Chapitre II

Intégrale généralisée

Table des matières

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; les intervalles considérés sont supposés d'intérieur non vide et a désigne un nombre réel.

Partie A

Intégrale généralisée sur $[a, +\infty[$

1. Généralités

a. Définitions et exemples

Définition 1. *Intégrale convergente*

Soit $f \in C_{pm}([a, +\infty[, \mathbb{K})$.

Si la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_a^x f$ existe et est finie, on note $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ ou encore $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ cette quantité, i.e. :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans ce cas, on dit que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ **converge**.

Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ **diverge**.

Proposition-Notation 1.

Soit $f \in C([a, +\infty[, \mathbb{K})$ et F une primitive de f. L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge si, et seulement si F admet une limite finie en $+\infty$. Dans ce cas, on a :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a) \underbrace{=\ [F(t)]_a^{+\infty}}_{\text{notation}}$$

Démonstration.

D'après le théorème fondamental de l'analyse, on a, pour tout $x \in [a, +\infty[$:

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$$

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge si, et seulement si, $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie en $+\infty$ si, et seulement si, F admet une limite finie en $+\infty$.

Dans ce cas, on a :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} (F(x) - F(a)) = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a).$$

□

Exemple 1.

1. Soit $\alpha > 0$. Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge et on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}$.
2. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

> En effet, pour $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x \cos(t)\,\mathrm{d}t = \sin(x)$; or sin ne possède pas de limite quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 1.

Discuter de la convergence des intégrales suivantes et en cas de convergence, déterminer la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} te^t\,\mathrm{d}t \qquad \int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t.$$

Correction.

1. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $I = [0, +\infty[$ et $F = \arctan$ est une primitive de f sur I. De plus, F admet $\frac{\pi}{2}$ comme limite en $+\infty$ donc $\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et on a :
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = [\arctan(t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$
2. La fonction $f : t \mapsto te^t$ est continue sur $I = [0, +\infty[$ et $F : t \mapsto (t-1)e^t$ est une primitive de f sur I (on peut retrouver cette primitive, sans connaissance du résultat a priori, par une intégration par parties par exemple). De plus, F admet $+\infty$ comme limite en $+\infty$ donc $\int_0^{+\infty} te^t\,\mathrm{d}t$ diverge.
3. La fonction $f : t \mapsto \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)$ est continue sur $I = [1, +\infty[$. De plus, par une intégration

par paties, on trouve :

$$\begin{aligned}\int f(t)\,\mathrm{d}t &= t\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)-\int t\frac{\frac{-2}{t^3}}{1+\frac{1}{t^2}}\,\mathrm{d}t\\ &= t\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)+2\int\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\ \int f(t)\,\mathrm{d}t &= t\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)+2\arctan(t).\end{aligned}$$

Par suite, $F : t \mapsto t\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)+2\arctan(t)$ est une primitive de f sur I et comme $\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$,

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = 0+2\times\frac{\pi}{2} = \pi$$

Ainsi, $\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t$ converge et comme $F(1)=\ln(2)+\frac{\pi}{2}$, on a :

$$\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t = [F(t)]_1^{+\infty} = \pi-(\ln(2)+\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}-\ln(2).$$

Exercice 2.

1. Donner un exemple de fonction $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}_+$ continue telle que $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$ et telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ diverge.
2. Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue telle que f n'est pas bornée et telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ converge.

Correction.

1. On peut considérer la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t}$. En effet, on a $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$ et

$$\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = [\ln(t)]_1^x = \ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

2. On peut considérer la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par :
   — pour $n \in \mathbb{N}*$, f est affine sur :
     - l'intervalle $[n-\frac{1}{4^n}, n]$ avec $f(n-\frac{1}{4^n}) = 0$ et $f(n) = 2^n$;
     - l'intervalle $[n, n+\frac{1}{4^n}]$ avec $f(n) = 2^n$ et $f(n+\frac{1}{4^n}) = 0$;

   — $f(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+ \setminus \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} [n-\frac{1}{4^n}, n+\frac{1}{4^n}]$.

   Alors f est continue et non bornée sur $\mathbb{R}_+$. De plus, on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_{n-\frac{1}{4^n}}^{n+\frac{1}{4^n}} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2^n}.$$

On a, pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n + \frac{1}{4^n} > x$:

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t &\leq \int_0^{n+\frac{1}{4^n}} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n}\left(\int_{k-\frac{1}{4^k}}^{k+\frac{1}{4^k}} f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^k} = 1.\end{aligned}$$

Ainsi la fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée sur $\mathbb{R}_+$ et, de plus, la fonction f étant positive, la fonction F est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Il en résulte que F admet une limite finie en $+\infty$ *(on peut montrer simplement que la limite est bien 1)* et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge.

b. Intégrales de Riemann en $+\infty$

Proposition 2. *Intégrale de Riemann en $+\infty$*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Démonstration.

Pour $\alpha = 1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge. En effet, une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $[1, +\infty[$ est la fonction ln qui admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$.
Pour $\alpha \neq 1$, on a :

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}}\right]_1^x = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha}\begin{cases}\xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty & \text{si } \alpha < 1;\\ \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha > 1.\end{cases}$$

Ainsi, si $\alpha > 1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ converge et si $\alpha < 1$ $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge.

Conclusion : $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$; et dans le cas $\alpha > 1$, on a

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha-1}$$

□

c. Propriétés de l'intégrale généralisée sur $[a, +\infty[$

Proposition 3. *Relation de Chasles*

Soit $f \in C_{pm}([a,+\infty[,\mathbb{K})$ et $b \in [a,+\infty[$. Alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est convergente si, et seulement si, $\displaystyle\int_b^{+\infty} f$ est convergente. Dans ce cas, on a :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration.

