Chapitre III

Espaces vectoriels normés

Table des matières

Partie A

Normes et espaces vectoriels normés

Dans cette partie, E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Définitions de base et premières propriétés

Définition 1. *Norme*

On appelle **norme** sur l'espace vectoriel, une application $N : E \to \mathbb{R}$ qui vérifie les axiomes suivants :

i) (Positivité) pour tout $x \in E$,

$$N(x) \geq 0;$$

ii) (Séparation) pour tout $x \in E$,

$$N(x) = 0 \text{ implique } x = 0_E;$$

iii) (Homogénéité) pour tous $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$N(\lambda x) = |\lambda| N(x);$$

iv) (Inégalité triangulaire) pour tous $x, y \in E$,

$$N(x+y) \leq N(x) + N(y).$$

Si N est une norme sur E, le couple (E, N) est appelé **espace vectoriel normé**.

Il est souvent d'usage de noter $\|\cdot\|$ d'un espace vectoriel normé et donc $\|x\|$ la norme d'un vecteur x de E.

Proposition 1.

Soit N une norme sur E. Alors $N(0_E) = 0$ et, pour tout $x \in E$, $N(-x) = N(x)$.

Démonstration.

D'après l'axiome iii) appliqué à $\lambda = 0$, on a :

$$N(0_E) = N(0.0_E) = 0N(0_E) = 0.$$

De plus, pour tout $x \in E$, $N(-x) = N((-1).x) = |-1|N(x) = N(x)$. □

Exercice 1.

Soit $N : E \to \mathbb{R}_+$. Montrer que l'axiome d'homogénéité pour N est équivalent à :

$$\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad N(\lambda x) \leq |\lambda| N(x).$$

Correction.

La condition est nécessaire car $=$ implique $\leq$. Montrons qu'elle est suffisante :
1er cas : $\lambda = 0$. Pour tout $x \in E$, on a $N(0.x) \leq 0N(x) = 0$. Or N est positive, donc $N(0.x) = 0 = 0N(x)$.
2eme cas : $\lambda \neq 0$. Pour tout $x \in E$,

$$N(x) = N(\frac{1}{\lambda}\lambda x) \leq \frac{1}{|\lambda|} N(\lambda x).$$

Par suite, $N(\lambda x) \geq |\lambda| N(x)$.
D'où le résultat.

Exemple 1.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $< \cdot, \cdot >$ un produit scalaire sur E et $\| \cdot \|$ sa norme associée (i.e. $x \mapsto \|x\| = \sqrt{< x, x >}$). La terminologie utilisée est bien justifiée : en effet, $\| \cdot \|$ est bien une norme sur E au sens de la définition 1.

On rappelle qu'un produit scalaire sur E est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E. On utilise donc ces propriétés. Soit $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

i) (Positivité) On a $< x, x > \geq 0$ par positivité du produit scalaire, donc $\| \cdot \|$ est bien définie et positive.

ii) (Séparation) . Si $\|x\| = 0_E$, alors, $\sqrt{< x, x >} = 0$. Ainsi, $< x, x >= 0$, d'où par définie positivité du produit scalaire, $x = 0_E$.

iii) (Homogénéité) On a, par linéarité du produit scalaire par rapport à chaque variable :

$$\|\lambda x\| = \sqrt{< \lambda x, \lambda x >} = \sqrt{\lambda^2 < x, x >} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{< x, x >} = |\lambda| \|x\|.$$

iv) (Inégalité triangulaire) On a, en utilisant la bilinéarité du produit scalaire et le théorème de Cauchy-Schwarz :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 < x, y > + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|.\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

D'où le résultat.

Proposition 2. *Seconde Inégalité triangulaire*

Soit N une norme sur E. Pour tous $x, y \in E$ on a :

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x - y) \leq N(x) + N(y).$$

Démonstration.

Soit $x, y \in E$. On a $N(x) = N(x-y+y) \leq N(x-y)+N(y)$. Par suite, $N(x)-N(y) \leq N(x-y)$. On a de même $N(y) - N(x) \leq N(x-y)$ en remarquant que $N(y) = N(y-x+x)$. □

Définition 2. *Vecteur unitaire*

Soit N une norme sur E.
On dit qu'un vecteur x de E est **unitaire** si $N(x) = 1$.

Notation 1. *Boule et sphère unité*

Soit N une norme sur E. On note :
— $S(0_E, 1) = \{x \in E \mid N(x) = 1\}$; on appelle cet ensemble **sphère unité** de E ;
— $B_f(0_E, 1) = \{x \in E \mid N(x) \leq 1\}$; on appelle cet ensemble **boule unité fermée** de E ;
— $B(0_E, 1) = \{x \in E \mid N(x) < 1\}$; on appelle cet ensemble **boule unité ouverte** de E ;

Définition 3.

Soit N une norme sur E et $x \in E$ un vecteur non nul.
On appelle **vecteur unitaire associé à** x, le vecteur unitaire $\frac{1}{N(x)}x$.

Remarque 1.

Pour $x \neq 0_E$, le vecteur unitaire associé à x est clairement colinéaire à x.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il n'existe que deux vecteurs unitaires colinéaires à x :

$$\frac{1}{N(x)}x \text{ et } -\frac{1}{N(x)}x.$$

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il en a une infinité : ce sont exactement les

$$\frac{e^{it}}{N(x)}x \text{ pour } t \in [0, 2\pi[.$$

Exercice 2.

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ muni de sa norme canonique donnée par $\|(a,b)\| = \sqrt{a^2+b^2}$.
Dessiner la sphère unité et les boules unité fermée et ouverte de cet espace.

2. Premiers exemples d'espaces vectoriels normés

a. Quelques normes sur $\mathbb{K}^n$

Sur l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ il existe de nombreuses normes qui permettent de le munir d'une structure d'espace vectoriel normé. En voici quelques unes parmi les plus fréquemment "rencontrées" :

Définition 4. *Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$*

Soit $x = (x_1, ..., x_n)$ un vecteur de $\mathbb{K}^n$. On définit :

— La **norme un**, notée $\|\cdot\|_1$:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |x_1| + ... + |x_n|.$$

— La **norme deux**, notée $\|\cdot\|_2$:

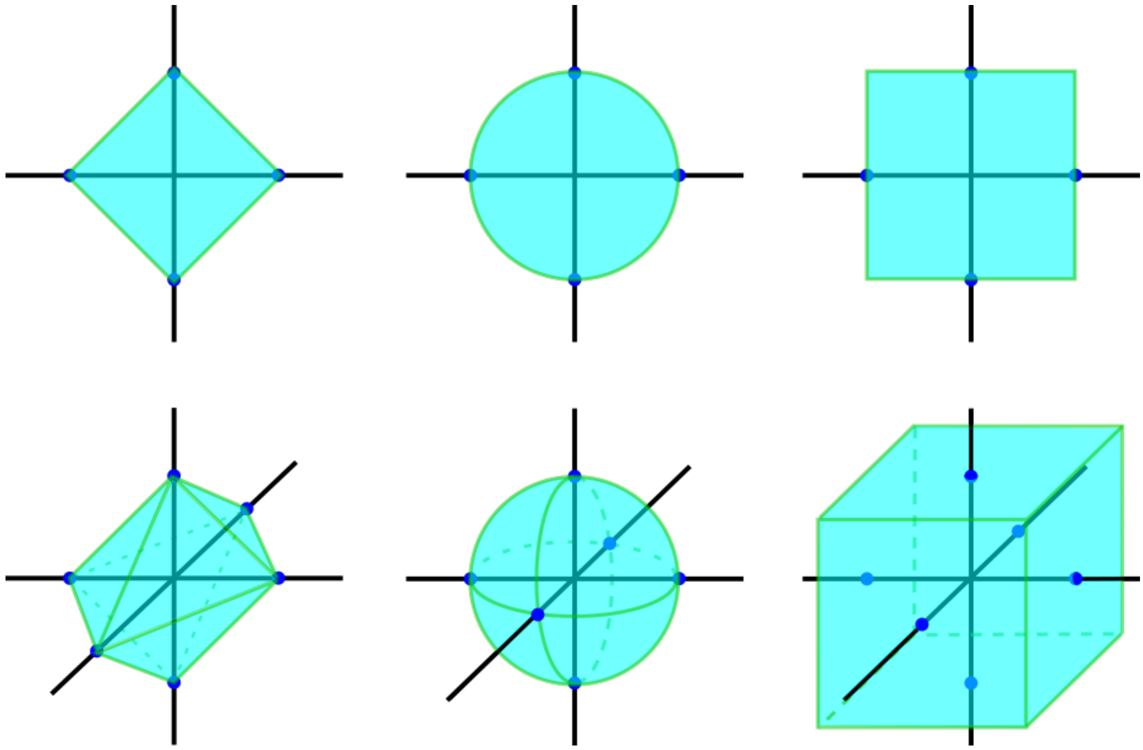
$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = \sqrt{|x_1|^2 + ... + |x_n|^2}.$$

— La **norme infinie**, notée $\|\cdot\|_\infty$:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|) = \max(|x_1|, ..., |x_n|).$$

On remarque immédiatement que dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la norme deux correspond à la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

Voici une illustration dans $\mathbb{R}^2$ puis $\mathbb{R}^3$ des boules des normes un, deux et infini (de gauche à droite).



Exercice 3.

Dessiner les boules des normes un, deux et infinie dans $\mathbb{R}^4$.

Correction.

includegraphics error, file not found.

Proposition 3.

Les normes un, deux, et infini sont bien des normes sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration.

Pour cette démonstration, nous aurons besoin de l'inégalité triangulaire de la fonction valeur absolue définie sur $\mathbb{R}$. Rappelons ici une démonstration de cette inégalité :

Inégalité triangulaire de la valeur absolue :

La fonction "valeur absolue" de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ est définie de la façon suivante :

$$|\cdot| : x \mapsto |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Montrons que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $|x+y| \leq |x| + |y|$.

Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Quitte à échanger x et y, on peut supposer que $x \leq y$.

— 1er cas : x, y sont positifs. Alors $x + y \geq 0$ et ainsi, $|x| = x$, $|y| = y$ et $|x+y| = x+y$. Par suite, on a :

$$|x+y| = x+y = |x|+|y| \leq |x|+|y|$$

— 2eme cas : x, y sont négatifs. Alors $x+y \leq 0$ et ainsi, $|x| = -x$, $|y| = -y$ et $|x+y| = -(x+y) = -x-y$. Par suite, on a :

$$|x+y| = -x-y = |x|+|y| \leq |x|+|y|$$

— 3eme cas : x est négatif et y positif. Alors $|x| = -x$ et $|y| = y$. On distingue deux sous-cas :

  — Si $|x| \geq |y|$, alors $-x \geq y$ donc $x+y \leq 0$. Par suite, $|x+y| = -x-y$ et ainsi, comme $-|y| \leq 0 \leq |y|$:

$$|x+y| = -x-y = |x|-|y| \leq |x|+|y|$$

  — Si $|x| < |y|$, alors $-x < y$ donc $x+y > 0$. Par suite, $|x+y| = x+y$ et ainsi, comme $-|x| \leq 0 \leq |x|$:

$$|x+y| = x+y = -|x|+|y| \leq |x|+|y|$$

Dans tous les cas, on a $|x+y| \leq |x|+|y|$.

Il en résulte que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $|x+y| \leq |x|+|y|$.

Démontrons que les normes 1, 2 et infinie sont bien des normes sur $\mathbb{R}^n$. Ces fonctions sont bien définies : pour la norme 1, il s'agit d'une somme finie ; pour la norme 2, il s'agit de la racine d'une somme finie de nombres positifs (carrés) et donc positive ; pour la norme infinie, il s'agit du maximum d'un ensemble fini.

