Chapitre V

Topologie des espaces vectoriels normés

Table des matières

Partie A : Topologie d'un espace vectoriel normé **2**
1. Ouverts . . . 2
2. Fermés . . . 6
3. Voisinages . . . 8
4. Topologie d'un espace produit . . . 11
5. Intérieur . . . 12
6. Adhérence . . . 13
7. Frontière . . . 15
8. Caractérisation séquentielle des fermés . . . 16
9. Densité . . . 18
10. Ouverts, fermés et voisinages relatifs . . . 20
11. Topologie et comparaison de normes . . . 21

Partie B : Limites et continuité **23**
1. Limite d'une application . . . 23
2. Propriétés des limites . . . 25
3. Applications continues . . . 28
4. Applications lipschitziennes . . . 31
5. Continuité et topologie . . . 33
6. Continuité uniforme . . . 35
7. Continuité, applications linéaires et multilinéaires . . . 36

Partie C : Compacité **47**
1. Définition . . . 47
2. Propriétés . . . 48
3. Applications continues sur un compact . . . 51

Partie D : Connexité par arcs **54**
1. Chemins . . . 54
2. Connexité par arcs et composantes connexes par arcs . . . 55
3. Parties étoilées . . . 59
4. Parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ . . . 61
5. Image continue d'une partie connexe par arcs . . . 62

Partie E : Espaces vectoriels normés de dimension finie **64**
1. Équivalence des normes en dimension finie . . . 64
2. Conséquences topologiques . . . 65
3. Compacité en dimension finie . . . 67
4. Continuité des applications linéaires, multilinéaires et polynomiales . . . 69

Partie A

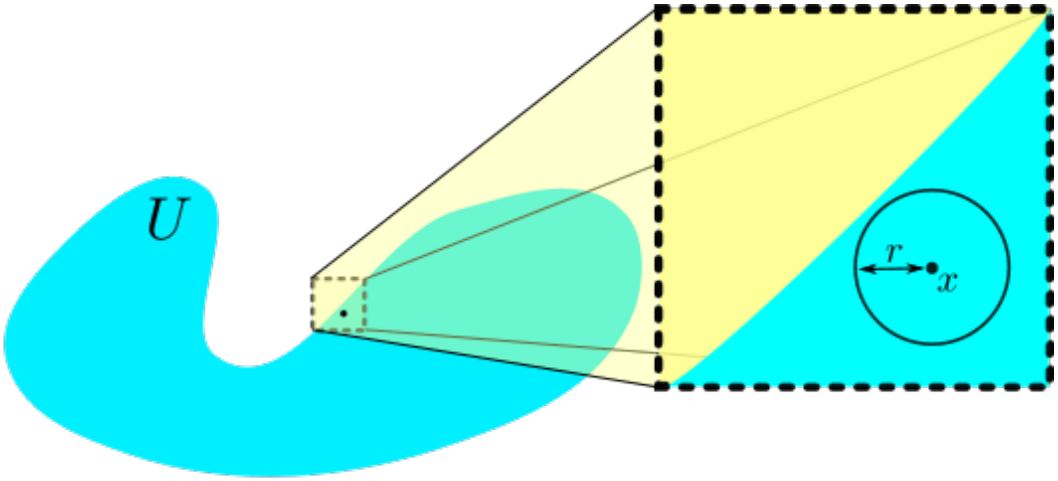
Topologie d'un espace vectoriel normé

Dans cette partie, $(E, \|\cdot\|)$ désigne un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Ouverts

Définition 1. *Partie ouverte*

Soit U une partie de E. On dit que U est un **ouvert** ou une **partie ouverte** de $(E, \|\cdot\|)$ si pour tout $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que $B_f(x, r) \subset U$.



Remarque 1.

On peut remplacer la boule fermée $B_f(x, r)$ par la boule ouverte $B(x, r)$ dans la définition.

Exercice 1.

1. Montrer l'équivalence entre la définition utilisant des boules fermées et celle utilisant des boules ouvertes.
2. Écrire la définition de partie ouverte avec des quantificateurs et en traduisant l'inclusion de $B_f(x, r)$ dans U.

Correction.

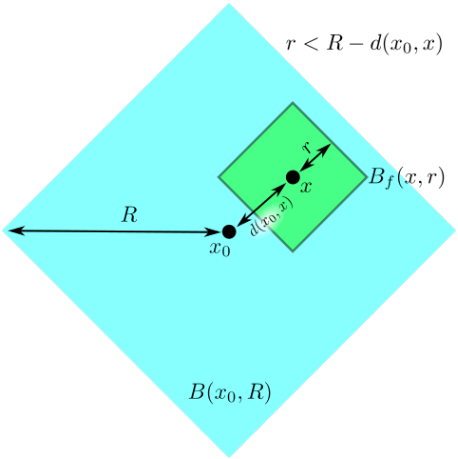
1. Il suffit de remarquer que pour tout $r > 0$, $B(x, r) \subset B_f(x, r)$ et $B_f(x, \frac{r}{2}) \subset B(x, r)$.
2. U est ouvert si, et seulement si :

$$\forall x \in U,\ \exists r > 0,\ \forall y \in E,\ \|x - y\| \leq r \Rightarrow y \in U.$$

On justifie ici la terminologie de boule *ouverte* employée dans ce chapitre.

Proposition 1.

Une boule ouverte est un ouvert de E.



Démonstration.

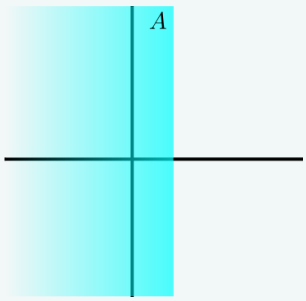
On considère une boule ouverte $B := B(x_0, R)$ de centre $x_0 \in E$ et de rayon $R > 0$. Soit $x \in B$. Alors $r = \frac{1}{2}(R - d(x_0, x)) > 0$ et on a, pour tout $y \in B_f(x, r)$,

$$d(y, x_0) \leq d(y, x) + d(x, x_0) \leq r + d(x_0, x) < R.$$

Par suite $B_f(x, r) \subset B$. Donc B est un ouvert de E. □

Exemple 1.

— L'espace E et l'ensemble vide $\emptyset$ sont des ouverts de E.
— Le sous-ensemble $A = \{(a, b) \mid a < \frac{1}{3}\}$ de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme deux est un ouvert.



Exercice 2.

1. Montrer l'affirmation de l'exemple précédent.
2. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Que dire de l'intervalle $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue ? dans $\mathbb{C}$ muni du module ?
3. Montrer que dans $C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie (i.e. la norme de la convergence uniforme), le sous-ensemble des fonctions strictement positives est un ouvert de E.
4. Montrer que dans $\mathcal{F}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ muni de la norme infinie, le sous-ensemble des fonctions strictement positives n'est pas ouvert.

Correction.

1. Soit $M = (x, y) \in A$. Alors $x < \frac{1}{3}$. On note $r = \frac{1}{2}(\frac{1}{3} - x) > 0$.
   Soit $M' = (u, v) \in B_f(M, r)$. Alors on a :
   $$r \geq d(M, M') = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2} \geq |x - u| \geq u - x.$$
   Or, comme $r = \frac{1}{2}(\frac{1}{3} - x) < \frac{1}{3} - x$, on a :
   $$u \leq r + x < \frac{1}{3} - x + x = \frac{1}{3},$$
   d'où $M' = (u, v) \in A$.
   Donc $B_f(M, r) \subset A$.
   Il en résulte que A est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne.
2. On note U le sous-ensemble en question.
   Soit $f \in U$. la fonction f est continue sur le segment $[0, 1]$ donc elle y est bornée et y atteint ses bornes. Notons m son minimum sur $[0, 1]$.
   Alors $B_f(f, \frac{m}{2}) \subset U$. En effet, si $g \in B_f(f, \frac{m}{2})$, alors, pour tout $x \in [0, 1]$,
   $$f(x) - g(x) \leq |g(x) - f(x)| \leq \|f - g\|_\infty \leq \frac{m}{2}.$$
   Ainsi, on a :
   $$g(x) \geq f(x) - \frac{m}{2} > f(x) - m \geq 0.$$
   Donc g est strictement positive sur $[0, 1]$.
   Il en résulte que U est un ouvert de $C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie.

3. Notons X le sous-ensemble en question et considérons $f : t \mapsto e^{-t^2}$. Comme f tend vers 0 en $\pm\infty$, pour tout $r > 0$, on pourra trouver une fonction dans $B_f(f, r)$ dont le graphe passe en dessous de l'axe des abscisses pour $|t|$ assez grand ; X ne peut donc pas être ouvert.

   Plus précisément, étant donné $r > 0$, exhibons une fonction $g \in B_f(f, r)$ qui n'est pas dans X.

   On note $M = \begin{cases} \sqrt{-\ln(r)} & \text{si } r \leq 1 \\ 0 & \text{si } r > 1 \end{cases}$.

   Alors, pour $|t| > M$, par stricte décroissance de la fonction f sur $\mathbb{R}_+$:

$$f(t) - r = f(|t|) - r < f(M) - r = e^{-M^2} - r = \begin{cases} 0 \leq 0 & \text{si } r \leq 1 \\ 1 - r \leq 0 & \text{si } r > 1 \end{cases}.$$

   Donc la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie, pour $t \in \mathbb{R}$, par $g(t) = f(t) - r$ appartient à la boule $B_f(f, r)$ car $\|f - g\|_\infty = r$ et n'est pas strictement positive car, d'après ce qui précéde, pour tout $|t| > M$, $g(t) < 0$. D'où $g \notin X$.

Proposition 2.

— La réunion d'une famille **quelconque** d'ouverts de E est un ouvert de E.
— L'intersection d'une famille **finie** d'ouverts est un ouvert.

Démonstration.

— Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille quelconque d'ouverts de E. Notons $U = \bigcup_{i \in I} U_i$.
  Pour tout $x \in U$, il existe $i \in I$ tel que $x \in U_i$. Ainsi, comme U_i est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B_f(x, r) \subset U_i \subset U$. Par suite, U est un ouvert.

— Soit $U_1, ..., U_n$ des ouverts de E. On note $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$.
  Soit $x \in U$. Alors, pour tout $1 \leq i \leq n$, $x \in U_i$ qui est un ouvert, donc il existe $r_i > 0$ tel que $B_f(x, r_i) \subset U_i$.
  On pose $r = \min(r_1, ..., r_n)$. Alors $r > 0$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$B_f(x, r) \subset B_f(x, r_i) \subset U_i.$$

  Il en résulte que $B_f(x, r) \subset U$. Donc U est un ouvert.

□

Exercice 3.

Montrer qu'en général, une intersection quelconque d'ouverts n'est pas un ouvert.

Correction.