Soit $f \in C_{pm}([a,+\infty[,\mathbb{K})$ et $b \in [a,+\infty[$. Comme f est continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ et donc $[a,b]$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie et on a, pour tout $x \in [a,+\infty[$, d'après la relation de Chasles (pour les intégrales sur un segment) :

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Ainsi, $\int_a^{+\infty} f$ converge si, et seulement si, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie en $+\infty$, si et seulement si, $x \mapsto \int_b^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie en $+\infty$, si et seulement si, $\int_b^{+\infty} f$ converge.
Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t &= \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \lim_{x\to+\infty}\int_b^x f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

□

Proposition 4. *Linéarité de l'intégrale généralisée*

Soit $f,g \in C_{pm}([a,+\infty[,\mathbb{K})$ et $\lambda,\mu \in \mathbb{K}$. Si les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ convergent, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} (\lambda f + \mu g)$ converge et on a :

$$\int_a^{+\infty} (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t + \mu\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration.

Soit $f, g \in C_{pm}([a,+\infty[,\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Pour tout $x \in [a,+\infty[$, on a, par linéarité de l'intégrale sur un segment :

$$\int_a^x (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

Par suite, si les fonctions $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $x \mapsto \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$ admettent des limites finies en $+\infty$, alors $\int_a^x (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie en $+\infty$. Dans ce cas :

$$\begin{aligned}
\int_a^{+\infty} (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t &= \lim_{x\to+\infty} \int_a^x (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left(\lambda \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \right) \\
&= \lambda \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \lim_{x\to+\infty} \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lambda \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

$\square$

Exercice 3.

Déduire de la proposition précédente que l'ensemble des fonctions f continues par morceaux telles que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Que dire de l'application $f \mapsto \displaystyle\int_a^{+\infty} f$?

Correction.

D'après la proposition pécédente, l'ensemble $E = \{f \in C_{pm}([a,+\infty[,\mathbb{K}) \mid \int_a^{+\infty} f \text{ converge}\}$ est stable par combinaison linéaire ; de plus, la fonction nulle appartient à E donc E est un sous-espace vectoriel de $C_{pm}([a,+\infty[,\mathbb{K})$: ainsi E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Toujours d'après la proposition précédente, on conclut que $f \mapsto \displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est une forme linéaire sur E.

Proposition 5. *Positivité et croissance*

Soit $f, g \in C_{pm}([a,+\infty[,\mathbb{R})$ telles que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ convergent.

- Si f est positive (i.e. pour tout $t \in [a,+\infty[$, $f(t) \geq 0$), alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$.
- Si $f \leq g$ (i.e. pour tout $t \in [a,+\infty[$, $f(t) \leq g(t)$), alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$.

Démonstration.

— On suppose f positive. Alors, par positivité de l'intégrale sur un segment, pour tout $x \in [a+\infty[$, $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$. Par passage à la limite, on obtient donc que $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$.

— Si $f \leq g$, alors $h = g - f \geq 0$. De plus, par combinaison linéaire, $\int_a^{+\infty} h$ converge donc $\int_a^{+\infty} \underbrace{h(t)}_{g(t)-f(t)} \,\mathrm{d}t \geq 0$.

Ainsi, $\int_a^{+\infty} f$ et $\int_a^{+\infty} g$ étant convergentes, par linéarité de l'intégrale généralisée, $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$.

$\square$

Théorème 1.

Soit $f \in C([a,+\infty[,\mathbb{R})$ une fonction **continue** et **positive** sur $[a,+\infty[$. Alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ si, et seulement si, $f = 0$.

Proposition 6. *Dérivation*

Soit $f \in C([a,+\infty[,\mathbb{R})$ une fonction **continue** sur $[a,+\infty[$ telle que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge. Alors l'application de $\varphi : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi : x \mapsto \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$ et on a $\varphi' = -f$.

2. Intégrale généralisée de fonctions positives

Proposition 7.

Soit $f \in C_{pm}([a,+\infty[,\mathbb{R})$ une fonction positive.

— L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge si, et seulement si, la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a,+\infty[$. Dans ce cas, on a :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \sup_{x\in[a,+\infty[} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

— L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ diverge si, et seulement si, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$.

Théorème 2. *Comparaison*

Soit $f, g \in C_{pm}([a, +\infty[, \mathbb{R})$ des fonctions positives.

i) On suppose qu'il existe $A \geq a$ tel que, pour tout $t \geq A$, $f(t) \leq g(t)$.

— Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ converge, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge.

— Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ diverge, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ diverge.

ii) On suppose $f = 0(g)$ (ou $f = o(g)$) en $+\infty$. Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ converge, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge.

iii) On suppose $f \underset{x\to+\infty}{\sim} g$. Alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ sont de même nature.

Exercice 4.

Étudier la convergence des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha + 1}{3t^\beta + 5}\,\mathrm{d}t$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$.
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^\alpha e^{-t}\,\mathrm{d}t$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha(\ln(t))^\beta}\,\mathrm{d}t$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Correction.

1. Soit $f : t \mapsto \frac{t^\alpha+1}{3t^\beta+5}$. Alors f est définie (car $3t^\beta + 5 > 0$ pour tout $t \geq 0$), continue et positive sur $\mathbb{R}_+$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$ et on a :
$$\frac{t^\alpha + 1}{3t^\beta + 5} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t^\alpha}{3t^\beta} = \frac{1}{3t^{\beta-\alpha}}$$
Or, d'après le critère de Riemann en $+\infty$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\beta-\alpha}}\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\beta - \alpha > 1$.
Par suite, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^\alpha + 1}{3t^\beta + 5}\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\beta - \alpha > 1$.
De plus, f étant continue sur $[0, 1]$, $\displaystyle\int_0^{1} \frac{t^\alpha + 1}{3t^\beta + 5}\,\mathrm{d}t$ converge et donc :
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha + 1}{3t^\beta + 5}\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^\alpha + 1}{3t^\beta + 5}\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\beta - \alpha > 1$.
2. Soit $f : t \mapsto t^\alpha e^{-t}$. Alors f est définie, continue et positive sur $[1, +\infty[$ et on a, par croissances comparées :
$$t^2 f(t) = t^{2+\alpha}e^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

donc $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$; or, d'après le critère de Riemann en $+\infty$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, donc, par comparaison :

$$\text{pour tout } \alpha > 0, \qquad \int_1^{+\infty} t^\alpha e^{-t}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

3. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On pose $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha (\ln(t))^\beta}$. Alors f est définie, continue et positive sur $[2, +\infty[$.
   — 1er cas : $\alpha > 1$.
   On pose $a = \frac{\alpha+1}{2}$ et ainsi $\alpha > a > 1$. Alors $\alpha - a > 0$ et donc, par croissances comparées lorsque $\beta < 0$ et par produit de limites lorsque $\beta \geq 0$:

$$t^a f(t) = \frac{1}{t^{\alpha-a}} \ln(t)^{-\beta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

   donc $f(t) = o\left(\dfrac{1}{t^a}\right)$ en $+\infty$.
   Or, d'après le critère de Riemann en $+\infty$, comme $a > 1$, $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^a}\,\mathrm{d}t$ converge, donc, par comparaison, $\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
   — 2eme cas : $\alpha < 1$.
   Si $\beta \leq 0$, pour tout $t \geq e$, on a $\ln(t)^{-\beta} \geq 1$ donc, pour tout $t \geq e$:

$$f(t) \geq \frac{1}{t^\alpha}.$$

   Or, d'après le critère de Riemann en $+\infty$, comme $\alpha < 1$, $\int_e^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ diverge, donc, par comparaison, $\int_e^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge et ainsi, $\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.
   On suppose $\beta > 0$. Comme pour tout $a > 0$, par croissances comparées, $\frac{\ln(t)^\beta}{t^a} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, il existe $t_0 > 1$ tel que, pour tout $t \geq t_0$, $\frac{\ln(t)^\beta}{t^a} \leq 1$ et donc, pour tout $t \geq t_0$:

$$\frac{1}{\ln(t)^\beta} \geq \frac{1}{t^a}.$$

   On pose $a = \frac{1-\alpha}{2}$. Alors $\alpha + a = \frac{1+\alpha}{2} < 1$ et $a > 0$, donc il existe $t_0 > 1$ tel que, pour tout $t \geq t_0$:

$$f(t) = \frac{1}{t^\alpha \ln(t)^\beta} \geq \frac{1}{t^{\alpha+a}}$$

   Or, d'après le critère de Riemann en $+\infty$, comme $\alpha + a < 1$, $\int_{t_0}^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha+a}}\,\mathrm{d}t$ diverge, et donc, par comparaison, $\int_{t_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge et ainsi, $\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.
   — 3eme cas : $\alpha = 1$.
   Pour tout $t \geq 2$,

$$f(t) = \frac{1}{t\ln(t)^\beta} = \begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{1}{(1-\beta)\ln(t)^{\beta-1}} & \text{si } \beta \neq 1 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln(\ln(t)) & \text{si } \beta = 1 \end{cases}$$

Par suite, pour $x \geq 2$:

$$\int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \frac{1}{(1-\beta)}(\ln(x)^{1-\beta} - \ln(2)^{1-\beta}) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty & \text{si } \beta < 1 \\ \ln(\ln(x)) - \ln(\ln(2)) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty & \text{si } \beta = 1 \\ \frac{1}{(\beta-1)}(\frac{1}{\ln(2)^{\beta-1}} - \frac{1}{\ln(x)^{\beta-1}}) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{(\beta-1)\ln(2)^{\beta-1}} & \text{si } \beta > 1 \end{cases}$$

Donc, par définition, $\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\beta > 1$.

Conclusion : on a donc : $\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

3. Intégrabilité

Définition 2. *Intégrabilité*

Soit $f \in C_{pm}([a,+\infty[,\mathbb{R})$. On dit que f est **intégrable** sur $[a,+\infty[$ ou que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est **absolument convergente** si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f|$ est convergente.

Théorème 3.

Soit $f \in C_{pm}([a,+\infty[,\mathbb{R})$. Si f est intégrable sur $[a,+\infty[$, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge.

Démonstration.

On suppose que f est intégrable sur $[a,+\infty[$. On note $f_+ = \max(f,\mathbf{0})$ qui est continue par morceaux et positive sur $[a,+\infty[$ et $f_- = \min(f,\mathbf{0})$ qui est continue par morceaux et négative sur $[a,+\infty[$. Alors $f = f_+ + f_-$, $|f| = f_+ - f_-$ et de plus :

$$0 \leq f_+ \leq |f| \text{ et } 0 \leq -f_- \leq |f|$$

Par suite, comme $\int_a^{+\infty} |f|$ converge et $f_+, -f_-$ sont positives, par comparaison, $\int_a^{+\infty} f_+$ et $\int_a^{+\infty} -f_-$ convergent. Ainsi, comme $f = f_+ + (-1)(-f_-)$, par combinaison linéaire, $\int_a^{+\infty} f$ converge. $\square$

Exercice 5.

Déterminer la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t\sin(t)}{\sqrt{\mathrm{sh}(t)}}\,\mathrm{d}t$.

Correction.

La fonction $f : t \mapsto \frac{t\sin(t)}{\sqrt{\mathrm{sh}(t)}}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et on a, pour tout $t \in [1, +\infty[$:

$$\left|\frac{t\sin(t)}{\sqrt{\mathrm{sh}(t)}}\right| = \frac{t|\sin(t)|}{\sqrt{\mathrm{sh}(t)}} \leq \frac{t}{\sqrt{\mathrm{sh}(t)}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{2}te^{-\frac{t}{2}} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Or, d'après le critère de Riemann en $+\infty$ $(2 > 1)$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, donc par comparaison, $\int_1^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge i.e. f est intégrable sur $[1, +\infty[$.
Il en résulte que $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Partie B

Intégration sur un intervalle quelconque

Dans cette partie, a, b désignent des réels tels que $a < b$.

1. Intégrale généralisée sur $]-\infty, a]$

Définition 3. *Intégrale convergente sur* $]-\infty, a]$

Soit $f \in C_{pm}(]-\infty, a], \mathbb{K})$.

Si la limite $\lim\limits_{x \to -\infty} \int_x^a f$ existe et est finie, on note $\int_{-\infty}^a f$ ou encore $\int_{-\infty}^a f(t)\,\mathrm{d}t$ cette quantité, i.e. :

$$\int_{-\infty}^a f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to -\infty} \int_x^a f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans ce cas, on dit que $\int_{-\infty}^a f$ **converge**.