- $\|\cdot\|_1$: Soit $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

  i) (Positivité) pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|x_i| \geq 0$, donc :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \geq 0.$$

ii) (Séparation) On suppose que $\|x\|_1 = 0$. Alors $\sum_{i=1}^n |x_i| = 0$. Or si une somme de nombres positifs est nulle, tous ses termes sont nuls (en effet, chaque terme d'une somme de nombres positifs est compris entre 0 et cette somme) ; ainsi, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|x_i| = 0$ et donc $x_i = 0$. Par suite, $x = (0, ..., 0) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

iii) (Homogénéité) On a, en factorisant par $|\lambda|$:

$$\|\lambda x\|_1 = \sum_{i=1}^n \underbrace{|\lambda x_i|}_{=|\lambda|.|x_i|} = |\lambda| \sum_{i=1}^n |x_i| = |\lambda|.\|x\|_1.$$

iv) (Inégalité triangulaire) Par définition de l'addition dans $\mathbb{R}^n$, on a $x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$ et ainsi, par inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$:

$$\|x + y\|_1 = \sum_{i=1}^n \underbrace{|x_i + y_i|}_{\leq |x_i|+|y_i|} \leq \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

Il en résulte que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

- $\|\cdot\|_2$: On rappelle que l'application $(\cdot|\cdot)$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(x|y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ (il s'agit du *produit scalaire canonique* de $\mathbb{R}^n$) et on remarque que $\|\cdot\|_2$ est la norme associée à ce produit scalaire. Ainsi, d'après l'exemple 1, $\|\cdot\|_2$ est un norme sur $\mathbb{R}^n$.

- $\|\cdot\|_\infty$: Soit $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

i) (Positivité) pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|x_i| \geq 0$, donc en particulier :

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|) \geq 0.$$

ii) (Séparation) On suppose que $\|x\|_\infty = 0$. Alors $\max_{1 \leq i \leq n}(|x_i|) = 0$. Ainsi, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $0 \leq |x_j| \leq \max_{1 \leq i \leq n}(|x_i|) = 0$, d'où $|x_j| = 0$ et donc $x_j = 0$. Par suite, $x = (0, ..., 0) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

iii) (Homogénéité) On a $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n}(|x_i|)$ qui est un maximum bien défini donc il existe $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $\|x\|_\infty = |x_{i_0}|$. Ainsi, on a, d'une part, comme $|\lambda|$ positif :

$$\|\lambda x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda x_i| \geq |\lambda x_{i_0}| = |\lambda|.|x_{i_0}| = |\lambda| \|x\|_\infty;$$

et, d'autre part, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|x_i| \leq |x_{i_0}|$ donc, toujours par positivité de $|\lambda|$:

$$|\lambda x_i| = |\lambda|.|x_i| \leq |\lambda|.|x_{i_0}| = |\lambda| \|x\|_\infty.$$

Donc, en particulier, $|\lambda| \|x\|_\infty$ est plus grand que le maximum des $|\lambda x_i|$ i.e. $|\lambda| \|x\|_\infty \geq \|\lambda x\|_\infty$. Par suite, $\|\lambda x\|_\infty = |\lambda| \|x\|_\infty$.

iv) (Inégalité triangulaire) Par définition de l'addition dans $\mathbb{R}^n$, on a $x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$. Il existe $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $\|x + y\|_\infty = |x_{i_0} + y_{i_0}|$. Ainsi, par inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$:

$$\|x + y\|_\infty = |x_{i_0} + y_{i_0}| \leq |x_{i_0}| + |y_{i_0}| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Il en résulte que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

$\square$

Remarque 2.

Soit $p \geq 1$ un réel. On peut généraliser l'idée des normes un et deux : on montrera en exercice que

$$x = (x_1, ..., x_n) \mapsto \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

est une norme sur $\mathbb{K}^n$. On l'appelle la **norme** p.

b. Exemples de normes sur des espaces de suites

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites indexées par $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On définit les normes suivantes sur certains de ses sous-espaces :

Définition 5.

— On note $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ l'ensemble des suites $u = (u_n)$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum u_n$ est absolument convergente. On définit la **norme un**, notée $\|\cdot\|_1$ sur $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ par :

$$\text{Pour } u = (u_n) \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K}), \quad \|u\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|.$$

— On note $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ l'ensemble des suites $u = (u_n)$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum u_n^2$ est absolument convergente. On définit la **norme deux**, notée $\|\cdot\|_2$ sur $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ par :

$$\text{Pour } u = (u_n) \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K}), \quad \|u\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2}.$$

— On note $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ l'ensemble des suites *bornées* de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On définit la **norme infinie**, notée $\|\cdot\|_\infty$ sur $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ par :

$$\text{Pour } u = (u_n) \in \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K}), \quad \|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}}(|u_n|).$$

Exercice 4.

Montrer que $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ et $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Que peut-on dire de l'ordre (au sens de l'inclusion) de ces espaces ?

Correction (exercice : rédiger cette démonstration correctement !).

Il est clair que la suite constante en 0 appartient à ces trois ensembles. Ensuite, on utilise le fait qu'une série dont le terme général est la somme des termes généraux de deux séries absolument convergentes est absolument convergente et que $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ pour montrer que $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ et $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Enfin, pour $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, on utilise l'inégalité triangulaire et la sous-additivité du sup.

Soit $u = (u_n) \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. Alors u_n est le terme général d'une série absolument convergente donc

u converge vers 0 quand $n \to \infty$. Par suite, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $|u_n| \leq 1$. On note $v = (v_n)$ avec $v_n = u_{n+n_0}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Les séries de termes généraux u_n et v_n sont de même nature donc $\sum v_n$ est absolument convergente. De plus, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \leq 1$, on a $v_n^2 \leq |v_n|$; par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum v_n^2$ est (absolument) convergente.
Or $\sum v_n^2$ et $\sum u_n^2$ sont de même nature donc u appartient à $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. Il en résulte que $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \subset \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$.
Ensuite, si $u = (u_n)$ appartient à $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ alors (u_n^2) converge vers 0 et donc (u_n) aussi. Par suite, (u_n) est bornée (exercice : montrer cette assertion) et donc u appartient $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K})$.

On obtient au final les inclusions suivantes :

$$\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \subset \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \subset \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K}).$$

Proposition 4.

Les couples $(\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K}), \|\cdot\|_1)$, $(\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$, $(\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ sont des espaces vectoriels normés.

Démonstration.

N'oublions pas que la première chose à faire avant de se lancer dans l'étude des axiomes de norme pour une fonction, est de montrer que celle-ci est bien définie ! En effet, si on "essayait" $\|\cdot\|_1$ sur $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, on pourrait vérifier que les axiomes de norme sont bien satisfaits mais qu'en fait, la fonction est "très mal" définie : $\|\cdot\|_1$ n'est pas définie en la suite constante en 1 par exemple.

- $\|\cdot\|_1$: Montrons que la fonction $\|\cdot\|_1$ est bien définie sur $\ell^1 = \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$. Alors $\sum u_n$ est une série numérique absolument convergente i.e. la série $\sum |u_n|$ converge donc la quantité $\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ est bien définie.
  Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
  i) (Positivité) La somme d'une série à termes positifs convergente est positive (car la limite d'une suite convergente à valeurs positives est positive ⇠ exercice) donc
  $$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{|u_n|}_{\geq 0} \geq 0.$$
  ii) (Séparation) On suppose que $\|u\|_1 = 0$. Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| = 0$. Comme $\sum |u_n|$ est une série à termes positifs, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles est croissante et ainsi, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
  $$0 \leq |u_n| \leq S_n \leq \lim_{k\to+\infty} S_k = \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k| = 0$$
  Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$. Par suite, $u = (0)_{n\in\mathbb{N}} = 0_{\ell^1}$.
  iii) (Homogénéité) On a, par linéarité de l'application $w = (w_n) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$:
  $$\|\lambda u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{|\lambda u_n|}_{=|\lambda|.|u_n|} = |\lambda| \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| = |\lambda|.\|u\|_1.$$

iv) (Inégalité triangulaire) Par définition de l'addition dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on a $u+v=(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et ainsi, par inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$ et par croissance et linéarité de l'application $w=(w_n)\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}w_n$:

$$\|u+v\|_1=\sum_{n=0}^{+\infty}\underbrace{|u_n+v_n|}_{\leq|u_n|+|v_n|}\leq\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|+\sum_{n=0}^{+\infty}|v_n|=\|u\|_1+\|v\|_1.$$

Il en résulte que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur ℓ^1.

- $\|\cdot\|_2$: On note $\ell^2=\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$ et on considère l'application $(\cdot|\cdot)$ de $\ell^2\times\ell^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(u|v)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_nv_n$. Celle-ci est un produit scalaire sur ℓ^2 (nous allons le montrer ci-après) et on remarque que $\|\cdot\|_2$ est la norme associée à ce produit scalaire. Ainsi, d'après l'exemple 1, $\|\cdot\|_2$ est un norme sur ℓ^2.
Montrons que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur ℓ^2 i.e. une forme bilinéaire symétrique sur ℓ^2.
Encore une fois, il s'agit premièrement de montrer que $(\cdot|\cdot)$ est bien définie de $\ell^2\times\ell^2$ dans $\mathbb{R}$: pour $u,v\in\ell^2$, comme pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $2|ab|\leq a^2+b^2$, on a, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$|u_nv_n|\leq\frac{u_n^2+v_n^2}{2}$$

Or, par hypothèses, u_n^2 et v_n^2 sont des termes généraux de séries convergentes d'où $\frac{u_n^2+v_n^2}{2}$ l'est aussi et ainsi, par comparaison $\sum|u_nv_n|$ converge.
Par suite, la série numérique $\sum u_nv_n$ est absolument convergente et donc convergente. Il en résulte que la quantité $(u|v)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_nv_n$ est bien définie.
Soit $u=(u_n),v=(v_n),w=(w_n)\in\ell^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

i) (Symétrie) Par commutativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$, on a :

$$(v|u)=\sum_{n=0}^{+\infty}v_nu_n=\sum_{n=0}^{+\infty}u_nv_n=(u|v).$$

ii) (Bilinéarité) Comme $(\cdot|\cdot)$ est symétrique, il suffit de montrer la linéarité par rapport à la première variable. Par linéarité de l'application $(s_n)\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}s_n$, on a :

$$(\lambda u+v|w)=\sum_{n=0}^{+\infty}\underbrace{(\lambda u_n+v_n)w_n}_{=\lambda u_nw_n+v_nw_n}=\lambda\sum_{n=0}^{+\infty}u_nw_n+\sum_{n=0}^{+\infty}v_nw_n=\lambda(u|w)+(v|w).$$

iii) (Définie positivité) On a, d'une part

$$(u|u)=\sum_{n=0}^{+\infty}\underbrace{u_n^2}_{\geq0}\geq0$$

et d'autre part, si $(u|u)=0$, alors, pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$0\leq u_k^2\leq\sum_{n=0}^{+\infty}u_n^2=(u|u)=0,$$

donc $u_k=0$. Par suite, $u=(0)_{n\in\mathbb{N}}=0_{\ell^2}$.

Ceci montre que $(\cdot|\cdot)$ est bien un produit scalaire sur ℓ^2.

- $\|\cdot\|_\infty$: Montrons que la fonction $\|\cdot\|_\infty$ est bien définie sur $\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{K})$. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$. Comme u est bornée, l'ensemble $U = \{|u_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ (en effet, $|u_0| \in U$ et on utilise le caractère borné de u pour montrer que U est majoré) donc U possède une borne supérieure. Ainsi, la quantité $\|u\|_\infty = \sup U$ est bien définie.

  Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $U = \{|u_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$, $V = \{|v_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$, $W = \{|\lambda u_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $X = \{|u_n + v_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$.

  i) (Positivité) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \geq 0$, donc en particulier, $\sup U$ étant un majorant de U :
  $$\|u\|_\infty = \sup U \geq |u_0| \geq 0.$$

  ii) (Séparation) On suppose que $\|u\|_\infty = 0$. Alors $\sup U = 0$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup U$ étant un majorant de U :
  $$0 \leq |u_n| \leq \sup U = 0.$$
  Par suite, $u = (0)_{n\in\mathbb{N}} = 0_{\ell^\infty}$.

  iii) (Homogénéité) Comme $|\lambda|$ est positif, $\sup U$ étant le plus petit des majorants de U, $|\lambda| \sup U$ est le plus petit des majorants de $\{|\lambda|.|u_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\lambda|.|u_n| = |\lambda u_n|$ donc $\{|\lambda|.|u_n| \mid n \in \mathbb{N}\} = W$. Par suite :
  $$\|\lambda u\|_\infty = \sup W = |\lambda| \sup U = |\lambda|.\|u\|_\infty$$

  iv) (Inégalité triangulaire) Par définition de l'addition dans $\mathbb{K}^\mathbb{N}$, on a $u+v = (u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$:
  $$|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n| \leq \|u\|_\infty + \|v\|_\infty.$$
  Ainsi, $\|u\|_\infty + \|v\|_\infty$ est un majorant de X ; or $\|u+v\|_\infty = \sup X$ étant le plus petit des majorants de X, on obtient :
  $$\|u+v\|_\infty \leq \|u\|_\infty + \|v\|_\infty.$$

  Il en résulte que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur ℓ^∞.