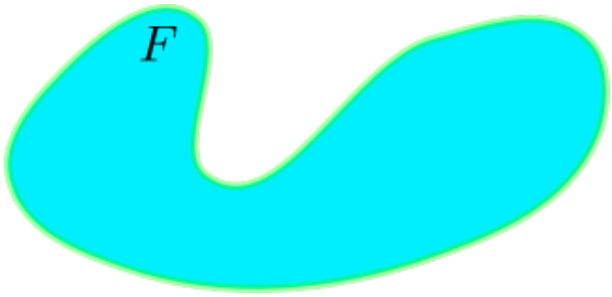
L'intersection de la famille $\left(\left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est égale au singleton $\{0\}$ (à démontrer par le

lecteur) qui n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$.

2. Fermés

Définition 2. *Fermé*

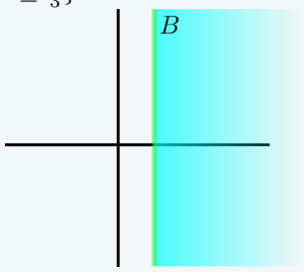
Soit F une partie de E. On dit que F est un **fermé** ou une **partie fermée** de $(E, \|\cdot\|)$ si son complémentaire F^c est un ouvert de E.



Exemple 2.

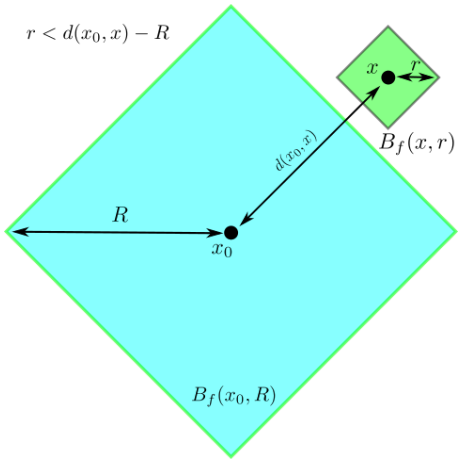
— L'espace E et l'ensemble vide $\emptyset$ sont des fermés de E.

— Le sous-ensemble $B = \{(a, b) \mid a \geq \frac{1}{3}\}$ de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme deux est un fermé.



Proposition 3.

Une boule fermée est un fermé de E.



Démonstration.

On considère une boule fermée $F := B_f(x_0, R)$ de centre $x_0 \in E$ et de rayon $R > 0$.
Soit $x \in F^c$ i.e. $x \notin F$. Alors $r = \frac{1}{2}(d(x_0, x) - R) > 0$ et on a, pour tout $y \in B_f(x, r)$,

$$d(x, x_0) \leq d(x, y) + d(y, x_0) \leq r + d(y, x_0) < d(x_0, x) - R + d(y, x_0).$$

Alors $d(y, x_0) > R$. Par suite $y \notin F$. Ainsi, $B_f(x, r) \subset F^c$.
Donc F^c est un ouvert de E.
Il en résulte que F est un fermé de E. □

Proposition 4.

— L'intersection d'une famille **quelconque** de fermés de E est un fermé de E.
— La réunion d'une famille **finie** de fermés de E est un fermé de E.

Démonstration.

On utilise les propriétés du passage au complémentaire :

— Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de fermés et $F = \bigcap_{i \in I} F_i$ l'intersection de cette famille. Alors on a :

$$F^c = \left(\bigcap_{i \in I} F_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} F_i^c.$$

Or chaque F_i^c est ouvert car F_i est fermé, donc d'après la proposition 2, F^c est ouvert comme réunion quelconque d'ouverts.
Par suite, F est fermé.

— On raisonne de manière analogue en remarquant que pour $n \in \mathbb{N}^*$ et des ensembles $A_1, ..., A_n$:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c.$$

□

Remarque 2.

Comme pour les intersections d'ouverts, une réunion quelconque de fermés n'est pas fermée en général : on peut considérer par exemple la famille de fermés $\left(\left[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right]\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 4.

Montrer que les ensembles suivants sont des fermés :

1. Un singleton.
2. Une sphère.
3. $\mathbb{N}$ (dans $\mathbb{R}$).
4. $\mathbb{R}$ (dans $\mathbb{C}$).

Correction.

— On considère le singleton $\{x_0\}$ dans E. Soit $x \in E \setminus \{x_0\}$, et $r = d(x, x_0) > 0$. Alors pour tout $y \in B_f(x, \frac{r}{2})$, $d(x_0, y) \geq d(x_0, x) - d(x, y) \geq \frac{r}{2} > 0$. Donc $y \in E \setminus \{x_0\}$. Par suite $\{x_0\}$ est fermé.

— Soit $S(x_0, r)$ une sphère de E. Alors on a :

$$S(x_0, r) = B_f(x_0, r) \setminus B(x_0, r) = B_f(x_0, r) \cap (B(x_0, r))^c .$$

Par suite, $S(x_0, r)$ est fermé comme intersection de fermés.

— Soit $x \notin \mathbb{N}$. On note $r = \min(x - E(x), E(x) + 1 - x) > 0$. Alors $B_f(x, \frac{r}{2}) \subset \mathbb{R}$. Donc $\mathbb{N}^c$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Par suite, $\mathbb{N}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

— Soit $z \notin \mathbb{R}$. On note $r = |\mathrm{Im}(z)| > 0$. Alors $B_f(z, \frac{r}{2}) \subset \mathbb{C}$. Donc $\mathbb{R}^c$ est un ouvert de $\mathbb{C}$. Par suite, $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{C}$.

Exercice 5.

Soit F une partie fermée de E et $x \in E$. Montrer que si $x \notin F$, alors $d(x, F) > 0$.

Correction.

L'élément x appartient à F^c qui est ouvert, donc il existe $r > 0$ tel que $B_f(x, r) \subset F^c$. Par suite, pour tout $y \in F$, $y \notin B_f(x, r)$ d'où $d(x, y) \geq r$. Par suite,

$$d(x, F) \geq r > 0.$$

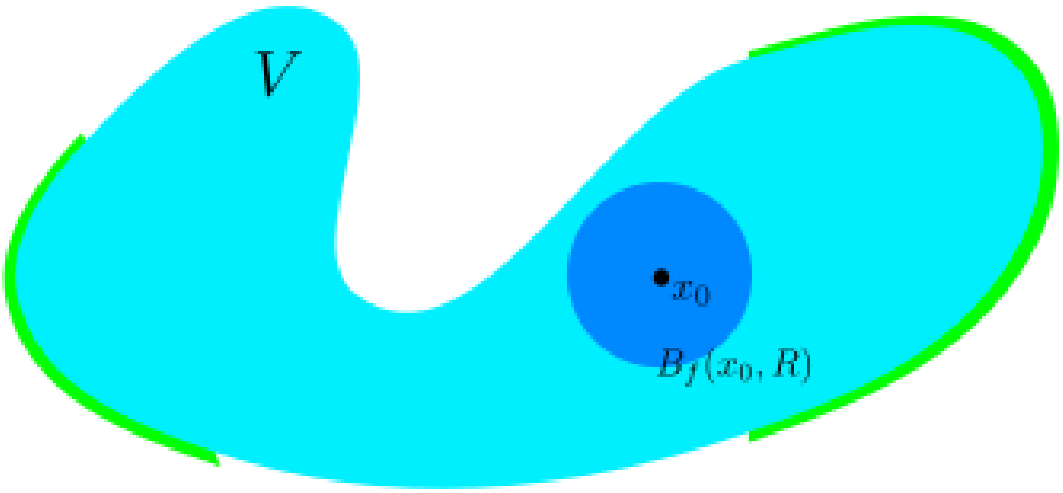
3. Voisinages

Définition 3. *Voisinage*

Soit $x_0 \in E$ et V une partie de E. On dit que V est un **voisinage de** x_0 s'il existe $r > 0$ tel que

$$B(x_0, r) \subset V.$$

On note $\mathcal{V}(x_0)$ l'ensemble des voisinages de x_0.



Remarque 3.

On peut remplacer la boule ouverte $B(x_0, r)$ par la boule fermée $B_f(x_0, r)$ dans la définition.

Exercice 6.

1. Montrer l'équivalence entre la définition utilisant des boules ouvertes et celle utilisant des boules fermées.
2. Écrire la définition de voisinage de x_0 avec des quantificateurs et en traduisant l'inclusion de $B(x_0, r)$ dans V.

Correction.

1. Il suffit de remarquer que pour tout $r > 0$, $B(x_0, r) \subset B_f(x_0, r)$ et $B_f(x_0, \frac{r}{2}) \subset B(x_0, r)$.
2. V est un voisinage de x_0 si, et seulement si :

$$\exists r > 0,\ \forall x \in E,\ \|x - x_0\| \leq r \Rightarrow x \in V.$$

Proposition 5.

Soit U une partie de E. Alors U est ouvert si, et seulement si, U est un voisinage de chacun de ses points.

Démonstration.

- ($\Rightarrow$). On suppose U ouvert. Soit $x \in U$. Comme U est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B_f(x, r) \subset U$. Donc a fortiori, $B(x, r) \subset U$. Donc U est un voisinage de x.
- ($\Leftarrow$). On suppose que U est un voisinage de chacun de ses points. Soit $x \in U$. Comme U est un voisinage de x, alors il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$. Par suite, $B_f(x, \frac{r}{2}) \subset U$. Donc U est ouvert.

$\square$

Exercice 7.

Soit $V \subset E$ et $x_0 \in E$. Montrer que V est un voisinage de x_0 si, et seulement si, il existe U un ouvert tel que $x_0 \in U$ et $U \subset V$.

Correction.

- ($\Rightarrow$). On suppose $V \in \mathcal{V}(x_0)$. Alors il existe $r > 0$ tel que l'ouvert $B(x_0, r)$ est inclus dans V.
- ($\Leftarrow$). On suppose qu'il $U \subset V$ avec $x_0 \in U$. Alors il existe $r > 0$ tel que :

$$B(x_0, r) \subset B_f(x_0, r) \subset U \subset V,$$

donc V est un voisinage de x_0.

Proposition 6.

Soit $x_0 \in E$.
- L'intersection d'une famille **finie** de voisinages de x_0 est un voisinage de x_0.
- Tout ensemble contenant un voisinage de x_0 est un voisinage de x_0.
- La réunion d'une famille **quelconque** de voisinages de x_0 est un voisinage de x_0.

Exercice 8.

Montrer, en s'inspirant de la proposition 2, la première assertion de la proposition précédente.

Démonstration.

- Arguments similaires à ceux de la démonstration de la proposition 2.
- Immédiat
- On utilise le point précédent : une réunion de voisinages de x_0 contient chacun des voisinages en question, c'est donc un voisinage de x_0.

□

4. Topologie d'un espace produit

Proposition 7.