Dans le cas contraire, on dit que $\int_{-\infty}^a f$ **diverge**.

Remarque 1.

Les propriétés de l'intégrale $\int_{-\infty}^a$ sont analogues à celle de l'intégrale $\int_a^{+\infty}$ et on les démontre sans difficulté en remarquant qu'en posant $\tilde{f} : t \mapsto f(-t)$, on obtient les propriétés suivantes :

- si $f \in C_{pm}(]-\infty, a], \mathbb{K})$ alors $\tilde{f} \in C_{pm}([-a, +\infty], \mathbb{K})$;
- les intégrales $\int_{-\infty}^a f$ et $\int_{-a}^{+\infty} \tilde{f}$ sont de même nature ;
- en cas de convergence, $\int_{-\infty}^a f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-a}^{+\infty} \tilde{f}(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 6.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^0 e^{\alpha t}\,\mathrm{d}t$ en fonction de α.

Correction.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Considérons $f : t \mapsto e^{\alpha t}$. Alors

$$F : t \mapsto \begin{cases} \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} & \text{si } \alpha \neq 0 \\ t & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$$

est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ et donc sur $]-\infty, 0]$. Or F admet une limite finie en $-\infty$ si, et seulement si, $\alpha > 0$. Donc $\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\alpha > 0$. Et dans ce cas,

$$\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{\alpha t}}{\alpha}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{e^{\alpha 0}}{\alpha} - \lim_{t\to-\infty} \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}.$$

Remarque : on aurait également pu utiliser la remarque précédente en remarquant que $g : t \mapsto e^{-\alpha t} = f(-t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ si, et seulement si, $\alpha > 0$.

2. Intégrale généralisée sur $]a, b]$ ou $[a, b[$

Définition 4. *Intégrale convergente sur $[a, b[$*

Soit $f \in C_{pm}([a, b[, \mathbb{K})$.

Si la limite $\displaystyle\lim_{x\to b} \int_a^x f$ existe et est finie, on note $\displaystyle\int_a^b f$ ou encore $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ cette quantité, i.e. :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans ce cas, on dit que $\displaystyle\int_a^b f$ **converge**.

Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_a^b f$ **diverge**.

Définition 5. *Intégrabilité*

Soit $f \in C_{pm}(]a, b], \mathbb{R})$. On dit que f est **intégrable** sur $]a, b]$ ou que $\displaystyle\int_a^b f$ est **absolument convergente** si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f|$ est convergente.

Remarque 2.

On définit de manière analogue l'intégrale sur un intervalle du type $]a, b]$.

Tous les résultats de la partie concernant l'intégrale sur $[?, +\infty[$ sont transposables aux cas des intégrales sur $]a, b]$ et sur $[a, b[$; citons notamment **les propriétés de comparaison** et le théorème "intrégrabilité d'une fonction implique convergence de l'intégrale de cette fonction" reproduit ci-après.

Théorème 4.

Soit $f \in C_{pm}([a, b[, \mathbb{R})$. Si f est intégrable sur $[a, b[$, alors $\int_a^b f$ converge.

Démonstration.

La démonstration est analogue au cas $[a, +\infty[$ en remplaçant simplement $+\infty$ par b. □

Exemple 2.

— L'intégrale $\int_0^1 \ln(t)\,dt$ converge et $\int_0^1 \ln(t)\,dt = -1$

— L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t}\,dt$ diverge

Proposition 8. *Intégrales de Riemann*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Les intégrales $\int_a^b \frac{1}{(b-t)^\alpha}\,dt$ et $\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,dt$ convergent si, et seulement si, $\alpha < 1$.

Démonstration.

On traite la nature de $\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,dt$:

- Si $\alpha = 1$, pour $a < x \leq b$, on a :

$$\int_x^b \frac{1}{t-a}\,dt = [\ln(t-a)]_x^b = \ln(b-a) - \ln(x-a) \xrightarrow[x \to a^+]{} +\infty$$

donc $\int_a^b \frac{1}{t-a}\,dt$ diverge.

- Si $\alpha \neq 1$, on a, pour $a < x \leq b$:

$$\begin{aligned}
\int_x^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,dt &= \left[\frac{1}{(1-\alpha)(t-a)^{\alpha-1}}\right]_x^b \\
&= \frac{1}{(1-\alpha)(b-a)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1-\alpha)(x-a)^{\alpha-1}}
\end{aligned}$$

$$\int_x^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,dt \quad \begin{cases} \xrightarrow[x \to 0^+]{} \dfrac{1}{(1-\alpha)(b-a)^{\alpha-1}} & \text{si } \alpha < 1; \\ \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

Il en résulte que $\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,dt$ converge si, et seulement si, $\alpha < 1$. □

Corollaire 1. *Intégrale de Riemann en 0*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\alpha < 1$.

Démonstration.

On applique la proposition précédente (deuxième intégrale) pour $a = 0$ et $b = 1$.

Voici tout de même la démonstration directe pour une potentielle question de colle :) :

- Si $\alpha = 1$, pour $0 < x \leq 1$, on a :

$$\int_x^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln(t)]_x^1 = -\ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$$

  donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge.

- Si $\alpha \neq 1$, on a, pour $0 < x \leq 1$:

$$\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}}\right]_x^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}} \begin{cases} \xrightarrow[x\to 0^+]{} \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1; \\ \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

Il en résulte que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\alpha < 1$. □

Proposition 9.

Soit $f \in C_{pm}([a, b[, \mathbb{K})$.

— Si f est bornée sur $[a, b[$, alors f est intégrable sur $[a, b[$.

— Si f est prolongeable par continuité en b i.e. si f admet une limite finie en b, alors f est intégrable sur $[a, b[$.

Démonstration.

Soit $f \in C_{pm}([a, b[, \mathbb{K})$.

— On suppose f bornée sur $[a, b[$. Alors il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $t \in [a, b[$, $|f(t)| \leq M$. Or, la fonction constante en M sur $[a, b[$ est d'intégrale convergente, donc par comparaison (d'integrales de fonctions positives !), $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge i.e. f est intégrable sur $[a, b[$.