$\square$

c. Exemples de normes sur des espaces de fonctions

Soit X un ensemble non vide. On considère l'ensemble $\mathcal{F}_b(X,\mathbb{K})$ (egalement noté $\ell^\infty(X,\mathbb{K})$ des fonctions bornées de X à valeurs dans $\mathbb{K}$. C'est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$: $\mathcal{F}_b(X,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(X,\mathbb{K})$, l'ensemble de toutes les fonctions de X dans $\mathbb{K}$.

Voici la norme naturelle sur $\mathcal{F}_b(X,\mathbb{K})$:

Définition 6. *Norme sur l'espace des fonctions bornées*

Soit $f \in \mathcal{F}_b(X, \mathbb{K})$. On appelle **norme infinie** de f, et on note $\|\cdot\|_\infty$ la quantité :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Proposition 5.

La norme infinie de $\mathcal{F}_b(X, \mathbb{K})$ est bien définie et c'est une norme sur $\mathcal{F}_b(X, \mathbb{K})$.

Démonstration.

L'ensemble X est non vide et f est bornée, donc l'ensemble $F = \{|f(x)| \mid x \in X\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Elle possède donc une borne supérieure. Par suite, $\|f\|_\infty$ est bien définie et égale à cette borne supérieure.

Soit $f, g \in \mathcal{F}_b(X, \mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

— (Positivité) Comme X est non vide, il existe $x_0 \in X$. Alors on a $\|f\|_\infty \geq |f(x_0)| \geq 0$.

— (Séparation) : Si $\|f\|_\infty = 0$, alors, pour tout $x \in X$, $0 \leq |f(x)| \leq \|f\|_\infty = 0$ donc f est la fonction nulle sur X.

— (Homogénéité) : On considère l'ensemble $G = \{|\lambda f(x)| \mid x \in X\}$. Alors $\|\lambda f\|_\infty = \sup G$. Montrons l'égalité demandée en utilisant la caractérisation séquentielle de la borne supérieure i.e. $a = \sup A$ si, et seulement si, a est un majorant de A et il existe une suite (a_n) à valeurs dans A telle que $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$.

Pour tout $u \in F$, il existe $x \in X$ tel que $u = |\lambda f(x)| = |\lambda||f(x)|$; et ainsi,

$$u = |\lambda|.|f(x)| \leq |\lambda|.\|f\|_\infty.$$

Par suite, $|\lambda|.\|f\|_\infty$ est un majorant de G.
De plus, comme $\|f\|_\infty = \sup F$, d'après la caractérisation séquentielle de la borne supérieure de F, il existe un suite (u_n) à valeurs dans F (avec $u_n = |f(x_n)|$ où $x_n \in X$) telle que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \|f\|_\infty$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\lambda|u_n = |\lambda|.|f(x_n)| = |\lambda f(x_n)| \in G$ et $|\lambda|u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} |\lambda|.\|f\|_\infty$.
Il en résulte, par caractérisation séquentielle de la borne supérieure de G que :

$$|\lambda|.\|f\|_\infty = \sup G = \|\lambda f\|_\infty.$$

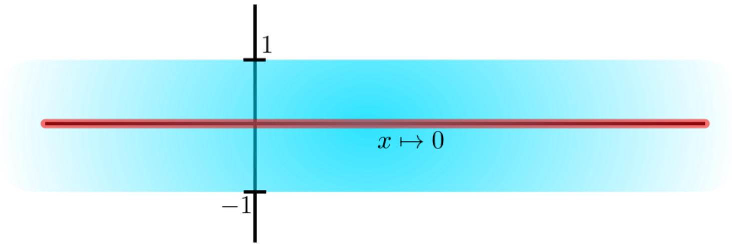
— (Inégalité triangulaire) : On a, pour tout $x \in X$, par inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$,

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Ainsi, $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ est un majorant de l'ensemble $\{|f(x) + g(x)| \mid x \in X\}$ dont la borne supérieure est $\|f + g\|_\infty$ qui est le plus petit de ses majorants. Par suite :

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

□



Le graphe d'une fonction qui appartient à la boule unité ouverte de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{F}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ se trouve dans la bande bleue de la figure ci-dessus.

Exercice 5.

- Formaliser l'affirmation précédente et la démontrer.
- Montrer que les fonctions sin et cos appartiennent à la sphère unité de $\mathcal{F}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. On considère l'espace vectoriel $C([a, b], \mathbb{K})$ des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$. On définit trois normes usuelles sur cet espace par analogie du cas de $\mathbb{K}^n$:

Définition 7. *Normes sur $C([a, b], \mathbb{K})$*

Soit $f \in C([a, b], \mathbb{K})$. On définit les **normes de la convergence** : **en moyenne**, **en moyenne quadratique** et **uniforme** respectivement notées $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$, par :

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}$$

$$\text{et } \|f\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|.$$

Proposition 6.

Les normes de la convergence en moyenne, en moyenne quadratique et uniforme sont bien des normes sur $C([a, b], \mathbb{K})$.

Démonstration.

- $\|\cdot\|_1$. Soit $f, g \in E = C([a, b], \mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
  La norme de f est bien définie car $|f|$ est continue sur le **segment** $[a, b]$ et donc intégrable sur $[a, b]$.
  i) **Positivité**. L'intégrale d'une fonction positive est positive donc $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt \geq 0$.
  ii) **Séparation**. Si $\|f\|_1 = 0$, alors $\int_a^b |f(t)|dt = 0$, or une fonction **continue**, **positive**, d'intégrale nulle est nulle, d'où $f = 0_E$.

iii) **Homogénéité**. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\|\lambda f\|_1 = \int_a^b \underbrace{|\lambda f(t)|}_{=|\lambda|.|f(t)|} \, dt = |\lambda| \int_a^b |f(t)|dt = |\lambda|.\|f\|_1.$$

iv) **Inégalité triangulaire**. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\|f+g\|_1 = \int_a^b \underbrace{|f(t)+g(t)|}_{\leq |f(t)|+|g(t)|} dt \leq \int_a^b |f(t)|dt + \int_a^b |g(t)|dt = \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

Il en résulte que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur E.

— $\|\cdot\|_2$: il suffit de remarquer que la norme de la convergence en moyenne quadratique est la norme associée au produit scalaire

$$(f,g) \mapsto < f, g >= \int_a^b f(t)g(t)dt$$

sur $C([a,b],\mathbb{K})$.

— $\|\cdot\|_\infty$: il suffit de reprendre la démonstration de la norme infinie sur $\mathcal{F}_b(X,\mathbb{K})$.

□

Remarque 3.

On verra dans la suite du chapitre, que la norme infinie sur $C([a,b],\mathbb{K})$ peut-être obtenue comme norme *induite* par la norme infinie sur $\mathcal{F}_b([a,b],\mathbb{K})$ via l'inclusion $C([a,b],\mathbb{K}) \subset \mathcal{F}_b([a,b],\mathbb{K})$.

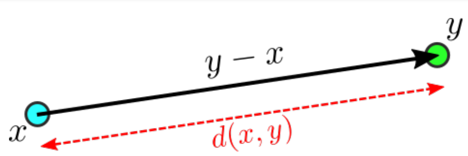
3. Distance associée à une norme

La norme d'un espace vectoriel normé E est une manière d'associer une *longueur* à chaque vecteur de E. Du point de vue *affine* i.e. si on se place dans un espace affine dirigé par E, une manière de mesurer la distance entre deux points M et N devient alors clair : il suffit de regarder la longueur - la norme - du vecteur $\overrightarrow{MN}$ qui "sépare" ces deux points.

Définition 8. *Distance associée à une norme*

Soit N une norme sur E. On appelle **distance associée à** N l'application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\text{pour } (x,y) \in E^2, \quad d(x,y) = N(y-x).$$



Remarque 4.

Soit N une norme sur E. Alors la distance d associée à N vérifie les propriétés suivantes, pour tous $x, y, z \in E$:

i) (Symétrie) $d(x, y) = d(y, x)$

ii) (Séparation) $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$.

iii) (Inégalité triangulaire) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Pour un ensemble quelconque X, une application $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie ces trois axiomes est appelé une *distance* sur X.

Nous ne nous attarderons pas sur ce concept mais dans la suite, nous utiliserons librement ces propriétés dans l'étude des distances associées aux normes. En plus de ces propriétés, nous utiliserons également la suivante dans la suite :

— (Invariance par translation) $d(x + z, y + z) = d(x, y)$.

Exercice 6.

Soit N une norme sur E. Démontrer que la distance associée à N vérifie les quatre axiomes de la remarque précédente.

Proposition 7. *Seconde inégalité triangulaire*

Soit N une norme sur E. Alors la distance d associée à N vérifie, pour tous $x, y, z \in E$:

$$|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

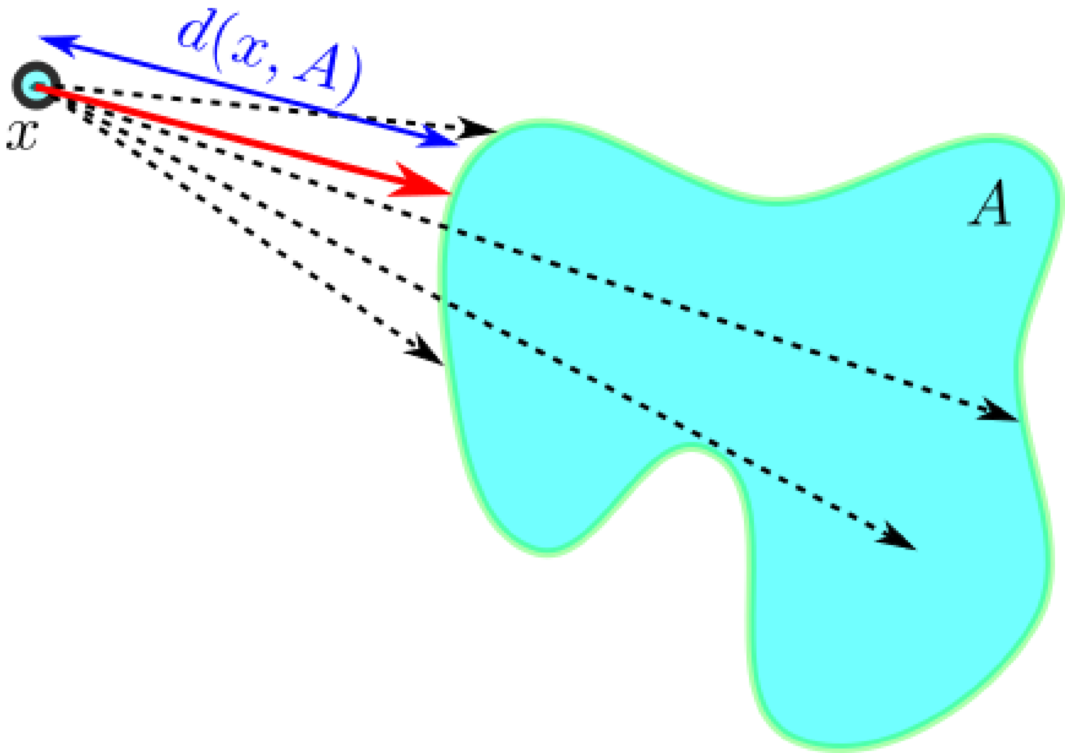
Démonstration.

Il suffit d'appliquer la définition de distance associée à une norme et d'utiliser la seconde inégalité triangulaire pour les normes. (On peut aussi vérifier que pour la notion de distance "générale" au sens de la remarque précédente, cette inégalité est encore valable.) □

Définition 9. *Distance à une partie*

Soit N une norme sur E, d sa distance associée, A une partie non vide de E et $x \in E$. On appelle **distance de x à A** et on note $d(x, A)$, la quantité :

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}.$$



On peut également définir la distance entre deux parties de E :

Définition 10. *Distance entre deux parties*

Soit N une norme sur E, d sa distance associée et A, B des parties non vides de E. On appelle **distance de** A **à** B et on note $d(A, B)$, la quantité :

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) \mid (a, b) \in A \times B\}.$$

Exercice 7.

Soit d la distance associée à une norme sur E et A une partie non vide de E. Montrer que, pour tous $x, y \in E$, on a :

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$

Correction.