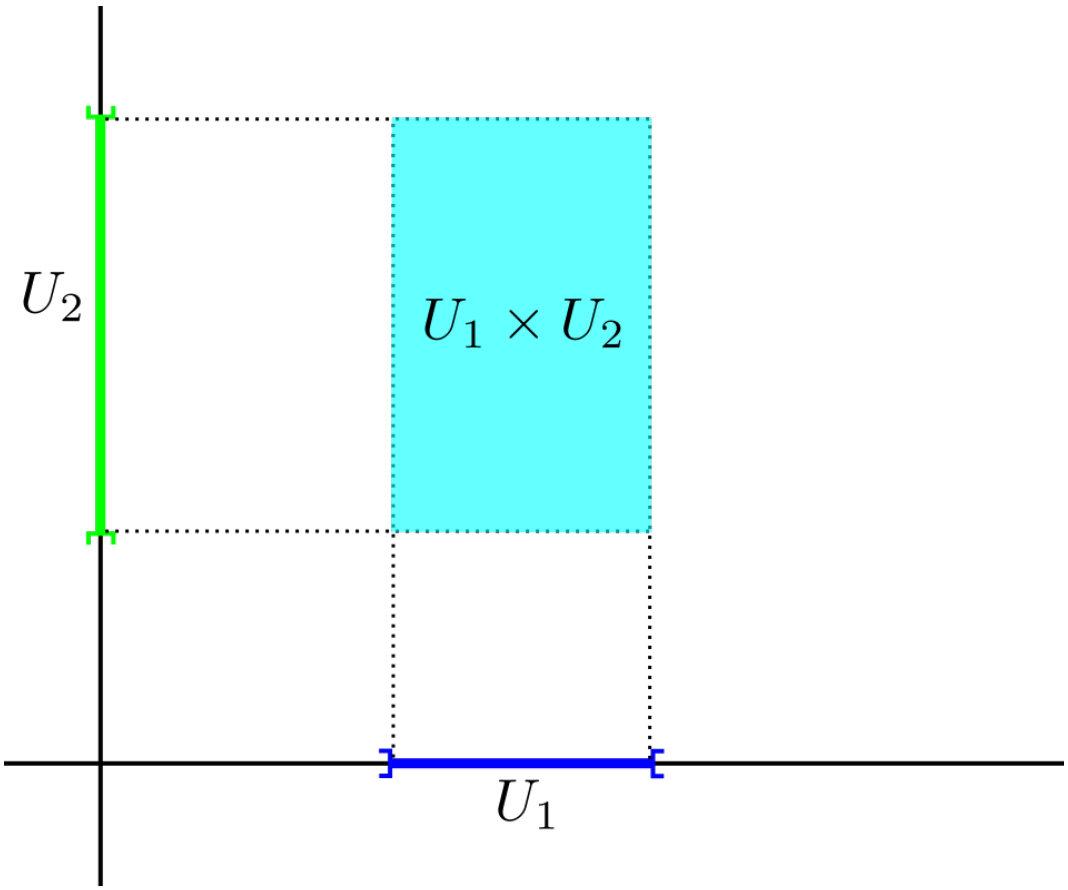
Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $(E_1, N_1), ..., (E_k, N_k)$ des espaces vectoriels normés. On considère $E = \prod_{i=1}^{k} E_i$ muni de la norme produit $\|\cdot\|$. Soit $U_1 \subset E_1$,...,$U_k \subset E_k$.
Si, pour tout $1 \leq i \leq k$, U_i est un ouvert de E_i, alors $U_1 \times ... \times U_k$ est un ouvert de E.

Démonstration.

On suppose que pour tout $1 \leq i \leq k$, U_i est un ouvert de E_i. Soit $x = (x_1, ..., x_k) \in E$. Alors pour tout $1 \leq i \leq k$, il existe $r_i > 0$ tel que $B_f^{N_i}(x_i, r_i) \subset U_i$ car U_i est ouvert.
On note $r = \min(r_1, ..., r_k)$. Soit $y = (y_1, ..., y_k) \in B_f^{\|\cdot\|}(x, r)$. Alors on a :

$$r \geq \|y - x\| = \max_{1 \leq i \leq k} (N_i(y_i - x_i)).$$

Par suite, pour tout $1 \leq i \leq k$, $N_i(y_i - x_i) \leq r \leq r_i$ et donc $y_i \in B_f^{N_i}(x_i, r_i) \subset U_i$.
Il en résulte que $y \in U_1 \times ... \times U_k$. D'où $B_f^{\|\cdot\|}(x, r) \subset \prod_{i=1}^{k} U_i$.
Donc $U_1 \times ... \times U_k$ est un ouvert de E muni de la norme produit. □



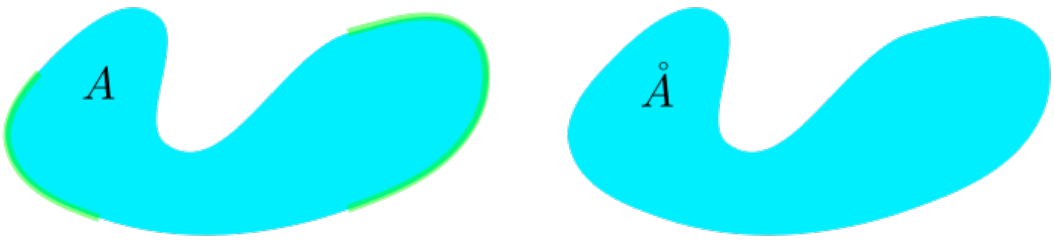
5. Intérieur

Définition 4. *Point intérieur et intérieur d'une partie*

Soit $A \subset E$.

Soit $x \in E$. On dit que x est un **point intérieur** à A si A est un voisinage de x i.e. s'il existe $r > 0$ telle que $B(x, r) \subset A$.

On appelle **intérieur** de A l'ensemble noté $\mathring{A}$ des points intérieurs à A.



Remarque 4.

- Si x est un point intérieur à A, alors $x \in A$ d'après la définition. Donc $\mathring{A} \subset A$.
- Si A, B sont des parties de E avec $A \subset B$, alors $\mathring{A} \subset \mathring{B}$. La réciproque est fausse.

Exemple 3.

- Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Alors $\overset{\circ}{\widehat{[a,b]}} =]a, b[$.
- Soit $A = \{(a,b) \mid a \geq \frac{1}{3}\} \subset \mathbb{R}^2$. Alors $\mathring{A} = \{(a,b) \mid a > \frac{1}{3}\}$.

Proposition 8.

Soit $A \subset E$.

- $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A.
- A est ouvert si, et seulement si, $A = \mathring{A}$.

Démonstration.

- Soit U un ouvert inclus dans A. Alors tout point de U est intérieur à A car pour tout $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que $x \in B(x,r) \subset B_f(x,r) \subset U \subset A$. Donc $U \subset \mathring{A}$. Il reste à prouver que $\mathring{A}$ est ouvert.
  Soit $x \in \mathring{A}$. Alors il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset A$. Or $B(x,r)$ est un ouvert, donc, d'après ce qui précède, $B(x,r) \subset \mathring{A}$; par suite $\mathring{A}$ est ouvert.
  Il en résulte que $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A.
- Si A est ouvert, alors $A \subset \mathring{A}$ d'après ce qui précède. Réciproquement, toujours d'après ce qui précède, $\mathring{A}$ est ouvert, donc A est ouvert.

□

6. Adhérence

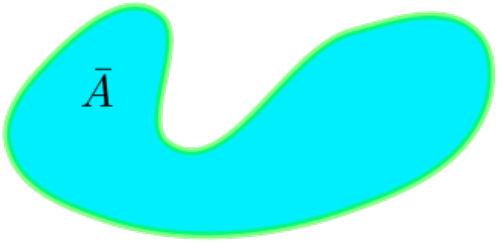
Définition 5. *Point adhérent et adhérence d'une partie*

Soit $A \subset E$.

Soit $x \in E$. On dit que x est un **point adhérent** à A si, pour tout $r > 0$,

$$B(x,r) \cap A \neq \emptyset.$$

On appelle **adhérence** de A l'ensemble noté $\overline{A}$ des points adhérents à A.



Remarque 5.

— Pour tout $A \subset E$, $A \subset \overline{A}$.
— Si A, B sont des parties de E avec $A \subset B$, alors $\overline{A} \subset \overline{B}$. La réciproque est fausse.

Exemple 4.

— Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Alors $\overline{]a, b[} = [a, b]$.
— Soit $A = \{(a, b) \mid a > \frac{1}{3}\} \subset \mathbb{R}^2$. Alors $\overline{A} = \{(a, b) \mid a \geq \frac{1}{3}\}$.

Proposition 9.

Soit $A \subset E$. Alors :

$$\left(\overline{A}\right)^c = \overset{\circ}{\widehat{A^c}}, \quad \overline{A} = \left(\overset{\circ}{\widehat{A^c}}\right)^c \quad \text{et} \quad \mathring{A} = \left(\overline{(A^c)}\right)^c$$

Démonstration.

Les deux dernières relations découlent clairement de la première. Prouvons $\left(\overline{A}\right)^c = \overset{\circ}{\widehat{A^c}}$.

Si $x \notin \overline{A}$, alors il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \cap A = \emptyset$ donc $B(x, r) \subset A^c$. Par suite $x \in \overset{\circ}{\widehat{A^c}}$. Donc $\left(\overline{A}\right)^c \subset \overset{\circ}{\widehat{A^c}}$.
Réciproquement, les mêmes arguments employés dans l'autre "sens" donnent l'autre inclusion. □

Exercice 9.

Soit $A \subset E$ une partie non vide et $x \in E$. Montrer que :

$$x \in \overline{A} \text{ si, et seulement si, } d(x, A) = 0.$$

Correction.

- $(\Rightarrow)$. On suppose $x \in \overline{A}$.
  Alors pour tout $r > 0$, $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$. Par suite, pour tout $r > 0$, il existe $a \in A$ tel que $d(x, A) \leq d(x, a) < r$. Donc $d(x, A) = 0$.

- ($\Leftarrow$). On suppose $d(x, A) = 0$.
  Alors pour tout $r > 0$, il existe $a \in A$ tel que $d(x, a) < r$. Donc $a \in B(x, r) \cap A$. D'où $B(x, r) \cap A$ non vide. Par suite $x \in \overline{A}$.

Proposition 10.

Soit $A \subset E$.
- $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.
- A est fermé si, et seulement si, $A = \overline{A}$.

Démonstration.

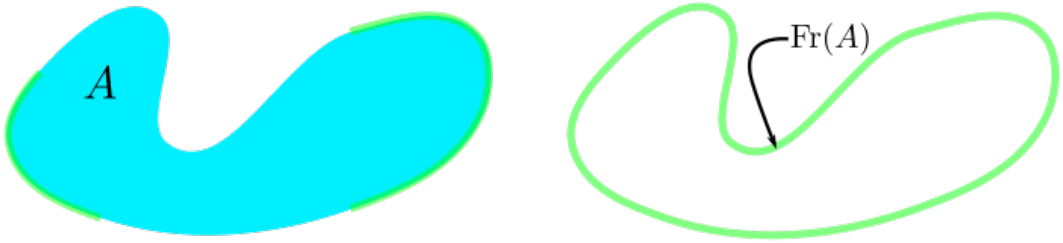
On utilise les résultats de la proposition 9 pour se ramener au cas de l'intérieur de A et on applique la proposition 8. □

7. Frontière

Définition 6. *Frontière d'une partie*

Soit $A \subset E$.
On appelle **frontière** de A l'ensemble noté $\mathrm{Fr}(A)$ (ou ∂A) défini par :

$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}.$$



Exemple 5.