— On remarque qu'une fonction f continue par morceaux sur $[a, b[$ et prolongeable par continuité en b est la restriction d'une fonction g continue par morceaux sur $[a, b]$. Or, toute fonction continue par morceaux sur un **segment** est bornée sur ce segment (*Exercice : prouver cette affirmation ; puis trouver un exemple de fonction continue par morceaux sur* $[0, 1[$ *qui n'est pas bornée*), donc f est bornée sur $[a, b[$ comme restriction d'une fonction bornée. Ainsi, d'après le cas précédent, f est intégrable sur $[a, b[$.

□

Exercice 7.

Étudier la nature des intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{t^3}{t^{\frac{7}{2}}+1}\,\mathrm{d}t \quad \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \quad \int_0^1 \sin(\frac{1}{t})\,\mathrm{d}t \quad \int_0^1 \frac{1}{e^{1-t}-1}\,\mathrm{d}t.$$

Correction.

1. Aucun souci : la fonction $t \mapsto \dfrac{t^3}{t^{\frac{7}{2}}+1}$ est continue sur le segment $[0,1]$ donc intégrable sur ce segment ! Ainsi, l'intégrale converge.
2. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t\sqrt{t}}$ est continue sur $]0,1]$. Étudions f au voisinage de 0. On a :
$$|f(t)| = \frac{\ln(1+t)}{t\sqrt{t}} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t}{t\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}}$$
Or, d'après le critère de Riemann en 0, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge car $\frac{1}{2} < 1$; donc par comparaison $\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.
3. Comme la fonction $|\sin|$ est bornée par 1 sur $\mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto |\sin(\frac{1}{t})|$ est bornée sur 1 sur $]0,1]$. Or la fonction constante en 1 est d'intégrale convergente sur $]0,1]$ d'où $\int_0^1 |\sin(\frac{1}{t})|\,\mathrm{d}t$ converge et donc $\int_0^1 \sin(\frac{1}{t})\,\mathrm{d}t$ converge. (*On pouvait bien-sûr faire directement appel à la proposition précédente, mais ça ne coûte pas très cher de refaire ce raisonnement à chaque fois !*).
4. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{e^{1-t}-1}$ est positive et continue sur $[0,1[$.
Étudions f pour t au voisinage de 1^-. On a le développement limité à l'ordre 1 de la fonction exp suivant :
$e^u = 1 + u + \underset{u\to 0}{o}(u^2)$. Ainsi, en prenant $u = 1-t \xrightarrow[t\to 1^-]{} 0$, on obtient :
$$e^{1-t} = 1 + (1-t) + \underset{t\to 1}{o}((1-t)^2)$$
Ainsi,
$$f(t) = \frac{1}{e^{1-t}-1} = \frac{1}{(1-t) + \underset{t\to 1}{o}((1-t)^2)} \underset{t\to 1^-}{\sim} \frac{1}{1-t}$$
Or, d'après le critère de Riemann en 1, $\int_0^1 \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t$ diverge car $1 \geq 1$; donc par comparaison $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

3. Intégration sur un intervalle ouvert

Dans ce paragraphe a, b peuvent être égaux à $-\infty$ et $+\infty$ respectivement et on s'intéresse aux intégrales sur l'intervalle ouvert $]a,b[$.

Définition 6. *Intégrale convergente sur* $]a, b[$

Soit $f \in C_{pm}(]a, b[, \mathbb{K})$.

S'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\int_a^c f$ **et** $\int_c^b f$ convergent, alors on note $\int_a^b f$ ou encore $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ la quantité :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans ce cas, on dit que l'intégrale $\int_a^b f$ **converge**.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_a^b f$ **diverge**.

Proposition 10.

Soit $f \in C_{pm}(]a, b[, \mathbb{K})$. Si $\int_a^b f$ converge, alors, pour tout $c \in]a, b[$, $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ convergent et on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Notation 1.

Soit $F \in C(]a, b[, \mathbb{K})$. On note

$$[F(t)]_a^b = \lim_{t \to b} F(t) - \lim_{t \to a} F(t)$$

lorsque ces deux limites existent et sont finies.

Proposition 11.

Soit $f \in C(]a, b[, \mathbb{K})$ et F une primitive de f sur $]a, b[$. L'intégrale $\int_a^b f$ converge si, et seulement si, la fonction F admet des limites finies en a et b. Dans ce cas, on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b.$$

Exercice 8.

Étudier la convergence des intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\,\mathrm{d}t \qquad \int_1^{+\infty} \sin(t) \ln\left(\frac{t^2+1}{t^2-1}\right)\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos(t)\sqrt{e^t - 1}}\,\mathrm{d}t.$$

Correction.

1. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$ est positive et continue sur $]0, 1[$. On étudie donc f au voisinage de 0 puis de 1 :
   — en 0 : on a
   $$f(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$$
   Or $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge d'après le critère de Riemann en 0 ($\frac{1}{2} < 1$), donc, par comparaison, $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\,\mathrm{d}t$ converge.
   — en 1 : on a
   $$f(t) \underset{t\to 1^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1-t}}$$
   Or $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$ converge d'après le critère de Riemann en 0 ($\frac{1}{2} < 1$), donc, par comparaison, $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\,\mathrm{d}t$ converge.

   Comme $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\,\mathrm{d}t$ et $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\,\mathrm{d}t$ convergent, par définition, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\,\mathrm{d}t$ converge.