Soit $a \in A$. On a, par définition de $d(x, A)$ et par inégalité triangulaire :

$$d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a).$$

Par suite, $d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, a)$. Cette dernière inégalité est vraie pour tout $a \in A$.

Exercice 8.

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, calculer la distance entre $(-1,1)$ et la droite D d'équation $y=2x$ pour les normes un, deux et infini de $\mathbb{R}^2$. Représenter graphiquement chacune des situations.

Correction.

On note d_1 la distance associée à $\|\cdot\|_1$, d_2 la distance associée à $\|\cdot\|_2$, d_∞ la distance associée à $\|\cdot\|_\infty$ et $u=(-1,1)$.
La droite D est le sous-ensemble $D=\{(a,2a)\mid a\in\mathbb{R}\}$. Pour $(a,2a)\in D$ avec $a\in\mathbb{R}$, on a :

$$d_i(u,(a,2a))=\|(a+1,2a-1)\|_i \text{ pour } i=1,2 \text{ ou } \infty.$$

1. On a :

$$d_1(u,(a,2a))=|a+1|+|2a-1|=\begin{cases}-(a+1)-(2a-1)=-3a & \text{pour } a\le -1\\ (a+1)-(2a-1)=-a+2 & \text{pour } -1\le a\le \frac{1}{2}\\ (a+1)+(2a-1)=3a & \text{pour } a\ge \frac{1}{2}.\end{cases}$$

On étudie $a\mapsto d_1(u,(a,2a))$ sur chacun des trois intervalles ci-dessus pour obtenir le minimum de cette fonction sur $\mathbb{R}$ qui est égal à $\frac{3}{2}$ (atteint pour $a=\frac{1}{2}$). Par suite,

$$d_1(u,D)=\inf_{(a,2a)\in D} d_1(u,(a,2a))=\inf_{a\in\mathbb{R}} d_1(u,(a,2a))=\frac{3}{2}\left(=d_1(u,(\frac{1}{2},1))\right).$$

2. On a, pour $a\in\mathbb{R}$:

$$d_2(u,(a,2a))=\sqrt{(a+1)^2+(2a-1)^2}=\sqrt{5a^2-2a+2},$$

or $5a^2-2a+2$ est de discriminant strictement négatif, donc $5a^2-2a+2>0$ (car $5>0$) et le minimum de $a\mapsto 5a^2-2a+2$ est atteint pour $a=\frac{2}{2\times 5}=\frac{1}{5}$ et vaut $\frac{9}{5}$. De plus, la fonction $\sqrt{\ }$ est croissante, donc le minimum de la fonction $a\mapsto\sqrt{5a^2-2a+2}$ est égal à $\sqrt{\frac{9}{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$. Par suite,

$$d_2(u,D)=\inf_{a\in\mathbb{R}} d_2(u,(a,2a))=\frac{3\sqrt{5}}{5}\left(=d_1(u,(\frac{1}{5},\frac{2}{5}))\right).$$

Remarque : Comme la norme 2 est la norme associée au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$ et D est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, la distance de u à D aurait pu être calculée en déterminant la distance de u avec son projeté orthogonal sur D (qui est bien $(\frac{1}{5},\frac{2}{5})$).

∞. On a, pour $a\in\mathbb{R}$, $d_1(u,(a,2a))=\max(|a+1|,|2a-1|)$, et on a :

$$|2a-1|-|a+1|=\begin{cases}-(2a-1)+(a+1)=-a+2 & \text{pour } a\le -1\\ -(2a-1)-(a+1)=-3a & \text{pour } -1\le a\le \frac{1}{2}\\ (2a-1)-(a+1)=a-2 & \text{pour } a\ge \frac{1}{2}\end{cases}$$

donc $|2a-1|\le|a+1|$ si, et seulement si, $a\in[0,2]$. Par suite,

$$d_\infty(u,(a,2a))=\begin{cases}-2a+1 & \text{pour } a\le 0\\ a+1 & \text{pour } 0\le a\le 2\\ 2a-1 & \text{pour } a\ge 2.\end{cases}$$

On étudie $a \mapsto d_\infty(u,(a,2a))$ sur chacun des trois intervalles ci-dessus pour obtenir le minimum de cette fonction sur $\mathbb{R}$ qui est égal à 1 (atteint pour $a = 0$). Par suite,

$$d_\infty(u,D) = \inf_{a\in\mathbb{R}} d_\infty(u,(a,2a)) = 1\,(= d_\infty(u,(0,0)))\,.$$

4. Boules et sphères associées à une distance

On généralise dans ce paragraphe la notion de cercle/sphère, disque/boule bien connue dans les espaces euclidiens de dimension 2 et 3 qui nous apparaissent naturels. Comme pour la sphère et la boule unité d'une norme, la forme des sphères et boules que nous allons considérer peut être tout-à-fait contre-intuitive vis-a-vis de la terminologie et de nos habitudes.

Notation 2. *Boule et sphère unité*

Soit N une norme sur E, d sa norme associée, $x_0 \in E$ et r un réel strictement positif. On note :

— $S(x_0,r) = \{x \in E \mid d(x,x_0) = r\}$; on appelle cet ensemble **sphère** de centre x_0 et de rayon r ;

— $B_f(x_0,r) = \{x \in E \mid d(x,x_0) \leq r\}$; on appelle cet ensemble **boule fermée** de centre x_0 et de rayon r ;

— $B(x_0,r) = \{x \in E \mid d(x,x_0) < r\}$; on appelle cet ensemble **boule ouverte** de centre x_0 et de rayon r ;

Remarque 5.

On peut remarquer que $S(x_0,r) = B_f(x_0,r) \setminus B(x_0,r)$.

Proposition 8.

Soit N une norme sur E. Toute boule (ouverte ou fermée) est une partie convexe de E.

Démonstration.

Soit $x_0 \in E$ et $r > 0$. Soit $x, y \in B(x_0,r)$ et $t \in [0,1]$. On pose $z = tx + (1-t)y$.
Alors on a :

$$\begin{array}{rcll} d(x_0,z) & = & N(z-x_0) & \\ & = & N(t(x-x_0)+(1-t)(y-x_0)) & \\ & \leq & N(t(x-x_0))+N((1-t)((y-x_0)) & \text{(inégalité triangulaire)} \\ & \leq & tN(x-x_0)+(1-t)N(y-x_0) & \text{(homogénéité)} \\ & < & tr+(1-t)r = r & (x,y \in B(x_0,r)) \end{array}$$

Donc z appartient à $B(x_0,r)$. Par suite, $B(x_0,r)$ est convexe.

Il en est de même pour $B_f(x_0,r)$: il suffit de remplacer l'inégalité stricte par une inégalité large dans la dernière ligne du raisonnement précédent. □

5. Parties bornées, applications bornées

a. Parties bornées

Définition 11. *Partie bornée*

Soit N une norme sur E et A une partie de E. On dit que A est **bornée** s'il existe un réel positif R tel que :

$$\text{pour tout } x \in A, \quad N(x) \leq R.$$

Proposition 9.

Soit N une norme sur E, d sa distance associée et A une partie de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :

i) A est bornée ;

ii) il existe $R \geq 0$ tel que $A \subset B_f(0_E, R)$;

iii) il existe $x_0 \in E$ et $R \geq 0$ tels que $A \subset B_f(x_0, R)$;

iv) il existe $R \geq 0$ tel que pour tous $x, y \in A$, $d(x, y) \leq R$.

Correction.

Schéma de la preuve : i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ iv) $\Rightarrow$ i)

- i) $\Rightarrow$ ii) : On suppose A bornée. Alors il existe $R \geq 0$ tel que pour tout $x \in A$, $N(x) \leq R$, d'où $d(x, 0_E) \leq R$ et donc $x \in B_f(0_E, R)$. Par suite, $A \subset B_f(0_E, R)$.
- ii) $\Rightarrow$ iii) : Évident.
- iii) $\Rightarrow$ iv) : On suppose iii). Soit $x, y \in A$. Alors x, y appartiennent à $B_f(x_0, R)$ et on a :

$$d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, x) \leq 2R.$$

- iv) $\Rightarrow$ i) : On suppose iv). On fixe x_0 dans A.
  Soit $x \in A$. Alors

$$N(x) = d(x, 0_E) \leq d(x, x_0) + d(x_0, 0_E) = R + N(x_0).$$

  Par suite, A est bornée.

Remarque 6.

Attention, la notion de partie bornée dépend bien-sûr de la norme utilisée ! Une partie bornée pour une certaine norme peut ne pas l'être pour une autre. Nous en verrons un exemple dans la partie consacrée à la comparaison des normes.

Définition 12. *Diamètre d'une partie*

Soit N une norme sur E et A une partie non vide et bornée de E. On appelle **diamètre** de A et on note $\operatorname{diam}(A)$, le réel positif :

$$\operatorname{diam}(A) = \sup_{(x,y)\in A^2} d(x,y).$$

Exercice 9.

Soit N une norme sur E et A une partie et bornée non vide de E.

1. Justifier l'existence du réel $\operatorname{diam}(A)$.
2. On suppose que E n'est pas réduit à $\{0_E\}$. Soit $r > 0$. Déterminer le diamètre d'une boule fermée de rayon r. De même pour une boule ouverte de rayon r.

Correction.

1. L'ensemble $\{d(x,y) \mid (x,y) \in A^2\}$ est une partie non vide - car A non vide - et majorée de $\mathbb{R}$ - d'après la proposition 9 iv) - donc elle possède une borne supérieure.
2. Il est clair qu'une boule (ouverte ou fermée) de rayon r à un diamètre inférieur ou égal à $2r$: il suffit d'appliquer l'inégalité triangulaire en utilisant le centre de la boule. Montrons que c'est exactement $2r$.

   Commençons par le cas d'une boule fermée $B_f = B_f(x_0, r)$ (qui nous donnera des idées pour le cas ouvert) :
   Soit u un vecteur unitaire de E (il en existe car $E \neq \{0_E\}$). Alors les éléments $x_0 \pm ru$ appartiennent à B_f, en effet :

   $$d(x_0, x_0 \pm ru) = d(0_E, \pm ru) = N(\pm ru) = rN(u) = r.$$

   Or on a :
   $$d(x_0 - ru, x_0 + ru) = N(ru - (-ru)) = N(2ru) = 2r.$$

   Donc $\operatorname{diam}(B_f) = 2r$.

   Passons maintenant au cas d'une boule ouverte $B = B(x_0, r)$. Le raisonnement précédent ne convient pas car $x_0 \pm ru$ ne sont pas dans B... Mais on peut s'en rapprocher autant que l'on veut !
   Soit u un vecteur unitaire de E et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les éléments $x_n^\pm = x_0 \pm r(1 - \frac{1}{n})u$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n^\pm \in B$, en effet :

   $$d(x_0, x_n^\pm) = d(0_E, \pm r(1 - \frac{1}{n})u) = N(\pm r(1 - \frac{1}{n})u) = r(1 - \frac{1}{n}) < r.$$

   De plus, on a :

   $$d(x_n^-, x_n^+) = d(x_0 - r(1 - \frac{1}{n})u, x_0 + r(1 - \frac{1}{n})u) = N(2r(1 - \frac{1}{n})u) = 2r(1 - \frac{1}{n}).$$

   Par suite, $d(x_n^-, x_n^+) \xrightarrow[n\to\infty]{} 2r$ et donc $\operatorname{diam}(B) = 2r$.

Remarque 7.

Si une partie A d'un espace vectoriel normé E n'est pas bornée, alors, par convention, on dira que $\mathrm{diam}(A) = +\infty$.

b. Applications et suites bornées

Définition 13. *Application bornée*

Soit N une norme sur E et X un ensemble non vide. Une fonction $f : X \to E$ est dite **bornée** si $f(X)$ est une partie bornée de E i.e. s'il existe $R \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \in X$:

$$N(f(x)) \leq R.$$

Remarque 8. *Suite bornée*

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E peut être vue comme l'application $f : \mathbb{N} \to E$ telle que $f(n) = u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. La définition précédente s'applique donc également aux suites i.e. une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée s'il existe $R \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$N(u_n) \leq R.$$

On peut généraliser la structure de l'espace vectoriel normé $\mathcal{F}_b(X, \mathbb{K})$ vue dans la paragraphe 2 au cas des fonctions à valeurs dans E bornées :

Définition-Proposition 14.