- La frontière de $[a, b[$ est la paire $\{a, b\}$.
- La frontière de $A = \{(a, b) \mid a < \frac{1}{3}\}$ dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, est l'ensemble $\mathrm{Fr}(A) = \{(a, b) \mid a = \frac{1}{3}\}$.

Exercice 10.

Soit $A \subset E$.
- Montrer que $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c}$.

— Montrer que $\mathring{A} \cup \mathrm{Fr}(A) \cup (\overline{A})^c = E$ et que les intersections deux à deux de ces trois ensembles sont vides. (On dira que ces trois ensembles forment une partition de E).

Correction.

— On a $\overline{A^c} = \left(\mathring{A}\right)^c$. Or

$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap (\mathring{A})^c,$$

d'où le résultat.

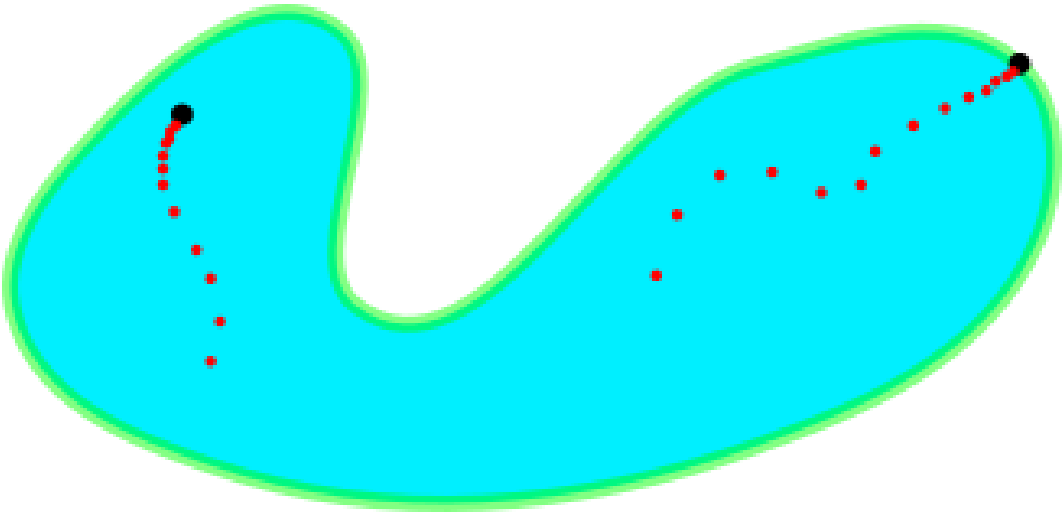
— Comme $\mathring{A} \subset \overline{A}$, la relation $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$ assure que $\mathring{A}$ et $\mathrm{Fr}(A)$ forment une partition de $\overline{A}$. Le résultat découle immédiatement de cette remarque.

8. Caractérisation séquentielle des fermés

a. Caractérisation séquentielle des points adhérents.

Proposition 11. *Caractérisation séquentielle des points adhérents*

Soit $A \subset E$ et $x \in E$.
L'élément x appartient à $\overline{A}$ si, et seulement si, il existe une suite à valeurs dans A qui converge vers x.



Démonstration.

- $(\Rightarrow)$. On suppose $x \in \overline{A}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe

$$a_n \in B(x, \frac{1}{2^n}) \cap A.$$

On a donc construit une suite (a_n) à valeurs dans A qui converge vers x ; en effet :

$$\|a_n - x\| \leq \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

- ($\Leftarrow$). On suppose qu'il existe une suite (a_n) à valeurs dans A qui converge vers x. Soit $r > 0$. Montrons que $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$. Comme (a_n) tend vers x, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|a_N - x\| < r.$$

Par suite, $a_N \in B(x,r) \cap A$.

□

Exercice 11.

Montrer que l'adhérence d'un sous-espace vectoriel est aussi un sous-espace vectoriel.

Correction.

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrons que $\overline{F}$ est une sous-espace vectoriel de E.

— F est non vide. En effet $0_E \in F \subset \overline{F}$.

— Soit $x, y \in \overline{F}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On cherche à montrer que $\lambda x + \mu y \in \overline{F}$.
Comme x, y sont des points adhérents à F, d'après la proposition 11, il existe des suites $(x_n), (y_n)$ à valeurs dans F tels que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ et $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$.
Par suite, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda x_n + \mu y_n \in F$, et

$$\|\lambda x_n + \mu y_n - (\lambda x + \mu y)\| = \|\lambda(x_n - x) + \mu(y_n - y)\| \leq |\lambda| \underbrace{\|x_n - x\|}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} + |\mu| \underbrace{\|y_n - y\|}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Donc la suite $(\lambda x_n + \mu y_n)$ à valeurs dans F converge vers $\lambda x + \mu y$. D'après la proposition 11, $\lambda x + \mu y \in \overline{F}$. Il en résulte que $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.

b. Caractérisation séquentielle des fermés.

Théorème 1. *Caractérisation séquentielle des fermés*

Soit $A \subset E$
La partie A est fermée si, et seulement si, la limite de toute suite convergente à valeurs dans A appartient à A.

Démonstration.

- ($\Rightarrow$). On suppose A fermée. Soit (a_n) une suite à valeurs dans A qui converge vers $l \in E$. D'après la caractérisation des points adhérents, l appartient à $\overline{A}$. Or A est fermée donc $l \in \overline{A} = A$.
- ($\Leftarrow$). On suppose que la limite de toute suite convergente à valeurs dans A appartient à

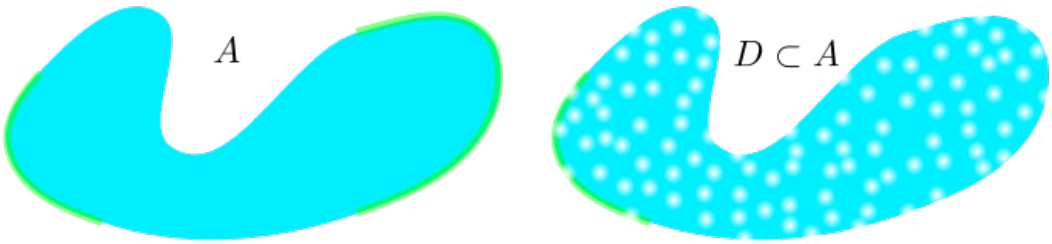
A. Montrons que $\overline{A} \subset A$.
Soit $x \in \overline{A}$. D'après la caractérisation séquentielle des points adhérents, il existe une suite à valeurs dans A qui converge vers x. Par hypothèse $x = \lim a_n \in A$. Par suite, $\overline{A} \subset A$. L'inclusion réciproque étant triviale, on a $\overline{A} = A$. Par suite A est fermée.

□

9. Densité

Définition 7. *Densité*

Soit A une partie de E. On dit qu'une partie D de A est **dense** dans A si $A \subset \overline{D}$.



Proposition 12.

Soit $A \subset E$ et $D \subset A$. On a équivalence entre :

i) D est dense dans A ;

ii) pour tout $a \in A$ et pour tout $r > 0$, il existe $x \in D$ tel que $\|x - a\| \leq r$;

iii) pour tout $a \in A$, il existe une suite d'éléments de D qui converge vers a.

Démonstration.

les propriétés ii) et iii) sont simplement des reformulations de la densité de D dans A. □

Exemple 6.

— L'ensemble $\mathbb{R}^*$ est dense dans $\mathbb{R}$.
— L'intervalle $]a, b[$ est dense dans $[a, b]$.

Exercice 12.

Montrer que :

1. Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble $GL_n(\mathbb{K})$ des matrices inversibles est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour la norme infinie. (On verra dans la suite que ceci est vrai pour toutes les normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

Indication : On admettra que, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'application $\chi_M : t \mapsto \det(M - tI_n)$ est une fonction polynomiale de degré exactement n. (Nous montrerons ce résultat au chapitre IV sur la réduction de matrices)

Correction.

— Premièrement, montrons la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Exhibons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de rationnels qui converge vers x.
Voici un exemple classique d'une telle suite : pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} E(ix).$$

Par les propriétés de la partie entière, on a, pour $i = 1, ..., n$:

$$ix - 1 < E(ix) \leq ix,$$

d'où en sommant ces inégalités de $i = 1$ à n, puis en multipliant par $\frac{2}{n^2}$, on obtient :

$$\frac{n+1}{n}x - \frac{1}{n} < u_n \leq \frac{n+1}{n}x.$$

(On rappelle que $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$).
Or $\frac{n+1}{n}x - \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ et $\frac{n+1}{n}x \xrightarrow[n\to\infty]{} x$; donc d'après le théorème des gendarmes, (u_n) converge vers x.
De plus, il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \mathbb{Q}$. Il en résulte que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Nous allons utiliser le résultat précédent pour montrer la densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons qu'il existe une suite d'irrationnels qui converge vers x.
Première remarque : si $y \in \mathbb{R}$ est irrationnel, pour tous rationnels $r, s \neq 0$, $r + sy$ aussi.
Prenons un irrationnel au hasard, disons $\sqrt{2}$ (exercice : montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel !). Alors d'après la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite (u_n) de rationnels qui converge vers x. Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = u_n + \frac{\sqrt{2}}{n}.$$

Alors d'après la remarque initial, la suite (v_n) est à valeurs dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, et on a :

$$\lim_{n\to\infty} v_n = x.$$

Par suite, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrons qu'il existe une suite à valeurs dans $GL_n(\mathbb{K})$ qui converge vers M.
On définit la suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour $k \in \mathbb{N}$:

$$M_k = M - \frac{1}{2^k}I_n.$$

Comme l'application χ_M est une fonction polynomiale de degré n, alors elle s'annule au plus n fois sur $\mathbb{R}$. Par suite, à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$, on a, pour tout $k \geq N$,

$\det(M_k) = \chi_M(2^{-k}) \neq 0$.
On pose alors, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$M'_k = M_{k+N}$$

Alors $(M'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans $GL_n(\mathbb{K})$ et on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\|M - M'_k\|_\infty = 2^{-k-N}\|I_n\|_\infty = 2^{-k-N} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Par suite, (M'_k) converge vers M. Il en résulte que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

10. Ouverts, fermés et voisinages relatifs

Définition 8. *Ouvert relatif, fermé relatif et voisinage relatif*

Soit $A \subset E$.

- Soit $U \subset E$. On dit que U est un **ouvert relatif** de A s'il existe un ouvert U' de E tel que $U = U' \cap A$.
- Soit $F \subset E$. On dit que F est un **fermé relatif** de A s'il existe un fermé F' de E tel que $F = F' \cap A$.
- Soit $x_0 \in E$ et $V \subset E$. On dit que V est un **voisinage de x_0 relatif** de A s'il existe un voisinage V' de x_0 dans E tel que $V = V' \cap A$.