2. La fonction $f : t \mapsto \sin(t)\ln\left(\frac{t^2+1}{t^2-1}\right)$ est continue sur $]1, +\infty[$. On étudie donc f au voisinage de 1 puis de $+\infty$:
   — en 1 : on remarque que $\ln\left(\frac{t^2+1}{t^2-1}\right) = \ln(t^2+1) - \ln(t+1) - \ln(t-1)$ donc :
   $$|f(t)| \underset{t\to 1^+}{\sim} -\sin(1)\ln(t-1) = \underset{t\to 1^+}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t-1}}\right)$$
   Or $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}}\,\mathrm{d}t$ converge d'après le critère de Riemann en 1 ($\frac{1}{2} < 1$), donc, par comparaison, $\int_1^2 |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.
   — en $+\infty$: on remarque que $\ln\left(\frac{t^2+1}{t^2-1}\right) = \ln(1 + \frac{2}{t^2-1})$ donc, comme $\frac{2}{t^2-1} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$:
   $$|f(t)| \leq \ln\left(\frac{t^2+1}{t^2-1}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{2}{t^2}$$
   Or $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge d'après le critère de Riemann en $+\infty$ ($2 > 1$), donc, par comparaison, $\int_2^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

   Comme $\int_1^2 \frac{1}{|}f(t)|\,\mathrm{d}t$ et $\int_2^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ convergent, par définition, $\int_0^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge. Ainsi, f est intégrable sur $]1, +\infty[$ et donc $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

3. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\cos(t)\sqrt{e^t-1}}$ est continue et positive sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. On étudie donc f au voisinage de 0 puis de $\frac{\pi}{2}$.
   — en 0 : comme $e^t - 1 \underset{t\to 0}{\sim} t$, on a :
   $$f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$$
   Or $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge d'après le critère de Riemann en 0 ($\frac{1}{2} < 1$), donc, par comparaison, $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

— <u>en $\frac{\pi}{2}$</u> : on remarque que $\cos(t) = \sin(\frac{\pi}{2} - t) \underset{t \to \frac{\pi}{2}}{\sim} \frac{\pi}{2} - t$ donc :

$$f(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{1}{(\frac{\pi}{2} - t)\sqrt{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}}$$

Or $\int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\frac{\pi}{2} - t}\,\mathrm{d}t$ diverge d'après le critère de Riemann en $\frac{\pi}{2}$ $(1 \geq 1)$, donc, par comparaison, $\int_1^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Une des deux intégrales (au moins) $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_1^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Remarque : si on avait commencé par faire l'étude en $\frac{\pi}{2}$, on aurait pu conclure directement à la divergence de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt$ sans faire l'étude en 0.

Partie C

Propriétés de l'intégrale généralisée

Dans cette partie, I désigne un intervalle quelconque (ouvert, semi-ouvert ou fermé, de longueur finie ou infinie) de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et on note a et b ses extrémités (possiblement infinies).

1. Propriétés de l'intégrale

Dans ce paragraphe, on résume et généralise les proporiétés de l'intégrale généralisée ; les démonstrations sont laissées à titre d'exercices au lecteur.

a. Espace de fonctions continues par morceaux intégrables

Proposition 12.

L'ensemble $E = \{f \in C_{pm}(I, \mathbb{K}) \mid f \text{ est intégrable}\}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et l'application $f \mapsto \displaystyle\int_I f$ est une forme linéaire sur E.
De plus, cette application est positive et croissante.

b. Inégalités

Proposition 13. *Inégalité triangulaire*

Soit $f, g \in C_{pm}(I, \mathbb{K})$ des fonctions intégrables. Alors

$$\int_I |f(t) + g(t)| \,\mathrm{d}t \leq \int_I |f(t)| \,\mathrm{d}t + \int_I |g(t)| \,\mathrm{d}t.$$

Proposition 14.

Soit $f \in C_{pm}(I, \mathbb{K})$ une fonction intégrable. Alors

$$\left| \int_I f(t) \,\mathrm{d}t \right| \leq \int_I |f(t)| \,\mathrm{d}t.$$

c. Séparation

Proposition 15. *Séparation*

Si f est une fonction continue, positive et intégrable sur I, alors

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \text{ si, et seulement si, } f = \mathbf{0}.$$

d. Relation de Chasles

Proposition 16.

Soit $f \in C_{pm}(I, \mathbb{K})$ une fonction intégrable. Alors pour tout $a, b, c \in I$ on a :

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. Calculs d'intégrales

a. Intégration par parties

Proposition 17. *Intégration par parties*

Soit $f, g \in C^1(I, \mathbb{K})$. Si la fonction produit fg admet des **limites finies** aux bornes a et b de I, alors les intégrales $\displaystyle\int_I fg'$ et $\displaystyle\int_I f'g$ sont de même nature. De plus, en cas de convergence, on a :

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration.

Quitte à scinder l'intervalle I en deux et utiliser la définition 6, on peut supposer "qu'il n'y a de problème potentiel qu'en b" i.e. $I = [a, b[$.

Soit $x \in I$. Comme f et g sont de classe C^1 sur le segment $[a, x]$, alors d'après le théorème d'intégration par parties sur un segment (vu en Sup' - on rappelle que sa démonstration repose sur la formule de la dérivée du produit de fonctions !), on a :

$$\int_a^x f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^x - \int_a^x f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t. \quad (*)$$

On suppose que le produit fg admet une limite finie en b (d'après notre réduction initiale, c'est déjà le cas en a car f et g sont en particulier continues en a). Alors $[f(t)g(t)]_a^x$ tend vers la quantité finie $[f(t)g(t)]_a^b$ lorsque x tend vers b. Ainsi, d'après l'égalité $(*)$, $\int_a^x f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand x tend vers b si, et seulement si, $\int_a^x f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand x tend vers b d'où par définition, $\displaystyle\int_I fg'$ et $\displaystyle\int_I f'g$ sont de même nature.

De plus, en cas de convergence de $\displaystyle\int_I fg'$ ou $\displaystyle\int_I f'g$, toujours d'après $(*)$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_a^x f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t &= \lim_{x\to b}\int_a^x f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{x\to b}\left([f(t)g(t)]_a^x - \int_a^x f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t\right) \\
\int_a^x f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t &= [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b `f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

□

Exercice 9.

1. Justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$
2. Justifier la convergence puis calculer $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
3. On note, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{(t^2+1)^n}\,\mathrm{d}t$.
   i) Justifier l'existence de I_n pour $n\in\mathbb{N}^*$.
   ii) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Déterminer une relation entre I_{n+1} et I_n. En déduire I_n.

Correction.