Soit N une norme sur E et X un ensemble non vide. L'ensemble $\mathcal{F}_b(X, E)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et l'application $\|\cdot\|_\infty$ appelée **norme infinie** définie par :

$$\text{pour } f \in \mathcal{F}_b(X, E), \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in X} N(f(x)),$$

est une norme sur $\mathcal{F}_b(X, E)$.

Démonstration.

Il s'agit de la même démonstration que pour la norme infinie de $\mathcal{F}_b(X, \mathbb{K})$, en remplaçant le module/valeur absolue par la norme N. $\square$

6. Constructions d'espaces vectoriels normés

a. Opérations sur les normes

Proposition 10.

Soit N, N' deux normes sur E et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Alors :

— $N + N' : x \mapsto N(x) + N'(x)$ est une norme sur E.

— $\alpha N : x \mapsto \alpha N(x)$ est une norme sur E.

Exercice 10.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $N_1, ..., N_n$ des normes sur E et $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que
$$N = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i N_i.$$
est une norme sur E.

2. On suppose de plus que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Que peut-on dire de l'intersection des boules unités (fermées ou ouvertes) des normes $N_1, ..., N_n$ par rapport à la boule unité (fermée ou ouverte) de N.

Correction.

1. On raisonne par récurrence et on utilise la proposition précédente.

2. On note, pour $i = 1, ..., n$, B_i la boule unité fermée de N_i et B la boule unité fermée de N. Soit $x \in \bigcap_{i=1}^n B_i$. Alors, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $N_i(x) \leq 1$, donc on a :
$$N(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i N_i(x) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$$
Par suite, $x \in B$. Donc $\bigcap_{i=1}^n B_i \subset B$.
L'inclusion réciproque est fausse en général (re-exercice : trouver un contre-exemple !).

Exercice 11.

On considère $\mathbb{K}$ muni de sa structure d'espace vectoriel sur lui-même. Montrer que toute norme de $\mathbb{K}$ est de la forme $x \mapsto \alpha|x|$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Correction.

D'après la proposition précédente, $x \mapsto \alpha|x|$ est une norme sur $\mathbb{K}$. Réciproquement, soit N une norme sur $\mathbb{K}$. On pose $\alpha = N(1)$ qui est strictement positif d'après l'axiome de séparation. D'après l'axiome d'homogénéité, on a pour tout $x \in \mathbb{K}$,
$$N(x) = N(x.1) = |x|N(1) = \alpha|x|.$$

b. Composition par une fonction injective

Proposition 11.

Soit F un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, N une norme sur E et u une application linéaire *injective* de F dans E. Alors l'application $N' : F \to \mathbb{R}_+$ définie par :

$$N' = N \circ u : x \mapsto N(u(x)),$$

est une norme sur F.

Démonstration.

Soit $x, y \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

i) (Positivité) Comme N est positive, $N' = N \circ u$ l'est aussi.

ii) (Séparation) On suppose que $N'(x) = 0$. Alors $N(u(x)) = 0$ donc $u(x) = 0_E$. Or u est une application linéaire injective donc $x = 0_F$.

iii) (Homogénéité) Comme u est linéaire, on a

$$N'(\lambda x) = N(\lambda u(x)) = |\lambda| N(u(x)) = |\lambda| N'(x).$$

iv) (Inégalité triangulaire) Toujours par linéarité de u :

$$N'(x+y) = N(u(x) + u(y)) \leq N(u(x)) + N(u(y)) = N'(x) + N'(y).$$

$\square$

c. Application : normes sur $\mathbb{K}[X]$

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ à une indéterminée. Grâce à la proposition précédente, on va munir $\mathbb{K}[X]$ de plusieurs structures d'espace vectoriel normé à partir des exemples que l'on a étudiés dans le paragraphe 2).

Exemple 2.

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. On note $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ la suite de ses coefficients (on rappelle que cette suite est stationnaire en 0) et on notera $t \mapsto P(t)$ la fonction polynomiale associée à P.

Normes provenant des espaces de suites : Les applications $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{K}[X]$ où :

$$\|P\|_1 = \sum_{i=1}^{+\infty} |a_i| \quad \|P\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{+\infty} |a_i|^2} \text{ et } \|P\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |a_i|.$$

Normes provenant des espaces de fonctions : Soit $a < b$ des réels. Les applications $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$ et $\mathcal{N}_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{K}[X]$ où :

$$\mathcal{N}_1(P) = \int_a^b |P(t)| dt \quad \mathcal{N}_2(P) = \sqrt{\int_a^b |P(t)|^2 dt} \text{ et } \mathcal{N}_\infty(P) = \sup_{t \in [a,b]} |P(t)|.$$

Exercice 12.

Expliciter les espaces vectoriels normés et les applications linéaires injectives qui permettent, grâce à la proposition précédente, de munir $\mathbb{K}[X]$ des normes ci-dessus.

Correction.

Pour les trois premières normes, on utilise l'application :

$$u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \ell^{1,2,\infty}(\mathbb{K}) \\ P & \mapsto & (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \end{array} \right.$$

où $\ell^1(\mathbb{N},\mathbb{K})$, $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$ et $\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{K})$ sont munis de leur normes canoniques respectives.

Pour les trois suivantes, on utilise l'application :

$$u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & C([a,b],\mathbb{K}) \\ P & \mapsto & \{t \mapsto P(t)\} \end{array} \right.$$

où $C([a,b],\mathbb{K})$ est tour à tour muni des normes de la convergence en moyenne, en moyenne quadratique et uniforme.

Exercice 13.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, ..., x_{n+1}$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts. Montrer que, pour $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à n, la quantité :

$$\|P\| = \max(|P(x_1)|, ..., |P(x_{n+1})|),$$

définit une norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Correction.

Voici deux façons de procéder pour cet exercice :

- **À partir de la définition :**

  Soit $P, Q \in K_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

  — (Positivité). Pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$, $|P(x_i)| \geq 0$ donc $\|P\| = \max\limits_{1\leq i\leq n+1}(|P(x_i)|) \geq 0$.

  — (Séparation). On suppose $\|P\| = 0$. Alors, pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$, $P(x_i) = 0$. Par suite, P est un polynôme de degré au plus n qui possède $n+1$ racines (car les x_i sont tous distincts). Il en résulte que P est le polynôme nul.

  — (Homogénéité). On a :

  $$\|\lambda P\| = \max_{1\leq i\leq n+1}(\underbrace{|\lambda P(x_i)|}_{=|\lambda||P(x_i)|}) = |\lambda| \max_{1\leq i\leq n+1}(|P(x_i)|) = |\lambda|\|P\|.$$

  — (Inégalité triangulaire). On a :

  $$\|P+Q\| = \max_{1\leq i\leq n+1}(\underbrace{|P(x_i) + Q(x_i)|}_{\leq |P(x_i)|+|Q(x_i)|}) \leq \max_{1\leq i\leq n+1}(|P(x_i)|) + \max_{1\leq i\leq n+1}(|Q(x_i)|) = \|P\|+\|Q\|.$$

- **En utilisant une application linéaire injective :**

On remarque que, pour $\|P\| = \|(P(x_1), ..., P(x_{n+1}))\|_\infty$ où $\|\cdot\|_\infty$ est la norme infinie sur $\mathbb{K}^{n+1}$. On définit alors l'application $u : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}^{n+1}$ de la manière suivante : pour $P \in \mathbb{K}_n[X]$,

$$u(P) = (P(x_1), ..., P(x_{n+1})).$$

Montrons que u est une application linéaire injective.

— (Linéarité). Soit $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On a :

$$\begin{aligned} u(\lambda P + \mu Q) &= ((\lambda P + \mu Q)(x_1), ..., (\lambda P + \mu Q)(x_{n+1})) \\ &= (\lambda P(x_1) + \mu Q(x_1), ..., \lambda P(x_{n+1}) + \mu Q(x_{n+1})) \\ &= \lambda(P(x_1), ..., P(x_{n+1})) + \mu(Q(x_1), ..., Q(x_{n+1})) \\ &= \lambda u(P) + \mu u(Q). \end{aligned}$$

Donc u est linéaire.

— (Injectivité). Soit $P \in \mathrm{Ker}(u)$. Alors $u(P) = (0, ..., 0)$. Par suite, pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$, x_i est une racine de P. Or les x_i sont tous différents, donc P est un polynôme de degré au plus n qui possède $n+1$ racines. Il s'agit donc du polynôme nul (*Un polynôme non nul de degré au plus n a au plus n racines*). Ainsi, $\mathrm{Ker}(u) = \{0\}$ et donc u est injective.

Remarque : on peut montrer que u est en fait bijective (et donc que c'est un isomorphisme) grâce au théorème du rang ou en montrant directement que u est surjective.

Ainsi, comme u est linéaire injective et que

$$P \mapsto \|P\| = \|u(P)\|_\infty,$$

il résulte de la Proposition 11 que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{K}_n[X]$.

d. Normes induites

Étant donné une sous-espace F de l'espace vectoriel E muni d'une norme, on utilise la restriction à F de cette dernière pour munir d'une structure d'espace vectoriel normé :

Définition-Proposition 15. *Norme induite*

Soit N une norme sur E et F un sous-espace vectoriel de E. Alors la restriction de N à F est une norme sur F.

Cette restriction est appelée **norme induite** sur F par N.

Démonstration.

On utilise la proposition précédente : en effet, l'injection canonique $\iota : F \to E$ est une application linéaire injective de F dans E. La norme induite sur F par N est alors la norme $N \circ \iota$. □

Remarque 9.

Pour désigner la norme induite sur F, on utilisera en général la même notation que pour la norme sur E.

Exemple 3.

— La valeur absolue sur $\mathbb{R}$ est la norme induite par le module sur $\mathbb{C}$.

— Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. La norme de la convergence uniforme sur $C([a, b], \mathbb{K})$ est la norme induite par la norme infinie sur $\mathcal{F}_b([a, b], \mathbb{K})$.

Exercice 14.

Quelle norme usuelle peut-t-on induire sur l'espace vectoriel $c_0(\mathbb{K})$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ qui convergent vers 0.

Correction.

Parmi les espaces vectoriel normés de suites que l'on a étudié, seul $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ contient $c_0(\mathbb{K})$. On induit alors la norme infinie de $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ sur $c_0(\mathbb{K})$.

e. Normes produits

On peut définir une norme naturelle sur un produit fini d'espaces vectoriels normés :

Définition-Proposition 16. *Norme produit*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(E_1, N_1), ..., (E_n, N_n)$ des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$.
On pose $E = E_1 \times ... \times E_n$. Alors l'application $N : E \to \mathbb{R}_+$, appelée **norme produit**, et définie, pour $x = (x_1, ..., x_n) \in E$, par :

$$N(x) = \max(N_1(x_1), ..., N_n(x_n)),$$

est une norme sur E.

Correction.

L'application N est clairement positive.
Soit $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

— Séparation. On suppose $N(x) = 0$. Alors $\max(N_1(x_1), ..., N_n(x_n)) = 0$, donc $N_i(x_i) = 0$ pour $i = 1, ..., n$ car max est une norme. Par suite, $x_i = 0_{E_i}$ pour $i = 1, ...n$ car chaque N_i est une norme.

— Homogénéité. On a :

$$
\begin{aligned}
N(\lambda x) &= \max(N_1(\lambda x_1), ..., N_n(\lambda x_n)) \\
&= \max(|\lambda| N_1(x_1), ..., |\lambda| N_n(x_n)) \\
&= \max(|\lambda|(N_1(x_1), ..., N_n(x_n))) \\
&= |\lambda| \max(N_1(x_1), ..., N_n(x_n)) \\
&= |\lambda| N(x).
\end{aligned}
$$

— Inégalité triangulaire. On a :

$$
\begin{aligned}
N(x+y) &= \max(N_1(x_1+y_1), ..., N_n(x_n+y_n)) \\
&\leq \max(N_1(x_1)+N_1(y_1), ..., N_n(x_n)+N(y_n)) \\
&= \max(N_1(x_1), ..., N_n(x_n)) + \max(N_1(y_1), ..., N_n(y_n))
\end{aligned}
$$

$$= N(x) + N(y).$$

Exercice 15.

Comment peut-on obtenir la norme infinie sur $\mathbb{K}^n$ en utilisant une norme produit ?

Correction.

On considère, pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, l'espace vectoriel normé (E_i, N_i) où $E_i = \mathbb{K}$ et $N_i = |\cdot|$. Alors la norme produit sur $\mathbb{K}^n = E_1 \times ... \times E_n$ est égale à la norme infinie sur $\mathbb{K}^n$.