Remarque 6.

Si $A = E$, les notions *relatives* coïncident avec les définitions déjà vues d'ouverts, de fermés et de voisinages.

Mais si A est strictement inclus dans E, les ouverts, fermés et voisinages relatifs ne sont, en général, pas des ouverts, des fermés et des voisinages de E respectivement.

Exercice 13.

1. — Dans $\mathbb{R}$, montrer que $]0,1]$ est un ouvert relatif de $[-1,1]$. Que remarque-t-on ?
   — Donner un exemple de fermé relatif qui n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$ et un exemple de voisinage relatif qui n'est pas un voisinage dans $\mathbb{C}$.
2. Soit $A \subset E$. Montrer que A est un ouvert relatif de A et un fermé relatif de A.

Correction.

1. — On a $]0,1] =]0,+\infty[\cap [-1,1]$. Donc $]0,1]$ est un ouvert relatif de $[-1,1]$. On a donc un exemple d'ouvert relatif qui n'est pas un ouvert de l'espace sous-jacent.
   — On peut prendre par exemple, dans $\mathbb{R}$, $[0,1[$ qui n'est pas fermé mais qui est un fermé relatif de $]-1,1[$.

   Pour le deuxième exemple, dans $\mathbb{C}$, on peut considérer $[-1,1]$ qui n'est pas un voisinage

de 0 dans $\mathbb{C}$ mais qui est un voisinage de 0 relatif de $\mathbb{R}$ (en effet, $[-1,1] = \mathbb{D} \cap \mathbb{R}$ où $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ qui est bien un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$).

2. On a $A = E \cap A$ et E est à la fois un ouvert de E et un fermé de E. D'où le résultat.

11. Topologie et comparaison de normes

a. Conservation des ouverts, fermés et voisinages

Proposition 13.

Soit N_1,N_2 des normes sur E. On suppose que N_1 est dominée par N_2. Alors un ouvert (resp. un fermé, resp. un voisinage d'un point $x_0 \in E$) pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_2 (resp. un fermé, resp. un voisinage de x_0).

Démonstration.

On suppose que N_1 est dominée par N_2. Soit U un ouvert de E pour N_1. Alors pour tout $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que $B_f^{N_1}(x,r) \subset U$. Or d'après la proposition précédente, toute boule de N_1 contient une boule de N_2 ; donc pour tout $x \in U$, il existe $r, R > 0$, tels que

$$B_f^{N_2}(x,R) \subset B_f^{N_1}(x,r) \subset U.$$

Par suite U est ouvert pour la norme N_2. En utilisant les caractérisations de fermé et de voisinage en terme d'ouvert, on obtient le résultat grâce au raisonnement précédent. □

Théorème 2. *Conservation des ouverts, fermés et voisinages*

Soit N_1,N_2 des normes sur E. On suppose que N_1 et N_2 sont équivalentes.
Une partie est un ouvert (resp. un fermé, resp. un voisinage d'un point $x_0 \in E$) pour la norme N_1 si, et seulement si, elle est un ouvert pour la norme N_2 (resp. un fermé, resp. un voisinage de x_0).

Démonstration.

On applique la proposition 13 pour N_1 dominée par N_2 puis pour N_2 dominée par N_1. □

b. Exercice

Exercice 14. *Banque CCP*

On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.

On pose : $\forall f \in E$, $N_\infty(f) = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$.

1. (a) Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E.
   (b) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f) \leq kN_\infty(f)$.
   (c) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.
2. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

Correction.

1.(a) Voire le paragraphe "normes sur des espaces de fonctions".

(b) $k = 1$ convient car, $\forall f \in E$, $\displaystyle\int_0^1 |f(t)|\ \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 N_\infty(f)\mathrm{d}t = N_\infty(f)$.

(c) L'application identité de E, muni de la norme N_∞, vers E, muni de la norme N_1, est continue car linéaire et vérifiant $\forall f \in E$, $N_1(f) \leqslant kN_\infty(f)$.
L'image réciproque d'un ouvert par une application continue étant un ouvert, on en déduit que :
un ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.
On peut aussi raisonner de façon plus élémentaire par inclusion de boules et retour à la définition d'un ouvert.

2. Pour $f_n(t) = t^n$, on a $N_1(f_n) = \dfrac{1}{n+1}$ et $N_\infty(f_n) = 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{N_\infty(f_n)}{N_1(f_n)} = +\infty$.
Donc ces deux normes ne sont donc pas équivalentes.

Partie B

Limites et continuité

Dans toute cette partie, $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ désignent deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que E est de dimension non nulle.
Quand on considérera une partie A incluse dans E, on supposera toujours - sans le dire - que A est non vide.

1. Limite d'une application

a. Généralités

Définition 9. *Limite*

Soit $A \subset E$, $f : A \to F$ une application, $a \in \overline{A}$ et $\ell \in F$.
On dit que f **admet pour** ℓ **limite en** a ou **tend vers** ℓ **en** a si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in A, \quad \|x - a\|_E \leq \delta \ \Rightarrow\ \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

Proposition 14.

Soit $A \subset E$, $f : A \to F$ une application, $a \in \overline{A}$ et $\ell \in F$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

i) f tend vers ℓ en a ;

ii) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ f(B_f(a, \delta) \cap A) \subset B_f(\ell, \varepsilon)$;

iii) pour tout voisinage V de ℓ dans F, il existe un voisinage W de a dans E tel que $f(W \cap A) \subset V$.

Démonstration.

Il s'agit simplement de reformulations de la définition. □

Proposition 15.

Soit $A \subset E$, $f : A \to F$ et $a \in \overline{A}$.
Si f admet une limite en a, alors cette limite est unique.

Démonstration.

On suppose que f tend vers l et ℓ' en a. Alors, pour tout $x \in A$, on a :

$$\|\ell - \ell'\|_F = \|\ell - f(x) + f(x) - \ell\|_F \leq \|f(x) - \ell\|_F + \|f(x) - \ell'\|_F.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\delta, \delta' > 0$ tels que pour tout $x \in A$:

$$\|x - a\|_E \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$\|x - a\|_E \leq \delta' \Rightarrow \|f(x) - \ell'\|_F \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On note $\eta = \min(\delta, \delta')$. Par suite, pour tout $x \in A$ tel que $\|x - a\|_E \leq \eta$:

$$\|\ell - \ell'\|_F =\leq \underbrace{\|f(x) - \ell\|_F}_{\leq \varepsilon/2} + \underbrace{\|f(x) - \ell'\|_F}_{\leq \varepsilon/2} \leq 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduite que $\|\ell - \ell'\|_E = 0$, et donc, d'après l'axiome de séparation de $\|\cdot\|_E$, $\ell = \ell'$. □

Notation 1.

Soit $A \subset E$, $f : A \to F$, $a \in \overline{A}$ et $\ell \in F$. Si f admet ℓ pour limite en a, on note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell.$$

b. Limites et infini

Dans la définition suivante, on se placera dans le cas où $F = \mathbb{R}$ pour considérer des limites infinies :

Définition. Limite infinie

Soit $A \subset E$, $f : A \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{A}$.

— On dit que f tend vers $+\infty$ en a, et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, si :

$$\forall R \geq 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in A, \quad \|x - a\|_E \leq \delta \ \Rightarrow\ f(x) \geq R.$$

— On dit que f tend vers $-\infty$ en a, et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$, si :

$$\forall R \geq 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in A, \quad \|x - a\|_E \leq \delta \ \Rightarrow\ f(x) \leq -R.$$

Pour cette définition, on se place dans le cas où $A = E = \mathbb{R}$ pour considérer des limites en $\pm\infty$:

Définition. Limite en $\pm\infty$

Soit $f : \mathbb{R} \to F$ et $\ell \in F$

— On dit que f tend vers ℓ en $+\infty$, et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, si :

$$\forall \varepsilon \geq 0,\ \exists R > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad x \geq R \ \Rightarrow\ \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

— On dit que f tend vers ℓ en $-\infty$, et on note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$, si :

$$\forall \varepsilon \geq 0,\ \exists R > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad x \leq -R \ \Rightarrow\ \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

On considère désormais le cas où A n'est pas bornée et $\|x\| \to +\infty$:

Définition.

Soit $A \subset E$ une partie non bornée, $f : A \to F$ et $\ell \in F$.
On dit que f **tend vers** ℓ **quand** $\|x\|$ **tend vers** $+\infty$, et on note $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f(x) = \ell$ si :

$$\forall \varepsilon \geq 0,\ \exists R > 0,\ \forall x \in A, \quad \|x\|_E \geq R \ \Rightarrow\ \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

c. Caractérisation séquentielle de la limite

Théorème 3. *Caractérisation séquentielle de la limite*

Soit $A \subset E$, $f : A \to F$, $a \in \overline{A}$ et $\ell \in F$.
Alors f tend vers ℓ en a si, et seulement si, pour tout suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A telle que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$,

$$f(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell.$$

Autrement dit, f tend vers ℓ en a si, et seulement si, pour tout suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A qui converge vers a, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans F converge vers ℓ.

Démonstration.

- $(\Rightarrow)$. On suppose $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$. Soit (u_n) une suite à valeurs dans A tel que $u_n \to a$.
  Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in A$ tel que $\|x-a\|_E \leq \delta$, $\|f(x)-\ell\|_F \leq \varepsilon$.
  La suite (u_n) converge vers a donc il existe un rang $N \in \mathbb{N}$, tel que $n \geq N$,

  $$\|u_n - a\| \leq \delta.$$

  Par suite, $\|f(u_n) - \ell\|_F \leq \varepsilon$.
  Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, il en résulte que la suite $(f(u_n))$ converge vers ℓ.
- $(\Leftarrow)$. On procède par contraposition. On suppose que f ne tend pas vers ℓ en a.
  Exhibons une suite (x_n) à valeurs dans A qui tend vers a et telle que la suite $(f(u_n))$ ne tende pas vers ℓ.
  Comme f ne tend pas vers ℓ en a, alors :

  $$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0\ \exists x \in A; \|x - a\|_E \leq \delta \text{ et } \|f(x) - \ell\|_F > \varepsilon.$$

  Considérons ce $\varepsilon > 0$ et soit $n \in \mathbb{N}$. Alors pour $\delta = \frac{1}{2^n}$, il existe $u_n \in A$ avec $\|u_n - a\|_E \leq \delta$ et tel que $\|f(u_n) - \ell\|_F > \varepsilon$.
  Ainsi la suite (u_n) est à valeurs dans A, converge vers a mais pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f(u_n) - \ell\|_F > \varepsilon$, donc $(f(u_n))$ ne converge pas vers ℓ.

$\square$

2. Propriétés des limites

a. Opérations algébriques

Proposition 16. *Espace vectoriel des fonctions convergentes*

Soit $A \subset E$ et $a \in \overline{A}$. L'ensemble des fonctions de A dans F qui admettent une limite en a est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et l'application qui à f associe sa limite en a est linéaire.