1. On pose $f : t\mapsto\frac{\sin(t)}{t}$. Alors f est continue sur $]0,+\infty[$ et comme $|f(t)|\underset{t\to0^+}{\sim}1$, f est intégrable sur $]0,1]$ (elle est même prolongeable par continuité en 0 par $f(0)=1$). Par suite $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
   On effectue une intégration par paties pour prouver la convergence de $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$. On pose $u : t\mapsto\frac{1}{t}$ et $v : t\mapsto-\cos(t)$. Alors u, v sont C^1 sur $[1,+\infty[$; le produit uv est défini en 1, vaut $u(1)v(1)=-\cos(1)$ en ce point et $u(t)v(t)=\frac{-\cos(t)}{t}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$.
   Ainsi, par intégration par parties, $\int_1^{+\infty}u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t=\int_1^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty}u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t=\int_1^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.
   Etudions cette seconde intégrale : la fonction $g : t\mapsto\frac{\cos(t)}{t^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$ et en $+\infty$, on a :
   $$|g(t)|=\frac{|\cos(t)|}{t^2}\leq\frac{1}{t^2}\text{ intégrable sur }[1,+\infty[\text{ d'après le critère de Riemann en }+\infty$$
   Ainsi, par comparaison, g est intégrable sur $[1,+\infty[$ et donc les intégrales $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ convergent.
   Comme $\int_0^1\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge, il en résulte, par la relation de Chasles, que

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

2. Ici, on peut étudier directement la nature de cette intégrale avec les techniques vues précédemment. On pose $f : t \mapsto \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}$. Alors f est continue sur $]0,1[$. On étudie donc f au voisinage de 0 et de 1 :
   — <u>en 0 :</u> on a $\ln(1-t^2) \underset{t\to 0}{\sim} t^2$ donc $f(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 1$. Ainsi f est prolongeable par continuité en 0 (par 1) et donc intégrable au voisinage de 0. Ainsi, $\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
   — <u>en 1 :</u> on remarque que $\ln(1-t^2) = \ln(1-t) + \ln(1+t)$ donc :
   $$|f(t)| \underset{t\to 1}{\sim} -\ln(1-t) = \underset{t\to 0}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$$
   Or, d'après le critère de Riemann en 1, $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ converge, donc par comparaison, f est intégrable au voisinage de 1. Ainsi, $\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

   Par suite, $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

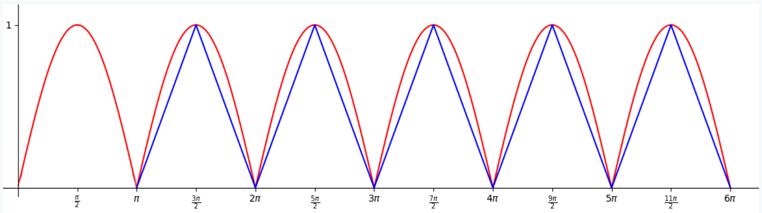
   Passons au calcul de $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$: utilisons une intégration par partie. On va se rendre compte qu'il faut parfois être subtil dans nos primitives :
   — *Premier essai, sans subtilité :* on considère les deux fonctions u, v de classe C^1 sur $]0,1[$ telles que, pour $t \in]0,1[$:
   $$u'(t) = \frac{1}{t^2} \qquad u(t) = -\frac{1}{t}$$
   $$v(t) = \ln(1-t^2) \qquad v'(t) = -\frac{2t}{1-t^2}.$$
   Pour appliquer le théorème d'intégration par parties, il faut vérifier que uv admet des limites en 0 et 1. Or ici, on a $\lim_{t\to 1} u(t)v(t) = +\infty$ "à cause" du $\ln(1-t^2)$... oups ! On ne peut donc pas faire notre IPP !
   Mais on se rend compte qu'on peut faire en sorte de compenser le fait que $\ln(1-t^2)$ tende vers $-\infty$ en choisissant plus intelligemment notre primitive de $\frac{1}{t^2}$: en effet, ici, $-\frac{1}{t}$ tend vers -1 alors qu'on voudrait "au minimum" que la primitive tende vers 0 pour potentiellement compenser le ∞ ! Ce qui nous amène au :
   — *Deuxième essai, avec subtilité :* on considère les deux fonctions u, v de classe C^1 sur $]0,1[$ telles que, pour $t \in]0,1[$:
   $$u'(t) = \frac{1}{t^2} \qquad u(t) = 1 - \frac{1}{t} = -\frac{1-t}{t}$$
   $$v(t) = \ln(1-t^2) \qquad v'(t) = -\frac{2t}{1-t^2}.$$
   Cette fois-ci, on a bien une limite finie en 1 :
   $$u(t)v(t) = -\frac{(1-t)\ln(1-t^2)}{t} \xrightarrow[t\to 1]{} 0$$
   et en 0 :
   $$u(t)v(t) = -\frac{(1-t)\ln(1-t^2)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 0.$$

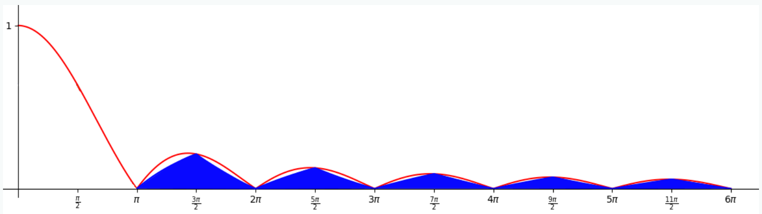
Ainsi, uv admet des limites finies en 0 et 1, donc d'après le théorème d'intégration par parties, $\int_0^1 u'v$ et $\int_0^1 uv'$ sont de même nature. Or on a prouvé que $\int_0^1 u'v$ converge, donc $\int_0^1 uv'$ converge et toujours d'après le théorème d'intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t \\
&= [u(t)v(t)]_0^1 - \int_0^1 u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^1 \frac{1-t}{t} \times \frac{2t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= -2\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t \\
\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t &= -2\ln(2).
\end{aligned}$$

Remarque : On vient de montrer dans l'exercice précédent que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge, mais il est intéressant de remarquer que la fonction $f : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$ i.e. $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge. Ce qui montre que la réciproque de "f intégrable sur I implique $\int_I f$ converge" est fausse.

