a^2 - 2b^2 - 3b + (-3a + 4ab)i \end{array}$$

Or un nombre complexe est un réel si, et seulement si, sa partie imaginaire est nulle donc :
$z' \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, $-3a + 4ab = 0$. On résout alors cette équation qui est équivalente à $a(4b - 3) = 0$: un produit de réels est nul si, et seulement si, un de ses facteurs est nul, donc l'ensemble des solutions de l'équation est $\{(0, b) \mid b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, \frac{3}{4}) \mid a \in \mathbb{R}\}$.
Il en résulte que $M'(z')$ est sur l'axe des abscisses si, et seulement si, l'affixe z de M est un imaginaire pur (de la forme ib avec $b \in \mathbb{R}$) ou est de la forme $a + \frac{3}{4}i$. *Remarque :* Ceci peut se reformuler géométriquement par : M est sur l'axe des ordonnées ou sur la droite horizontale qui passe par le point d'affixe $\frac{3}{4}i$.