Démonstration.

On peut utiliser les résultats établis dans la partie sur les suites à valeurs dans un espace vectoriel normé en appliquant la caractérisation de la limite par les suites.

Voici une preuve directe :
On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions de A dans F qui admettent une limite en a. Montrons que c'est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(A, F)$ de toutes les fonctions de A dans F.

— L'application nulle $\mathbf{0} : x \mapsto 0_F$ de A dans F admet pour limite 0_F en a. Donc $\mathbf{0}$ appartient à $\mathcal{F}$.

— Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $f, f' \in \mathcal{F}$. On note $\ell, \ell' \in F$ leurs limites respectives en a. Alors on a, pour tout $x \in A$:

$$\begin{aligned} \|(\lambda f + \mu f')(x)) - (\lambda\ell + \mu\ell')\|_F &= \|\lambda(f(x) - \ell) + \mu(f'(x) - \ell')\|_F \\ &\leq |\lambda| \underbrace{\|f(x) - \ell\|_F}_{\xrightarrow[x\to a]{} 0} + |\mu| \underbrace{\|f'(x) - \ell'\|_F}_{\xrightarrow[x\to a]{} 0} \xrightarrow[x\to a]{} 0. \end{aligned}$$

Donc $\lambda f + \mu f'$ admet une limite en a égale $\lambda\ell + \mu\ell' \in F$ (car F est un espace vectoriel. D'où $\lambda f + \mu f'$ appartient à $\mathcal{F}$.

Soit $L_a : \mathcal{F} \to \mathbb{K}$ l'application $L_a : f \mapsto \lim_{x\to a} f(x)$. En reprenant les arguments précédents, on obtient que pour $f, f' \in \mathcal{F}$ de limites respectives $\ell, \ell' \in F$ en a :

$$L_a(\lambda f + \mu f') = \lambda\ell + \mu\ell' = \lambda L_a(f) + \mu L_a(f').$$

Donc L_a est une application linéaire de $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{K}$. □

Proposition 17.

Soit $A \subset E$, $a \in \overline{A}$, $f : A \to F$, $\varphi : A \to \mathbb{K}$, $\ell \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
Si $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x\to a} \varphi(x) = \lambda$, alors l'application $\varphi.f : A \to F$ définie par :

$$(\varphi.f) : x \mapsto \varphi(x)f(x)$$

admet pour limite $\lambda\ell$ en a.

Démonstration.

On peut utiliser un raisonnement direct ou se servir des résultats sur la convergence des suites et la caractérisations de la limite par les suites.
Utilisons les suites :
On suppose $\lim_{x\to a} f(x) = \ell \in F$ et $\lim_{x\to a} \varphi(x) = \lambda \in \mathbb{K}$. Soit (x_n) une suite à valeurs dans A

qui converge vers a. D'après le théorème 3, on a $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} l$ et $\varphi(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda$. Par suite (on reconnaît ici la preuve de l'exercice **??**), pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|\varphi(x_n)f(x_n) - \lambda l\|_F \leq \underbrace{|\varphi(x_n) - \lambda|}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} \underbrace{\|f(x_n)\|_F}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} \|l\|_F} + |\lambda| \underbrace{\|f(x_n) - l\|_F}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Ceci étant vrai pour toute suite (x_n) à valeurs dans A qui converge vers a, d'après le théorème 3, $\varphi.f$ admet une limite en a égale à λl. □

b. Espace produit

On considère dans ce paragraphe F_1 et F_2, deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$ et l'espace vectoriel $F = F_1 \times F_2$ muni de la norme produit.

Proposition 18.

Soit $A \subset E$, $a \in \overline{A}$, $\ell = (\ell_1, \ell_2) \in F_1 \times F_2$ et $f = (f_1, f_2) : A \to F_1 \times F_2$.
Alors $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ si, et seulement si, $\lim_{x\to a} f_1(x) = \ell_1$ et $\lim_{x\to a} f_2(x) = \ell_2$.

Démonstration.

D'après la proposition **??**, une suite $u = ((u_n^1), (u_n^2))$ à valeurs dans F converge vers ℓ si, et seulement si, (u_n^1) converge vers ℓ_1 et (u_n^2) converge vers ℓ_2.
Ainsi,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell\,;$$

si, et seulement si,

pour toute suite (x_n) à valeurs dans A qui converge vers a, la suite $u = ((f_1(x_n)), (f_2(x_n)))$ à valeurs dans F converge vers $\ell = (\ell_1, \ell_2)$;

si, et seulement si,

pour toute suite (x_n) à valeurs dans A qui converge vers a, $(f_1(x_n))$ converge vers ℓ_1 et $(f_2(x_n))$ converge vers ℓ_2 ;

si, et seulement si,

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = \ell_1 \text{ et } \lim_{x\to a} f_2(x) = \ell_2.$$

□

Exercice 15.

Montrer que cette proposition est vraie dans le cas où l'on considère un produit fini $F_1 \times ... \times F_n$ de n espaces vectoriels normés ($n \in \mathbb{N}^*$).

Correction.

On raisonne par récurrence en utilisant la proposition précédente.

c. Limite d'une composée

Proposition 19. *Limite d'une application composée*

Soit $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F), (G, \|\cdot\|_G)$ des espaces vectoriels normés sur K ; $A \subset E$, $B \subset F$; $a \in \overline{A}$, $b \in \overline{B}$ et $\ell \in G$.
Soit $f : A \to F$ et $g : B \to G$. Si $f(A) \subset B$, $\lim_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim_{y\to b} g(y) = \ell$, alors

$$\lim_{x\to a} g \circ f(x) = \ell.$$

Démonstration.

On suppose $f(A) \subset B$, $\lim_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim_{y\to} g(y) = \ell$.
Soit (x_n) une suite à valeurs dans A qui converge vers a. Comme $\lim_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim_{y\to b} g(y) = \ell$, d'après le théorème 3, la suite $(f(x_n)$ à valeurs dans B converge vers b et donc la suite $(g\circ f(x_n))$ à valeurs dans G converge vers ℓ.
Ceci étant vrai pour toute suite (x_n) à valeurs dans A qui converge vers a, d'après le théorème 3, $\lim_{x\to a} g \circ f(x) = \ell$. □

3. Applications continues

a. Continuité locale

Définition 10. *Application continue en un point*

Soit $A \subset E$, $a \in A$ et $f : A \to F$.
On dit que f est **continue en** a si f admet une limite en a et $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Théorème 4. *Caractérisation séquentielle de la continuité*

Soit $A \subset E$, $a \in A$ et $f : A \to F$.
L'application f est continue en a si, et seulement si, pour toute suite (x_n) à valeurs dans A qui converge vers a,

$$f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a).$$

Démonstration.

On applique le théorème 3 : $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, si, et seulement si, pour toute suite (x_n) à valeurs dans A qui converge vers a, $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a)$. □

b. Continuité globale

Définition 11. *Application continue*

Soit $A \subset E$ et $f : A \to F$.
On dit que f est **continue sur** A si f est continue en tout point de A.

Exercice 16.

1. Traduire cette définition avec des quantificateurs.
2. Montrer que l'application de E dans $\mathbb{R}$ donnée par $x \mapsto \|x\|_E$ est continue sur E.

Correction.

1. f est continue sur A si, et seulement si,

$$\forall a \in A,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A, \quad \|x - a\|_E \ \Rightarrow\ \|f(x) - f(a)\|_F \leq \varepsilon.$$

2. Soit $a \in E$. On a, pour toute suite (x_n) à valeurs dans A qui converge vers a, $\lim_{n\to\infty} \|x_n\|_E = \|a\|_E$; donc $\lim_{x\to a} \|x\|_E = \|a\|_E$. Ainsi l'application $x \mapsto \|x\|_E$ est continue en tout point a de E donc elle est continue sur E.

Notation 2.

Soit $A \subset E$. On note $C(A, F)$ l'ensemble des applications continues de A dans F.

c. Propriétés des applications continues

Les propositions suivantes découlent des propriétés des limites (paragraphe 2) établies précédemment.

Proposition 20. *Combinaisons linéaires*

Soit $A \subset E$. L'ensemble $C(A, F)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Proposition 21. *Continuité d'une application dans un produit*

Soit $A \subset E$, F_1, F_2 des espaces vectoriels normés et on considère $F = F_1 \times F_2$ muni de la norme produit.
Soit $f = (f_1, f_2)$ une application de A dans F. Alors f est continue sur A si, et seulement si, f_1 et f_2 sont continues sur A.

Démonstration (sans utiliser la caractérisation séquentielle).

— ($\Rightarrow$) On suppose f continue sur A. Montrons que les f_i sont continues sur A.
Comme f est continue sur A, pour tout $a \in A$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in A$,

$$\|x - a\|_E \leq \delta \;\Rightarrow\; \|f(x) - f(a)\| = \max(\|f_1(x) - f_1(a)\|_1, \|f_2(x) - f_2(a)\|_2) \leq \varepsilon.$$

Soit $i \in \{1, 2\}$ et $a \in A$. Montrons que f_i est continue en a. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $x \in A$. Si $\|x - a\|_E \leq \delta$, on a :

$$\|f_i(x) - f_i(a)\|_i \leq \max(\|f_1(x) - f_1(a)\|_1, \|f_2(x) - f_2(a)\|_2) = \|f(x) - f(a)\| \leq \varepsilon$$

Donc f_i est continue en a. Ceci étant vrai pour tout $a \in A$, f_i est continue sur A.

— ($\Leftarrow$) On suppose f_1, f_2 continues sur A. Montrons que f est continue sur A.
Pour $i \in \{1, 2\}$, comme f_i est continue en A, pour tout $a \in A$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_i > 0$ tel que pour tout $x \in A$,

$$\|x - a\|_E \leq \delta_i \;\Rightarrow\; \|f_i(x) - f_i(a)\|_i) \leq \varepsilon.$$

Soit $a \in A$. Montrons que f est continue en a. Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\delta = \max(\delta_1, \delta_2)$. Soit $x \in A$. Si $\|x - a\|_E \leq \delta$, on a :

$$\|f(x) - f(a)\| = \max(\underbrace{\|f_1(x) - f_1(a)\|_1}_{\leq \varepsilon}, \underbrace{\|f_2(x) - f_2(a)\|_2}_{\leq \varepsilon}) \leq \varepsilon$$

Donc f est continue en a. Ceci étant vrai pour tout $a \in A$, f est continue sur A.

□

Remarque 7.

En raisonnant par récurrence, on montre que le résultat précédent est toujours valable pour un produit fini $F_1 \times ... \times F_n$ de n espaces vectoriels normés ($n \in \mathbb{N}^*$).

Proposition 22. *Composition d'applications continues*

La composée de deux applications continues est continue.

Exercice 17.