Voici une démonstration de la non-intégrabilité de f sur $[0, +\infty[$. Tout d'abord, exposons l'idée de cette démonstration :





On va minorer la fonction $|sin|$ sur $[\pi, +\infty[$ par la fonction g "triangulaire" π-périodique dont le graphe est représenté en bleu dans le premier graphique. Ainsi, l'intégrale. Ainsi, $\int_\pi^{n\pi} \frac{|sin(x)|}{x}\,\mathrm{d}x \geq \int_\pi^{n\pi} \frac{g(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ et cette dernière intégrale représentée par l'aire bleu sur le deuxième graphique se minore aisément par la somme partielle d'une série divergente. On pourra ainsi conclure la divergence de l'intégrale $\int_\pi^{+\infty} \frac{|sin(x)|}{x}\,\mathrm{d}x$.

Voyons cela rigoureusement :
La fonction $|\sin|$ est π-périodique sur $\mathbb{R}$ et sur $[0, \pi]$ elle est égale à la fonction sin. Comme, pour

tout $x \in [0,\pi]$, $\sin''(x) = -\sin(x) \leq 0$, sin est concave sur $[0,\pi]$. Ainsi, sa courbe est au dessus de la corde entre les abscisses 0 et $\frac{\pi}{2}$ et de la corde entre les abscisses $\frac{\pi}{2}$ et π.
Ces dernières ont pour équations respectives $y = \frac{2}{\pi}x$ et $y = -\frac{2}{\pi}(x-\pi)$.
On considère alors une fonction g définie sur $[0,\pi]$, ayant pour image l'union de ces deux cordes, par exemple :

$$g : x \mapsto \begin{cases} \frac{2}{\pi}x & \text{si } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ -\frac{2}{\pi}(x-\pi) & \text{si } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

Alors g est continue sur $[0,\pi]$, et pour tout $x \in [0,\pi]$, $g(x) \leq \sin(x)$.
On pose, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $x_k = (2k+1)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Par π-périodicité de $|\sin|$, on a, pour tout $x \in [x_k - \frac{\pi}{2}, x_k - \frac{\pi}{2}](= [0,\pi] + k\pi)$:

$$|\sin(x)| \geq g(x - k\pi).$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, en utilisant un changement de variable $t = x - k\pi$, on a :

$$\int_{x_k - \frac{\pi}{2}}^{x_k + \frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(x)|}{x}\,\mathrm{d}x \geq \int_{x_k - \frac{\pi}{2}}^{x_k + \frac{\pi}{2}} \frac{g(x-k\pi)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \frac{g(t)}{t+k\pi}\,\mathrm{d}t \geq \frac{1}{(k+1)\pi}\int_0^{\pi} g(t)\,\mathrm{d}t$$

Par suite, par symétrie du graphe de g par rapport à la droite $t = \frac{\pi}{2}$, on a :

$$\int_{x_k - \frac{\pi}{2}}^{x_k + \frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(x)|}{x}\,\mathrm{d}x \geq \frac{2}{(k+1)\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi}t\,\mathrm{d}t = \frac{4}{(k+1)\pi^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2(k+1)}.$$

Alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$, comme $x_1 - \frac{\pi}{2} = \pi$ et $x_n + \frac{\pi}{2} = (n+1)\pi$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $x_k + \frac{\pi}{2} = (k+1)\pi = x_{k+1} - \frac{\pi}{2}$, on a :

$$\int_{\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_k - \frac{\pi}{2}}^{x_k + \frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(x)|}{x}\,\mathrm{d}x \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2(k+1)}$$

Pour $x \geq \pi$, on pose $n(= n_x) = E(\frac{x}{\pi} - 1)$; alors $x \geq (n+1)\pi$ et $n \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et donc, $\frac{1}{2(k+1)}$ étant le terme général d'une série à termes positifs divergente :

$$\int_{\pi}^{x} \frac{|\sin(x)|}{x}\,\mathrm{d}x \geq \int_{\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x}\,\mathrm{d}x \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2(k+1)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

Il en résulte que $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x}\,\mathrm{d}x$ diverge et donc $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x}\,\mathrm{d}x$ également. Ainsi, f n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$ mais son intégrale sur $[0,+\infty[$ converge.

b. Changement de variable

Dans ce paragraphe, on considère $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$.

Proposition 18. *Changement de variable*

Soit $f \in C(]a,b[,\mathbb{K})$ et $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ une fonction de classe C^1, bijective et strictement monotone. Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} (f\circ\varphi)(u).\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature. En cas de convergence, on a :

— si φ est croissante : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(u).\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$;

— si φ est décroissante : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\beta^\alpha (f\circ\varphi)(u).\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$.

Exercice 10.

Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt$ puis la calculer grâce au changement de variable $u = \frac{1}{t}$.

3. Intégration des relations de comparaison

Proposition 19.

Soit $f \in C([a,b[,\mathbb{K})$ et $g \in C([a,b[,\mathbb{R})$ une fonction **positive**. On suppose $f = O(g)$.

- Si $\displaystyle\int_a^b g$ converge, alors f est intégrable sur $[a,b[$ et on a :

$$\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = O\left(\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t\right) \text{ quand } x \to b$$

- Si $\displaystyle\int_a^b g$ diverge, on a :

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = O\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right) \text{ quand } x \to b$$

Ce résultat est toujours vrai lorsqu'on remplace les O par o.

Exercice 11.

1. Montrer que en $+\infty$, $\displaystyle\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t = o\left(\int_1^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)$.
2. En déduire un équivalent simple de $\displaystyle\int_1^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$ en $+\infty$ (utiliser une IPP).

Proposition 20.

Soit $f \in C([a,b[,\mathbb{K})$ et $g \in C([a,b[,\mathbb{R})$ une fonction **positive**. On suppose $f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x)$.

- Si $\displaystyle\int_a^b g$ converge, alors f est intégrable sur $[a,b[$ et on a :

$$\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b}{\sim} \int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

- Si $\displaystyle\int_a^b g$ diverge, alors f n'est pas intégrable sur $[a,b[$ et on a :

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b}{\sim} \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$