Exercice 16.

En s'inspirant de la définition-proposition précédente, définir deux autres normes sur un produit fini d'espaces vectoriels normés.

Correction.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(E_i, N_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'espaces vectoriels normés. Alors, pour $p \geq 1$, on peut définir une norme N sur $E = E_1 \times ... \times E_n$ de la façon suivante : pour $x = (x_1, ..., x_n) \in E$,

$$N(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} N_i(x_i)^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Partie B

Suites dans un espace vectoriel normé

Dans cette partie, $(E, \|\cdot\|)$ désigne un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Suites convergentes

Définition 17. *Suite convergente*

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E. On dit que u est **convergente** (dans $(E, \|\cdot\|)$) s'il existe un élément $\ell \in E$ tel que la suite à valeurs réelles $(\|u_n - \ell\|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
Dans ce cas on dit que la suite u **converge vers** ℓ.

Si une suite ne converge pas, on dit qu'elle est **divergente**.

Remarque 10.

Autrement dit, pour d la distance associée à $\|\cdot\|$, une suite (u_n) à valeurs dans E converge vers ℓ si la suite réelle $(d(u_n, \ell))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Proposition 12.

Soit u une suite à valeurs dans E. Si u converge, alors il existe un *unique* ℓ tel que u converge vers ℓ.

Démonstration.

Soit $u = (u_n)$ une suite à valeurs dans E convergente. Soit $\ell_1, \ell_2 \in E$ tels que u converge à la fois vers ℓ_1 et ℓ_2. Alors on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|\ell_1 - \ell_2\| = \|(\ell_1 - u_n) + (u_n - \ell_2)\| \leq \|\ell_1 - u_n\| + \|u_n - \ell_2\|.$$

On passe à la limite dans l'égalité précédente quand n tend vers $+\infty$ et on obtient $\|\ell_1 - \ell_2\| = 0$, donc $\ell_1 = \ell_2$. □

Notation 3.

Pour une suite $u = (u_n)$ à valeurs dans E qui converge vers $\ell \in E$, on notera indifféremment :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \text{ ou } \lim u = \ell \text{ ou } u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

Remarque 11.

Même si les notations précédentes ne le laissent pas entendre, la notion de convergence et de limite de suite dans un espace vectoriel normé dépend très fortement de la norme sous-jacente.

Exercice 17.

On considère l'espace $C([0,1],\mathbb{R})$ et la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $f_n : x \mapsto x^n$.

1. Montrer que dans $(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$, la suite (f_n) converge et déterminer sa limite.
2. Calculer la norme de (f_n) dans $(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. Qu'en conclut-on ?

Correction.

1. On a :

$$\|f_n - \mathbf{0}\|_1 = \int_0^1 |f_n(t) - 0| dt = \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

   Par suite, (f_n) converge vers la fonction nulle dans $(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$.

2. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|f_n - \mathbf{0}\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f_n(t) - 0| = \sup_{t\in[0,1]} (t^n) = 1.$$

   Donc (f_n) ne converge pas vers $\mathbf{0}$ dans $(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

   Pire ! (f_n) diverge dans $(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$!

   En effet, supposons par l'absurde que (f_n) converge dans $(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ vers une fonction $f \in C([0,1],\mathbb{R})$. Alors pour tout $t \in [0,1]$:

$$|f_n(t) - f(t)| \leq \sup_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f(t)| = \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

   Comme $f_n(t) \to 0$ si $t \in [0,1[$ et $f_n(1) \to 1$, on en déduit, pour $t \in [0,1]$:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

   La fonction f n'est pas continue, contradiction !

Notation 4.

On note :
- $c(E)$ l'ensemble des suites à valeurs dans E convergentes ;
- $c_0(E)$ l'ensemble des suites à valeurs dans E qui convergent vers 0 ;
- $\ell^\infty(\mathbb{N}, E) = \mathcal{F}_b(\mathbb{N}, E)$ l'ensemble des suites à valeurs dans E bornées.

Remarque 12.

Comme on l'a vu dans la partie précédente, $\ell^\infty(E) = \mathcal{F}_b(\mathbb{N}, E)$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est un espace vectoriel normé. On rappelle que pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(E)$,

$$\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|.$$

2. Opérations algébriques sur les suites convergentes

a. Combinaisons linéaires

Proposition 13. *Combinaison linéaire*

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans E.
Si u converge vers $\ell \in E$ et v converge vers $\ell' \in E$ alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, la suite $\lambda u + \mu v$ converge vers $\lambda\ell + \mu\ell'$.

Démonstration.

On a $\lambda u + \mu v = (\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et, d'après l'inégalité triangulaire et l'homogénéité de $\|\cdot\|$:

$$\begin{aligned}
\|(\lambda u_n + \mu v_n) - (\lambda\ell + \mu\ell')\| &= \|(\lambda u_n - \lambda\ell) + (\mu v_n - \mu\ell')\| \\
&\leq \|\lambda u_n - \lambda\ell\| + \|\mu v_n - \mu\ell'\| \\
&\leq |\lambda| \underbrace{\|u_n - \ell\|}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} + |\mu| \underbrace{\|v_n - \ell'\|}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}
\end{aligned}$$

□

Corollaire 1.

Une combinaison linéaire de suites à valeurs dans E convergentes est convergente.

Démonstration.

On raisonne par récurrence en utilisant la proposition précédente. □

Corollaire 2.

Les ensembles de suites $c(E)$ et $c_0(E)$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ (munis de l'addition canonique des suites et de la multiplication canonique par les scalaires).

Démonstration.

La suite constante en 0 appartient clairement à $c(E)$ et d'après la proposition précédente, toute combinaison linéaire de deux éléments de $c(E)$ appartient à $c(E)$. Par suite, $c(E)$ est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$.
Concernant $c_0(E)$, il est clair que c'est un sous-espace vectoriel de $c(E)$. $\square$

Proposition 14.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E. Si u converge vers ℓ alors la suite à valeurs réelles $(\|u_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\|\ell\|$.

Démonstration.

On a, d'après le seconde inégalité triangulaire :

$$0 \leq |\|u_n\| - \|\ell\|| \leq \|u_n - \ell\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

$\square$

Corollaire 3.

Toute suite convergente est bornée. Autrement dit, $c(E) \subset \ell^\infty(E)$.

Démonstration.

Soit $u = (u_n) \in c(E)$. D'après la proposition précédente, la suite réelle $(\|u_n\|)$ converge et donc est bornée (exercice : montrer que toute suite à valeurs réelles convergente est bornée). Ainsi, il existe $R \geq 0$ tel que $\|(\|u_n\|)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty \leq R$. Par suite, $(\|u_n\|)$ appartient à $\ell^\infty(\mathbb{R})$. On a alors :

$$\underbrace{\|u\|_\infty}_{\text{norme sur } \ell^\infty(E)} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\| = \underbrace{\|(\|u_n\|)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty}_{\text{norme sur } \ell^\infty(\mathbb{R})} \leq R.$$

Donc $(u_n) \in \ell^\infty(E)$. Il en résulte que $c(E) \subset \ell^\infty(E)$. $\square$

Exercice 18.

Quelle norme peut-on considérer sur $c(E)$ et sur $c_0(E)$ pour les munir de structures d'espaces vectoriels normés ?

Correction.

$c(E)$ et $c_0(E)$ étant des sous-espaces vectoriels de $\ell^\infty(E)$, on peut induire la norme infinie sur ces deux sous-espaces.

Exercice 19.

Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs scalaires et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un suite à valeurs dans E. Montrer que si $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, alors la suite $(\lambda_n u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E est convergente.

Correction.

On conjecture que la limite potentielle de $(\lambda_n u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\lambda\ell$ où $\lambda = \lim \lambda_n$ et $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$. Montrons le. En utilisant l'inégalité triangulaire et l'homogénéité de $\|\cdot\|$, on a :

$$\|\lambda_n u_n - \lambda\ell\| = \|\lambda_n u_n - \lambda u_n + \lambda u_n - \lambda\ell\| \leq \underbrace{|\lambda_n - \lambda|}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}0} \underbrace{\|u_n\|}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}\|\ell\|} + |\lambda| \underbrace{\|u_n - \ell\|}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

b. Suites à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés

Comme on l'a vu dans la partie précédente, on peut munir un produit fini d'espaces vectoriels normés de la norme produit. C'est-à-dire, pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $(E_1, \|\cdot\|_{(1)}), \dots, (E_k, \|\cdot\|_{(k)})$ des espaces vectoriels normés, on considère la norme $\|\cdot\|$ définie, pour $x = (x_1, \dots, x_k) \in \prod_{i=1}^{k} E_i$, par :

$$\|x\| = \max_{1\leq i\leq k} \|x_i\|_{(i)}.$$

Proposition 15.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $(E_1, \|\cdot\|_{(1)}), \dots, (E_k, \|\cdot\|_{(k)})$ des espaces vectoriels normés. On munit $E = \prod_{i=1}^{k} E_i$ de la norme produit notée $\|\cdot\|$.

Soit $u = \left((u_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}, \dots, (u_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}\right)$ une suite à valeurs dans E. La suite u converge vers $(\ell^{(1)}, \dots, \ell^{(k)})$ dans E si, et seulement si, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, $(u_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell^{(i)}$ dans E_i.

Démonstration.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left((u_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}, \dots, (u_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}\right)$ une suite à valeurs dans E.

- $(\Rightarrow)$. On suppose que u converge vers $\ell = (\ell^{(1)}, \dots, \ell^{(k)})$ dans E.
  Alors, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, et tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

  $$\|u_n^{(i)} - \ell^{(i)}\|_{(i)} \leq \max(\|u_n^{(1)} - \ell^{(1)}\|_{(1)}, \dots, \|u_n^{(k)} - \ell^{(k)}\|_{(k)}) = \|u_n - \ell\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

  Donc pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, $(u_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell^{(i)}$ dans E_i.

- $(\Leftarrow)$. On suppose que pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, $(u_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell^{(i)}$ dans E_i. On pose $\ell = (\ell^{(1)}, \dots, \ell^{(k)})$.
  Alors on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\|u_n-\ell\| &= \max(\|u_n^{(1)}-\ell^{(1)}\|_{(1)},\dots,\|u_n^{(k)}-\ell^{(k)}\|_{(k)})\\ &\leq \underbrace{\|u_n^{(1)}-\ell^{(1)}\|_{(1)}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}0}+\dots+\underbrace{\|u_n^{(k)}-\ell^{(k)}\|_{(k)}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Donc u converge vers ℓ dans E.

□

Exemple 4.

Une suite à valeurs dans $\mathbb{K}^n$ converge (pour la norme infinie) si, et seulement si, chacune des n suites de ses coordonnées converge.

c. Relations de comparaisons

Dans ce paragraphe, on étend, pour des suites à valeurs vectorielles, les notations de Landau, "o" et "O" vues dans le cadre de l'analyse réelle (et complexe).

Définition 18. *Domination et négligeabilité*

Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E et $a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles positives.

1. On dit que u est **dominée** par a en $+\infty$ s'il existe $M\in\mathbb{R}_+$ et il existe $N\in\mathbb{N}$ tels que pour tout $n\geq N$:
$$\|u_n\|\leq Ma_n.$$
On note alors $u=O(a)$ ou $u_n=O(a_n)$.
2. On dit que u est **négligeable** devant a en $+\infty$ si pour tout $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$ et il existe $N\in\mathbb{N}$ tels que pour tout $n\geq N$:
$$\|u_n\|\leq \varepsilon a_n.$$
On note alors $u=o(a)$ ou $u_n=o(a_n)$.

L'exercice suivant donne une vision plus intuitive des relations de domination et de négligeabilité.

Exercice 20.

Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E et $a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles *strictement* positives.

1. $u_n=O(a_n)$ si, et seulement si, la suite $\left(\frac{1}{a_n}u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E est bornée.
2. $u_n=o(a_n)$ si, et seulement si, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}u_n=0_E$.

Correction.