1. Écrire la proposition suivante en décrivant précisément les hypothèses.
2. Soit $A \subset E$ et $f : A \to F$ une application continue. Montrer que $x \mapsto \|f(x)\|_F$ est une application continue sur A

Correction.

1. Soit $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F), (G, \|\cdot\|_G)$ des espaces vectoriels normés sur K ; $A \subset E$, $B \subset F$. Soit $f : A \to F$ et $g : B \to G$. Si $f(A) \subset B$, f est continue sur A et g est continue sur B alors $g \circ f$ est continue sur A.

2. $f : A \to F$ est continue sur $A \subset F$ et $\left| \begin{array}{l} F \to \mathbb{R} \\ y \mapsto \|y\|_F \end{array} \right.$ est continue sur F (voire exercice 16 2)) donc par composition, $x \mapsto \|f(x)\|_F$ est continue sur A.

Théorème 5. *Continuité et densité*

Soit $A \subset E$, D une partie dense dans A et $f, g : A \to F$ des applications continues sur A.
Si pour tout $x \in D$, $f(x) = g(x)$ (i.e. $f_{|D} = g_{|D}$) alors $f = g$.

Démonstration.

On suppose que $f_{|D} = g_{|D}$. Soit $x \in A$. Comme D est dense dans A, $xA \subset\in \overline{D}$, donc il existe (x_n) à valeurs dans D tel que $x_n \to x$. Par suite, on a :

$$0 \leq \|f(x) - g(x)\|_F \leq \underbrace{\|f(x) - f(x_n)\|_F}_{\to 0} + \underbrace{\|f(x_n) - g(x_n)\|_F}_{=0} + \underbrace{\|g(x_n) - g(x)\|_F}_{\to 0} \to 0.$$

Donc, par l'axiome de séparation, $f(x) = g(x)$. □

4. Applications lipschitziennes

Définition 12.

Soit $k \in \mathbb{R}_+$, $A \subset E$ et $f : A \to F$.
On dit que f est k-**lipschitzienne** ou **lipschitzienne de rapport** k si, pour tout $x, y \in A$:

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E.$$

On dit que f est **lipschitzienne** s'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que f est lipschitzienne de rapport k.

Exemple 7.

— Une norme est une application 1-lipschitzienne.

> En effet, pour tous $x, y \in E$, $\|x - y\|_E \leq \|x - y\|_E$ donc $\|\cdot\|_E$ est 1-lipschitzienne.

— Soit $((E_1, \|\cdot\|_1), ..., (E_n, \|\cdot\|_n))$ des espaces vectoriels normés et $E = E_1 \times ... \times E_n$ muni de la norme produit. Les applications coordonnées $(i = 1, ..., n)$:

$$\varphi_i : \left| \begin{array}{ccc} E & \to & E_i \\ x = (x_1, ..., x_n) & \mapsto & x_i \end{array} \right.$$

sont 1-lipschitziennes.

> En effet, pour tous $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in E$,
>
> $$\|\varphi_i(x) - \varphi_i(y)\|_i = \|x_i - y_i\|_i \leq \max_{1 \leq j \leq n} \|x_j - y_j\|_j = \|x - y\|_E.$$
>
> donc φ_i est 1-lipschitzienne.

— Soit $A \subset E$. L'application $\left| \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & d(x, A) \end{array} \right.$ est 1-lipschitzienne.

> En effet, pour tous $x, y \in E$, (voire exercice **??**)
>
> $$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y) = \|x - y\|_E$$
>
> donc $x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne.

Exercice 18.

1. Montrer que $x \mapsto \cos(x)$ est lipschitzienne.
2. Montrer que $\left| \begin{array}{ccc} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & d(x, y) \end{array} \right.$ est lipschitzienne où $E \times E$ est muni de la norme produit

Correction.

1. $x \mapsto \cos(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème des accroissements finis, pour tous $x < y$, il existe $c \in]x, y[$ tel que
$$\cos(x) - \cos(y) = -\sin(c)(x - y);$$
or $|\sin(c)| \leq 1$ donc :
$$|\cos(x) - \cos(y)| \leq |x - y|.$$
Cette inégalité étant également valable pour $x = y$, on obtient que cos est 1-lipschitzienne.
2. On a, pour tous $(x, y), (u, v) \in E^2$:
$$\begin{aligned} |d(x, y) - d(u, v)| &\leq |d(x, y) - d(y, u)| + |d(y, u) - d(u, v)| \\ &\leq d(x, u) + d(y, v) \\ &\leq 2 \max(d(x, u), d(y, v)) = 2\|(x, y) - (u, v)\|_\infty. \end{aligned}$$
Donc cette application est 2-lipschitzienne.

Remarque 8.

La notion de fonction lipschitzienne est invariante par passage à des normes équivalentes (sur l'espace de départ ou celui d'arrivée). Par contre, la constante peut tout de même changer.

Proposition 23.

Toute application lipschitzienne est continue.

Démonstration.

Soit $A \subset E$ et $f : A \to \mathbb{R}$. On suppose que f est k-lipschitzienne. Si $k = 0$, f est la fonction nulle et donc continue. Supposons $k \neq 0$.
Soit $x \in E$ et $\varepsilon > 0$. On pose $\delta = \frac{\varepsilon}{k} > 0$. Alors pour tout $y \in E$, tel que $\|x - y\|_E \leq \delta$, on a :

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\| \leq k\delta = \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in A$ et tour $\varepsilon > 0$, f est continue sur A. □

5. Continuité et topologie

Théorème 6.

Soit $A \subset E$ et $f : A \to F$. On suppose f continue sur A.

- Soit U un ouvert de F. L'image réciproque $f^{-1}(U)$ de U par f est un ouvert relatif de A.
- Soit C un fermé de F. L'image réciproque $f^{-1}(C)$ de C par f est un fermé relatif de A.

Démonstration.

On suppose f continue sur A. Soit U un ouvert de F et $a \in f^{-1}(U)$. Comme $f(a) \in U$ et U est un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B_f(f(a), r) \subset U$. Par suite, f étant continue en a, il existe $\delta > 0$ tel que $f(B_f(a, \delta) \cap A) \subset B_f(f(a), r) \subset U$. Donc

$$B_f(a, \delta) \cap A \subset f^{-1}(f(B_f(a, \delta) \cap A)) \subset f^{-1}(U).$$

D'où $f^{-1}(U)$ est un voisinage de a relatif de A. Il en résulte que $f^{-1}(U)$ est un voisinage relatif de A de chacun des points de A, donc $f^{-1}(U)$ est un ouvert relatif de A. Pour le cas fermé, on remarque que $f^{-1}(X^c) = (f^{-1}(X))^c$ et utilise le fait qu'un fermé est le complémentaire d'un ouvert. □

Proposition 24. *Réciproque du théorème précédent*

Soit $A \subset E$ et $f : A \to F$. Si l'image réciproque par f de tout ouvert (resp. fermé) de F est un ouvert (resp. fermé) relatif de A, alors f est continue.

Démonstration.

On suppose que l'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert relatif de A. Montrons que f est continue.
Soit $a \in A$ et V un voisinage de $f(a)$ dans F. Alors il existe un ouvert $U \subset V$ tel que $f(a) \in U$. Par suite, $W = f^{-1}(U)$ est un voisinage de a dans E. En effet, W est un ouvert car c'est l'image réciproque d'un ouvert par f et $a \in W$ car $f(a) \in U$.
De plus, on a $f(W \cap A) \subset V$; donc ceci étant vrai pour tout voisinage V de $f(a)$ et tout $a \in A$, f est continue sur A. □

Exemple 8.

— Une boule ouverte (resp. fermée) est un ouvert (resp. fermé) de E. On l'avait déjà démontré directement dans la partie B.

> En effet, soit $x_0 \in E$ et $r > 0$.
> Notons $N : E \to \mathbb{R}$ la norme sur E. L'intervalle $]-\infty, r[$ (resp. $]-\infty, r]$) est un ouvert (resp. fermé) de $\mathbb{R}$ et, de plus, l'application $f : E \to \mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in E$, par :
> $$f(x) = N(x - x_0),$$
> est une application continue comme composée d'applications continues. Or, on a :
> $$B(x_0, r) = f^{-1}(]-\infty, r[) \quad \text{et} \quad B_f(x_0, r) = f^{-1}(]-\infty, r]),$$
> donc $B(x_0, r)$ est un ouvert de E et $B_f(x_0, r)$ est un fermé de E.

— L'ensemble $\{(x, y) \mid x + y > 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\{(x, y) \mid x + y = 2\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

> En effet, l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f : (x, y) \mapsto x + y$ est une application continue (pour n'importe quelle norme sur $\mathbb{R}^2$) - *À démontrer pour votre norme préférée*. Or, on a :
> $$\{(x, y) \mid x + y > 0\} = f^{-1}(\mathbb{R}_+^*) \quad \text{et} \quad \{(x, y) \mid x + y = 2\} = f^{-1}(\{2\}).$$
> $\mathbb{R}_+^*$ étant un ouvert de $\mathbb{R}$ et $\{2\}$ étant un fermé de $\mathbb{R}$, on obtient le résultat.

Exercice 19.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'ensemble $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (muni de la norme infinie par exemple) et que $SL_n(\mathbb{K})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Correction.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :
$$GL_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det(M) \neq 0\} = \det^{-1}(\mathbb{K}^*), \text{ et}$$

$$SL_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det(M) = \pm 1\} = \det^{-1}(\{-1, 1\}).$$

Comme $\mathbb{K}^*$ est un ouvert de $\mathbb{K}$ (réunion d'ouverts) et $\{-1, 1\}$ est un fermé de $\mathbb{K}$ (réunion finie de fermés) ; il suffit de montrer que $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est continue pour obtenir le résultat.

Le déterminant est une fonction polynomiale de degré n à n^2 variables (les coefficients matriciels) : en effet, on peut, soit le montrer, sans expliciter de formule, par récurrence (en utilisant le développement par les lignes par exemple) ; soit montrer la formule suivante : pour $M = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(j),j},$$

où $\mathcal{S}_n$ est l'ensemble des permutations de l'ensemble $\{1, ..., n\}$ et $\varepsilon : \mathcal{S}_n \to \{-1, 1\}$ est l'application signature.

Une fonction polynomiale sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (que l'on peut voir pour simplifier comme $\mathbb{K}^{n^2}$) est continue comme somme de produits des applications "coordonnées" ($\varphi_{i,j}(M) = a_{i,j}$) qui sont continues (voire l'exemple 7 + la proposition 23).
Par suite det est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

6. Continuité uniforme

Définition 13. *Continuité uniforme*

Soit $A \subset E$ et $f : A \to F$. On dit que f est **uniformément continue** si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in A \quad \|x - y\|_E \leq \delta \ \Rightarrow\ \|f(x) - f(y)\|_F \leq \varepsilon.$$

Proposition 25.

- Toute application uniformément continue est continue.
- Toute application lipschitzienne est uniformément continue.

Démonstration.

Soit $A \subset E$ et $f : A \to F$ une application.