1. En remarquant qu'une suite est bornée si, et seulement si, elle est bornée à partir d'un certain rang, on a :
$$u_n = O(a_n)$$
si, et seulement si,
$$\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow \|u_n\| \leq M a_n,$$
si, et seulement si,
$$\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow \|\tfrac{1}{a_n} u_n\| \leq M,$$
si, et seulement si,
$$\left(\frac{1}{a_n} u_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{est bornée.}$$

2. On a :
$$u_n = o(a_n)$$
si, et seulement si,
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow \|u_n\| \leq \varepsilon a_n,$$
si, et seulement si,
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow \|\tfrac{1}{a_n} u_n - 0_E\| \leq \varepsilon,$$
si, et seulement si,
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} u_n = 0_E.$$

On peut alors comparer les suites à valeurs dans E entre elles :

Définition 19. *Domination, négligeabilité et équivalence*

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans E.

1. On dit que u est **dominée** par v en $+\infty$ et on note $u = O(v)$ ou $u_n = O(v_n)$ si :
$$u_n = O(\|v_n\|).$$
2. On dit que u est **négligeable** devant v en $+\infty$ et on note $u = o(v)$ ou $u_n = o(v_n)$ si :
$$u_n = o(\|v_n\|).$$
3. On dit que u **équivaut** à v en $+\infty$ et on note $u \sim v$ ou $u_n \sim v_n$ si :
$$u_n - v_n = o(\|v_n\|).$$

Remarque 13.

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence entre les suites à valeurs dans E. On pourra donc employer la terminologie : "u et v sont équivalentes en $+\infty$" si la suite u équivaut à la suite v en $+\infty$.

Exercice 21.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans E. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0_E$.
Montrer que si $u_n \sim v_n$ alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|u_n\|}{\|v_n\|} = 1.$$

Correction.

On a suppose $u_n \sim v_n$. Alors $u_n - v_n = o(\|v_n\|)$.
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Alors il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$\|u_n - v_n\| \leq \varepsilon \|v_n\|.$$

Soit $n \geq N$. Alors,

$$|\frac{\|u_n\|}{\|v_n\|} - 1| = \frac{1}{\|v_n\|} |\|u_n\| - \|v_n\|| \leq \frac{1}{\|v_n\|} \|u_n - v_n\| \leq \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, il en résulte que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\|u_n\|}{\|v_n\|} = 1$.

3. Suites extraites et valeurs d'adhérence

On emploie ici la même terminologie que pour les suites à valeurs réelles ou complexes :

Définition 20. *Suite extraite / sous-suite*

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante.
On appelle **suite extraite** ou **sous-suite** de la suite u, la suite

$$(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}.$$

Remarque 14.

La fonction φ - *la fonction extractrice* - est souvent notée de la façon suivante : pour $k \in \mathbb{N}$, $n_k := \varphi(k)$. Ainsi, on désignera souvent par $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de u.

Exercice 22.

1. Montrer que si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une fonction strictement croissante, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$.
2. Soit u une suite à valeurs dans E et v une sous-suite de u. Montrer que si w est une sous-suite de v, alors w est une sous-suite de u.

Correction.

1. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n+1) \geq \varphi(n)+1$ car φ est strictement croissante et à valeurs entières. On prouve alors le résultat en raisonnant par récurrence sur $\mathbb{N}$ et en utilisant cette remarque.
2. Il suffit de remarquer que la composition de deux fonctions strictement croissantes est strictement croissante.

Proposition 16.

Soit u une suite à valeurs dans E et $\ell \in E$. La suite u converge vers ℓ si, et seulement si, **toute** sous-suite de u converge vers ℓ.

Démonstration.

Comme u est en particulier une sous-suite de u (la fonction extractrice est donnée par l'identité sur $\mathbb{N}$), si toute sous-suite de u converge vers ℓ, alors u converge ℓ. Montrons la réciproque.

On suppose que $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$. Soit $v=(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de u. Soit $\varepsilon>0$. Comme u converge, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\|u_n-\ell\| \leq \varepsilon$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$, donc pour tout $n \geq N$, $\varphi(n) \geq N$ d'où :

$$\|u_{\varphi(n)}-\ell\| \leq \varepsilon.$$

Il en résulte que v converge vers ℓ. □

Définition 21. *Valeur d'adhérence*

Soit u une suite à valeurs dans E et $x \in E$. On dit que x est une **valeur d'adhérence** de u s'il existe une sous-suite de u qui converge vers x.

Exemple 5.

— Les nombres 1 et -1 sont des valeurs d'adhérence de la suite $u=((1-\frac{1}{n})(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
— le nombre complexe i est une valeur d'adhérence de la suite $v=(e^{\frac{in\pi}{4}})_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 23.

1. Pour les exemples précédents, déterminer des sous-suites qui convergent vers les valeurs d'adhérence.
2. Quelles sont les autres valeurs d'adhérence de la suite v de l'exemple précédent.

Correction.

— (u_{2n}) converge vers 1 et (u_{2n+1}) converge vers -1. (v_{2+8n}) converge vers i (elle est même constante en i).

— Les valeurs d'adhérence de v sont exactement les valeurs de v_n pour $n = 0, 1, ..., 7$.

Proposition 17.

Soit u une suite à valeurs dans E. Si u converge alors u possède une unique valeur d'adhérence.

Démonstration.

D'après la proposition 16, si u converge vers ℓ, toutes les sous-suites de u convergent également vers ℓ. Donc ℓ est une valeur d'adhérence de u et c'est la seule par unicité de la limite. □

Remarque 15.

— La contraposée de la proposition précédente nous donne une manière de prouver qu'une suite est divergente, c'est-à-dire :
Si u possède au moins deux valeurs d'adhérence distinctes, alors u diverge.

— Attention, la réciproque de la proposition précédente est fausse ! Il existe des suites divergentes qui ne possèdent qu'une seule valeur d'adhérence, comme le montre l'exercice suivant.

Exercice 24.

On considère la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n(1 + (-1)^n))_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que u possède une unique valeur d'adhérence. En déduire que la réciproque de la proposition 17 est fausse.

Correction.

La sous-suite (u_{2n+1}) est constante en 0 et donc a pour limite 0. Par suite, 0 est une valeur d'adhérence de u. Montrons que c'est la seule.

Soit $v = u_{\varphi(n)}$ une sous-suite de u. Si φ prend une infinité de valeurs impaires alors 0 est une valeur d'adhérence de v, donc quitte à passer à une sous-suite de v, on peut supposer que $\varphi(\mathbb{N}) \cap 2\mathbb{N} + 1$ est fini. Par suite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\varphi(n)$ est pair ; donc

$$v_n = u_{\varphi(n)} = \varphi(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

Donc 0 est bien la seule valeur d'adhérence de u.

De plus, il est clair que u ne converge pas : en effet, (u_{2n}) diverge. Par suite, la réciproque de la proposition 17 est fausse.

Exercice 25. *Caractérisation des valeurs d'adhérence*

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E et $x \in E$. Alors x est une valeur d'adhérence de u

si, et seulement si,

$$\forall \varepsilon,\ \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N,\ \|u_n - x\| \leq \varepsilon.$$

Correction.

- $(\Rightarrow)$. On suppose que x est une valeur d'adhérence de u. Alors il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ de u qui converge vers x, i.e.

  $$\forall \varepsilon,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,\ \|u_{\varphi(n)} - x\| \leq \varepsilon.$$

  Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. Alors il existe un entier n_0 tel que pour tout $k \geq n_0$, $\|u_{\varphi(k)} - x\| \leq \varepsilon$.

  Considérons l'entier $n = \varphi(\max(N, n_0))$. Alors $n \geq \varphi(N) \geq N$ et $n \geq \varphi(n_0) \geq n_0$. Par suite, $n \geq N$ et $n \geq n_0$ donc :

  $$\|u_n - x\| = \|u_{\varphi(\max(N,n_0))} - x\| \leq \varepsilon.$$

- $(\Leftarrow)$. On suppose

  $$\forall \varepsilon,\ \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N,\ \|u_n - x\| \leq \varepsilon. \quad (*)$$

  On construit, par récurrence sur $\mathbb{N}$, une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

  $$\|u_{n_k} - x\| \leq \frac{1}{2^k}.$$

  Initialisation : D'après $(*)$, pour $\varepsilon = 1 = \frac{1}{2^0}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\|u_n - x\| \leq \frac{1}{2^0}$.

  Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe $n_0 < \ldots < n_k$ des entiers tels que $\|u_{n_k} - x\| \leq \frac{1}{2^k}$.

  D'après $(*)$, pour $\varepsilon = \frac{1}{2^{k+1}}$ et $N = n_k$, il existe $n_{k+1} > n_k$ tel que

  $$\|u_{n_{k+1}} - x\| \leq \frac{1}{2^{k+1}}.$$

  Il en résulte que la sous-suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers x.

Partie C

Comparaison de normes

Dans toute cette partie, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On a discuté tout au long des parties précédentes, de propriétés d'ensembles ou de convergence de suites, qui ne sont pas en général invariantes par changement de norme dans notre espace E. Par exemple, on a vu dans les exercices précédents, que la suite (f_n) de $C([0,1], \mathbb{R})$ donnée, pour $n \in \mathbb{N}$, par $f_n : t \mapsto t^n$, est convergente pour la norme de la convergence en moyenne mais pas pour la norme de la convergence uniforme.

On peut alors légitimement se demander quelles conditions sur deux normes N_1 et N_2 sur E données pourraient nous permettre d'assurer que si une certaine propriété est vraie pour N_1, alors elle l'est également sur N_2.

Voici tout l'enjeu du chapitre "Comparaison de normes".

1. Domination de normes

Définition 22.

Soit N_1, N_2 des normes sur E. On dit que N_1 est **dominée** par N_2 s'il existe un réel $C > 0$ tel que $N_1 \leq CN_2$ i.e. pour tout $x \in E$:

$$N_1(x) \leq CN_2(x).$$

Dans ce cas, on dira également que la norme N_2 est **plus fine** que N_1.

Proposition 18.

Soit N_1, N_2 des normes sur E. N_1 est dominée par N_2, si, et seulement si, il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $N_2(x) \leq 1$ implique $N_1(x) \leq C$.

Autrement dit, N_1 est dominée par N_2, si, et seulement si, il existe $C > 0$ tel que la boule unité fermée pour la norme N_2 est incluse dans la boule fermée pour la norme N_1 de centre 0_E et de rayon C.

Démonstration.

- $(\Rightarrow)$. Immédiat.
- $(\Leftarrow)$. On suppose que pour tout $x \in E$, $N_2(x) \leq 1$ implique $N_1(x) \leq C$.
  Soit $x \in E$. Si $x = 0_E$, alors $N_1(x) = 0 \leq 0 = CN_2(x)$. On suppose $x \neq 0_E$.
  Alors $u = \frac{1}{N_2(x)} x$ vérifie $N_2(u) = 1 \leq 1$ donc, par hypothèse,

$$\frac{N_1(x)}{N_2(x)} = N_1(u) \leq C.$$

  D'où le résultat.

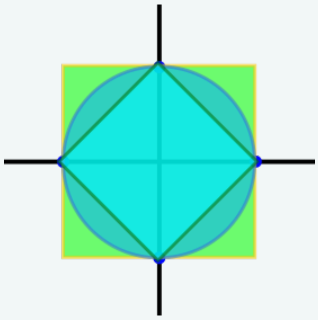
$\square$

Exemple 6.

Sur $\mathbb{R}^2$, en examinant les boules unités des normes un, deux et infini, on peut, dans un premier temps, remarquer les relations suivantes :

la norme un est plus fine que la norme deux qui est plus fine que la norme infinie, i.e.

$$\| \cdot \|_\infty \leq \| \cdot \|_2 \leq \| \cdot \|_1.$$



Exercice 26.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Montrer que dans $C([a,b], \mathbb{K})$, les normes de la convergence en moyenne et de la convergence en moyenne quadratique sont dominées par la norme de la convergence uniforme.

Correction.

Soit $f \in C([a,b], \mathbb{K})$. Alors

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt \leq \int_a^b \|f\|_\infty dt = (b-a)\|f\|_\infty,$$

et de même,

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt} \leq \sqrt{\int_a^b \|f\|_\infty^2 dt} = \sqrt{b-a}\|f\|_\infty.$$

Pour comprendre la terminologie de "finesse" précédente qui pourrait sembler paradoxale au premier abord, il faut étudier les conséquences de la domination en termes de boules pour chaque norme :

Proposition 19.

Soit N_1,N_2 des normes sur E. On suppose que N_1 est dominée par N_2. Alors toute boule fermée pour N_1 contient une boule fermée pour N_2.

Démonstration.

On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que $N_1 \leq CN_2$. Alors, pour tous $x \in E$ et $r > 0$,

$$B_f^{N_2}(x, \frac{r}{C}) \subset B_f^{N_2}(x, \frac{r}{C}).$$

En effet, si $y \in B_f^{N_2}(x, \frac{r}{C})$, alors

$$N_1(y) \leq CN_2(y) \leq C\frac{r}{C} = r.$$

$\square$

Remarque 16.

On peut remplacer les mentions "boule fermée" dans la proposition précédente par "boule ouverte" et même seulement l'une des deux.

En ce qui concerne les notions d'ensemble ou d'application bornée et de convergence de suites, la norme dominante les transmet à la norme dominée :

Proposition 20.

Soit N_1,N_2 des normes sur E. On suppose que N_1 est dominée par N_2. Alors une partie bornée pour N_2 est une partie bornée pour N_1.

Démonstration.

On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que $N_1 \leq CN_2$. Soit B une partie bornée pour N_2. Alors il existe $R \geq 0$ tel que pour tout $x \in B$, $N_2(x) \leq R$. Ainsi, pour tout $x \in B$,

$$N_1(x) \leq CN_2(x) \leq CR.$$

Donc B est bornée. $\square$

Corollaire 4.

Soit N_1,N_2 des normes sur E. On suppose que N_1 est dominée par N_2.

— Toute application d'un ensemble X dans E bornée pour la norme N_2, est bornée pour la norme N_1.

— Toute suite à valeurs dans E bornée pour la norme N_2 est bornée pour la norme N_1.

Démonstration.

On suppose N_1 dominée par N_2.

— Soit $f : X \to E$. Une application bornée pour N_2. Alors $f(X)$ est une partie de E bornée pour N_2. Par suite, d'après la proposition précédente, $f(X)$ est bornée pour N_1. Il en résulte que f est une application bornée pour N_1.

— On applique le point précédent en voyant une suite à valeurs dans E comme une application de $\mathbb{N}$ dans E.

$\square$

Proposition 21.

Soit N_1,N_2 des normes sur E. On suppose que N_1 est dominée par N_2. Si une suite à valeurs dans E converge vers $\ell \in E$ pour la norme N_2, alors elle converge vers ℓ pour la norme N_1.

Démonstration.

On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que $N_1 \leq CN_2$. Soit (u_n) une suite à valeurs dans E. On suppose que (u_n) converge vers $\ell \in E$ pour la norme N_2. Par suite,

$$N_1(u_n - \ell) \leq CN_2(u_n - \ell) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Par suite, (u_n) converge vers ℓ pour N_1. $\square$

Remarque 17.

Ainsi, pour montrer qu'une norme N_1 n'est pas dominée par N_2, il suffit d'exhiber une suite qui converge pour N_2 mais pas pour N_1.

Exercice 27.

Montrer que dans $C([0,1],\mathbb{R})$, la norme de la convergence uniforme n'est pas dominée par la norme de la convergence en moyenne.

Correction.

On reprend la suite de terme général $f_n : t \mapsto t^n$ qui converge vers $\mathbf{0}$ pour la norme de la convergence en moyenne, et qui ne converge pas vers $\mathbf{0}$ pour la norme de la convergence uniforme (c'est même plus fort : elle diverge pour la norme de la convergence uniforme). Par suite, d'après la contraposée de la proposition précédente, la norme de la convergence uniforme n'est pas dominée par la norme de la convergence en moyenne.

2. Normes équivalentes

a. Définition

Définition 23. *Normes équivalentes*

Soit N_1, N_2 des normes sur E. On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes s'il existe des constantes $c > 0$ et $C > 0$ telles que :

$$cN_1(x) \leq N_2(x) \leq CN_1(x).$$

Proposition 22.

Soit N_1, N_2 des normes sur E. N_1 et N_2 sont équivalentes si, et seulement si, N_1 est dominée par N_2 et N_2 est dominée par N_1.

Démonstration.

$$N_1 \text{ est dominée par } N_2 \text{ et } N_2 \text{ est dominée par } N_1\,;$$

si, et seulement si

$$\exists K > 0,\ \forall x \in E, \quad N_1(x) \leq K N_2(x) \quad \text{et} \quad \exists C > 0,\ \forall x \in E, \quad N_2(x) \leq C N_1(x);$$

si, et seulement si

$$\exists K, C > 0,\ \forall x \in E, \quad \frac{1}{K} N_1(x) \leq N_2(x) \leq C N_1(x);$$

si, et seulement si (ici $c = 1/K$)

$$\exists c, C > 0,\ \forall x \in E, \quad c N_1(x) \leq N_2(x) \leq C N_1(x).$$

□

Exercice 28.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$. Montrer que les normes un, deux et infini sont équivalentes.

Correction.

On a, pour $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\|x\|_\infty^2 = (\max(|x_1|, ..., |x_n|))^2 \leq \max(|x_1|^2, ..., |x_n|^2) \leq \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = \|x\|_2^2;$$

$$\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|\right)^2 = \|x\|_1^2;$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n \underbrace{|x_i|}_{\leq \|x\|_\infty} \leq n\|x\|_\infty.$$

Donc on obtient, en utilisant ces inégalités et celles obtenues précédemment :

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$$

D'où l'équivalence des normes un, deux et infini.

b. Propriétés invariantes par passage à une norme équivalente

Théorème 1. *Conservation du caractère borné d'une partie*

Soit N_1,N_2 deux normes sur E. On suppose que N_1 et N_2 sont équivalentes.
Une partie est bornée pour N_1 si, et seulement si, elle est bornée pour N_2.

Démonstration.

On applique la proposition 20 pour N_1 dominée par N_2 puis pour N_2 dominée par N_1. $\square$

Corollaire 5.

Soit N_1,N_2 deux normes sur E. On suppose que N_1 et N_2 sont équivalentes.

- Une application d'un ensemble X dans E est bornée pour la norme N_1 si, et seulement si, est bornée pour la norme N_2.
- Une suite à valeurs dans E bornée pour la norme N_1 si, et seulement si, elle est bornée pour la norme N_2.

Théorème 2. *Conservation de la convergence d'une suite*

Soit N_1,N_2 des normes sur E. On suppose que N_1 et N_2 sont équivalentes. Une suite à valeurs dans E converge vers $\ell \in E$ pour la norme N_1 si, et seulement si, elle converge vers ℓ pour la norme N_2.

Démonstration.

On applique la proposition 21 pour N_1 dominée par N_2 puis pour N_2 dominée par N_1. $\square$

c. Exercices types

Exercice 29.

On considère l'espace vectoriel $E = C^1([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur E.

1. Pour $f \in E$, on pose :
$$N(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$$
Montrer que N est une norme sur E.
2. Pour $f \in E$, on pose :
$$N'(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$
Montrer que N' est une norme sur E.
3. Montrer que N et N' sont équivalentes.
4. Les normes N et N' sont-elles équivalentes à $\|\cdot\|_\infty$?

Correction.

1. Soit $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
   — (Positivité) $N(f)$ positif comme somme de quantités positives.
   — (Séparation) On suppose $N(f) = 0$. Alors $|f(0)| = 0 = \|f'\|_\infty$. Par suite, $f(0) = 0$ et pour tout $t \in [0,1]$, $f'(t) = 0$. Donc f est constante en 0 i.e. est égale à la fonction nulle.

   — (Homogénéité) Par la linéarité de la dérivée et l'homogénéité de $\|\cdot\|_\infty$, on a :
   $$N(\lambda f) = |(\lambda f)(0)| + \|(\lambda f)'\|_\infty = |\lambda||f(0)| + |\lambda|\|f'\|_\infty = |\lambda| N(f).$$
   — (Inégalité triangulaire) Par la linéarité de la dérivée et l'inégalité triangulaire de $\|\cdot\|_\infty$, on a :
   $$N(f+g) = |(f+g)(0)| + \|(f+g)'\|_\infty \leq |f(0)| + |g(0)| + \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty = N(f) + N(g).$$
2. Soit $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
   — (Positivité) $N'(f)$ positif comme somme de quantités positives.
   — (Séparation) On suppose $N'(f) = 0$. Alors, en particulier, $\|f\|_\infty = 0$. Par suite, d'après l'axiome de séparation pour $\|\cdot\|_\infty$, f est égale à la fonction nulle.
   — (Homogénéité) Par la linéarité de la dérivée et l'homogénéité de $\|\cdot\|_\infty$, on a :
   $$N'(\lambda f) = \|(\lambda f)\|_\infty + \|(\lambda f)'\|_\infty = |\lambda|\|f\|_\infty + |\lambda|\|f'\|_\infty = |\lambda| N'(f).$$
   — (Inégalité triangulaire) Par la linéarité de la dérivée et l'inégalité triangulaire de $\|\cdot\|_\infty$, on a :
   $$N'(f+g) = \|(f+g)\|_\infty + \|(f+g)'\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty = N'(f) + N'(g).$$
3. On a tout d'abord,
   $$N(f) = \underbrace{|f(0)|}_{\leq \|f\|_\infty} + \|f'\|_\infty \leq N'(f).$$
   Puis, pour tout $x \in [0,1]$,
   $$|f(x)| = |f(0) + \int_0^x f'(t)dt| \leq |f(0)| + \int_0^x \|f'\|_\infty dt = |f(0)| + x\|f'\|_\infty \leq N(f).$$
   Donc, $\|f\|_\infty \leq N(f)$. Par suite,
   $$N'(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \leq \underbrace{\|f\|_\infty}_{\leq N(f)} + \underbrace{|f(0)| + \|f'\|_\infty}_{=N(f)} \leq 2N(f).$$
   Conclusion :
   $$N \leq N' \leq 2N,$$
   donc N et N' sont équivalentes.
4. Prenons la suite de terme général $f_n : t \mapsto t^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Alors :
   $$\|f_n\|_\infty = 1,$$
   et
   $$N(f_n) = n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$
   Donc (f_n) est une suite bornée pour $\|\cdot\|_\infty$ mais pas pour N. donc ces normes ne sont pas équivalentes. Et comme N' est équivalente à N, N' ne peut-être équivalente à $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 30.

Soit $a \geq 0$. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on définit

$$N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)|dt.$$

1. Démontrer que N_a est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $a, b \geq 0$ avec $a < b$ et $b > 1$. Démontrer que N_a et N_b ne sont pas équivalentes.
3. Démontrer que si $(a, b) \in [0, 1]^2$, alors N_a et N_b sont équivalentes.

Correction.

1. Le point "délicat" est la séparation : si $N_a(P) = 0$, alors $|P(a)| = 0$ et $\int_0^1 |P'(t)|dt = 0$. Or, comme $|P'|$ est une fonction continue, positive et d'intégrale nulle sur $[0, 1]$, alors $P'(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$. Alors P' est un polynôme qui possède une infinité de racine ; par suite $P' = 0$ et donc P est un polynôme constant. Or $P(a) = 0$, donc P est le polynôme nul.
2. On suppose que N_a et N_b sont équivalentes. Alors, il existe deux constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ tels que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a :
$$C_1 N_a(P) \leq N_b(P) \leq C_2 N_a(P).$$
Pour $n \geq 0$, soit $P(X) = X^n$. On a
$$N_a(P) = a^n + n \int_0^1 t^{n-1}dt = a^n + 1 \text{ et } N_b(P) = b^n + 1.$$
On en déduit alors que, pour tout $n \geq 0$,
$$b^n + 1 \leq C_2(a^n + 1) \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{b^n} \leq C_2 \left(\frac{a}{b}\right)^n + \frac{C_2}{b^n}.$$
Or, le membre de droite tend vers 1 et le membre de gauche vers 0. On obtient en passant à la limite $1 \leq 0$, ce qui est absurde. L'hypothèse de départ est donc fausse, et N_a et N_b ne sont pas équivalentes.
3. Supposons par exemple $a \leq b$. Alors
$$P(b) - P(a) = \int_a^b P'(t)dt \leq \int_0^1 |P'(t)|dt.$$
Ainsi,
$$|P(b)| \leq |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)|dt \leq N_a(P).$$
Il vient
$$N_b(P) \leq N_a(P) + \int_0^1 |P'(t)|dt \leq 2N_a(P).$$
On a de la même façon
$$|P(a)| \leq |P(b)| + \int_0^1 |P'(t)|dt \leq N_b(P)$$
et donc
$$N_a(P) \leq 2N_b(P).$$
Les deux normes sont bien équivalentes.