- On suppose f uniformément continue sur A. Alors pour tout $a \in A$,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in A \quad \|x - y\|_E \leq \delta \ \Rightarrow\ \|f(x) - f(y)\|_F \leq \varepsilon.$$

  Donc f est continue sur A.
- On suppose f k-lipschitzienne. Si $k = 0$, alors la fonction f est nulle, donc trivialement, f est uniformément continue. On suppose $k \neq 0$.
  Soit $\varepsilon > 0$. Alors pour $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$, et $x, y \in E$ tels que $\|x - y\|_E \leq \delta$:

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E \leq k\delta = \varepsilon.$$

  Par suite, f est uniformément continue.

□

Remarque 9.

Attention, les réciproques des implications précédentes sont fausses :

— $f : x \mapsto e^x$ est continue mais pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

> En effet, supposons par l'absurde que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, si $|x - y| \leq \delta$ alors $|e^x - e^y| \leq \varepsilon$.
> Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y = x + \delta$, on a $|x - y| \leq \delta$ et
> $$|e^x - e^y| = e^x |e^{y-x}| = e^x e^\delta \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty.$$

— $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue mais pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

> Montrons premièrement que f est uniformément continue. Pour $x, y \in \mathbb{R}_+$ avec $x \leq y$, on a $\sqrt{xy} \geq x$, et donc :
> $$(\sqrt{y} - \sqrt{x})^2 = y - 2\sqrt{xy} + x \leq y - x,$$
> d'où $\sqrt{y} - \sqrt{x} \leq \sqrt{y - x}$ et de même, pour $y \leq x$, $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x - y}$.
> Par suite, pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$:
> $$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}.$$
> Soit $\varepsilon > 0$. Alors pour $\delta = \varepsilon^2$ et $x, y \in \mathbb{R}$ avec $|x - y| \leq \delta$,
> $$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|} \leq \sqrt{\delta} = \varepsilon.$$
> Il en résulte que f est uniformément continue. Montrons désormais que f n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Le "problème" se situe au voisinage de 0. Pour $x > 0$, on a :
> $$\frac{|f(x) - f(0)|}{|x - 0|} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty.$$
> f n'est donc pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

7. Continuité, applications linéaires et multilinéaires

a. Continuité et applications linéaires

On rappelle la notation $\mathcal{L}(E, F)$ pour désigner l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Théorème 7.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

i) f est continue ;

ii) f est continue en 0_E ;

iii) il existe $k \geq 0$ tel que, pour tout $x \in E$,

$$\|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E.$$

iv) f est lipschitzienne.

Démonstration.

Montrons i)⇒ii)⇒iii)⇒iv)⇒i)

- i)⇒ii). Évident.
- ii)⇒iii). On suppose f est continue en 0_E :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in E \quad \|x - 0_E\|_E \leq \delta \ \Rightarrow\ \|f(x) - f(0_E)\|_F \leq \varepsilon.$$

  Considérons le cas $\varepsilon = 1$. Soit $x \in E$ avec $x \neq 0_E$. On pose $y = \frac{\delta}{\|x\|_E} x$. Par construction, on a $\|y\|_E = \delta \leq \delta$, donc

$$\frac{\delta}{\|x\|_E}\|f(x)\|_F = \|f(y)\|_F \leq \varepsilon = 1.$$

  Par suite, on a

$$\|f(x)\|_F \leq \frac{1}{\delta}\|x\|_E.$$

  Cette égalité étant vraie pour $x = 0_E$, on a pour $k = \frac{1}{\delta}$ et pour tout $x \in E$:

$$\|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E.$$

- iii)⇒iv). On suppose qu'il existe $k \geq 0$ tel que, pour tout $x \in E$,

$$\|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E.$$

  Soit $x, y \in E$. Comme f est linéaire, on a :

$$\|f(x) - f(y)\|_F = \|f(x - y)\|_F \leq k\|x - y\|_E.$$

- iv)⇒i). On applique la proposition 23.

□

Notation 3.

On note $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de $(E, \|\cdot\|_E)$ dans $(F, \|\cdot\|_F)$.

Proposition 26.

L'ensemble $\mathcal{L}_c(E, F)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Démonstration.

On a $\mathcal{L}_c(E,F) = C(E,F) \cap \mathcal{L}(E,F)$ donc $\mathcal{L}_c(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E,F)$ (espace vectoriel des fonctions de E dans F) comme intersection de sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(E,F)$. □

Proposition 27.

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors f est continue si, et seulement si, l'application de $E \setminus \{0_E\}$ dans $\mathbb{R}$:

$$x \mapsto \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

est bornée sur $E \setminus \{0_E\}$.

Démonstration.

$$f \text{ est continue}$$

si, et seulement si,

$$\text{il existe } k \geq 0 \text{ tel que, pour tout } x \in E,\ \|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E.$$

si, et seulement si,

$$\text{il existe } k \geq 0 \text{ tel que, pour tout } x \in E \setminus \{0_E\},\ \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq k.$$

si, et seulement si,

$$x \mapsto \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \text{ est bornée sur } E \setminus \{0_E\}.$$

□

Exercice 20.

Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$. On considère l'application $\varphi : f \mapsto f(1)$.

- Montrer que φ est linéaire.
- Montrer que φ est continue pour $\|\cdot\|_\infty$ mais pas pour $\|\cdot\|_1$.

Correction.

- Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f, g \in E$. On a :

$$\varphi(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)(1) = \lambda f(1) + \mu g(1) = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g);$$

  donc φ est linéaire.
- On a, pour $f \in E$,

$$|\varphi(f)| = |f(1)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = \|f\|_\infty.$$

  Donc φ est continue pour $\|\cdot\|_\infty$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto x^n$. On a :

$$\frac{|\varphi(f_n)|}{\|f_n\|_1} = n + 1.$$

Par suite, $f \mapsto \frac{|\varphi(f)|}{\|f\|_1}$ n'est pas bornée. Donc φ n'est pas continue pour $\|f\|_1$.

Proposition 28.

Soit N_1, N_2 des normes sur E. Alors N_1, N_2 sont équivalentes si, et seulement si,

$$Id_E : (E, N_1) \to (E, N_2)$$

et

$$Id_E : (E, N_2) \to (E, N_1).$$

sont continues.

Démonstration.

$Id_E : (E, N_1) \to (E, N_2)$ est continue si, et seulement si, il existe $k \geq 0$ tel que pour tout $x \in E$, $N_2(x) \leq kN_1(x)$ i.e. N_2 est dominée par N_1.
Et de même, $Id_E : (E, N_2) \to (E, N_1)$ est continue si, et seulement si, N_1 est dominée par N_2.
On en déduit le résultat. □

b. Normes d'opérateur (ou normes subordonnées)

Lemme 1.

Soit $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$. L'ensemble $\{k \in \mathbb{R}_+ \mid \forall\, x \in E,\ \|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E\}$ est un partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$.

Correction.

On note $K = \{k \in \mathbb{R}_+ \mid \forall\, x \in E,\ \|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E\}$. Comme f est une application linéaire continue, d'après le théorème 7, il existe $k_0 \geq 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E$. Ainsi, k_0 appartient à K donc ce dernier est non vide. De plus, il est minoré par 0, d'où le résultat.

Le lemme précédent permet de justifier l'existence de la norme d'opérateur définie ci-après :

Définition 14.

Soit $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$. On appelle **norme d'opérateur** de f associée aux normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ ou encore **norme subordonnée** de f aux normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ et on note $|||f|||$, ou encore $\|f\|_{\text{op}}$), la quantité :

$$|||f||| = \inf\{k \in \mathbb{R}_+ \mid \forall\, x \in E,\ \|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E\}.$$

Proposition 29.

Soit $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$. Alors on a :

i) $|||f||| = \sup\limits_{\|x\|_E \neq 0} \dfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$;

ii) $|||f||| = \sup\limits_{\|x\|_E \leq 1} \dfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$;

iii) $|||f||| = \sup\limits_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F$.

Démonstration.

On note $A = \{k \in \mathbb{R}_+ \mid \forall\, x \in E,\ \|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E\}$.

i) On a note $B = \left\{ \dfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \mid x \in E \setminus \{0_E\} \right\}$. Montrons tout d'abord que B admet une borne supérieure. Comme E n'est pas réduit à 0_E, il existe $x_0 \in E \setminus \{0_E\}$, ainsi B est non vide car $\frac{\|f(x_0)\|_F}{\|x_0\|_E}$ appartient à B.
De plus, comme f est continue sur E, il existe $k \geq 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E$. Ainsi, en particulier, pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$,

$$\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq k$$

Par suite, B est une partie non vide et majorée (par k) de $\mathbb{R}$ donc elle admet une borne supérieure. Notons b cette borne supérieure.
Montrons que $b = |||f|||$. Commençons par montrer que $b \geq |||f|||$. Comme b est un majorant de B, on a, pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, $\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq b$ et donc pour tout $x \in E$,

$$\|f(x)\|_F \leq b\|x\|_E$$

(cette inégalité étant bien vérifiée pour 0_E également). Ainsi, b appartient à A. Or $|||f|||$ étant la borne inférieure de A et donc en particulier un minorant de A, on a $b \geq |||f|||$.
De plus, si $k \in A$, on a, pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$:

$$\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq k$$

donc k est un majorant de B, d'où, b étant son plus petit majorant, $k \geq b$. Ceci étant vrai pour tout $k \in A$, b est un minorant de A. Or $|||f|||$ étant son plus grand minorant, on obtient $|||f||| \geq b$.
Il en résulte que $b = |||f|||$.

ii) On note $C = \left\{ \dfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \mid \|x\|_E \leq 1 \right\}$. Alors $C \subset B \cup \{0\}$ (le 0 provient du fait que 0_E fait partie des vecteurs de normes plus petites que 1 mais pas de $E \setminus \{0_E\}$). De plus, on peut remarquer que B et $B \cup \{0\}$ ont la même borne supérieure car 0 est un minorant de B. Donc, par inclusion, C possède une borne supérieure c et $c \leq b$. Montrons l'inégalité dans l'autre sens.
Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$. On pose $y = \frac{x}{\|x\|_E}$. Alors on a $\|y\|_E = 1$ et par linéarité de f et par

homogénéité de la norme $\|\cdot\|_F$:

$$\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right)\right\|_F = \|f(y)\|_F = \frac{\|f(y)\|_F}{\|y\|_E}.$$

Or $\|y\|_E = 1 \leq 1$ donc $\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$ appartient à C. D'où $B \subset C$ et ainsi, $b \leq c$.
Ainsi, $b = c$.

iii) Par un raisonnement similaire à celui du point précédent, on peut prouver que $\{\|f(x)\|_F \mid \|x\|_E = 1\} = B$ et donc que leurs bornes supérieures sont égales.

□

La proposition suivante justifie la terminilogie de "norme" pour la norme d'opérateur :

Proposition 30.

L'application $|||\cdot||| : \mathcal{L}_c(E,F) \to \mathbb{K}$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$.

Démonstration.

D'après le lemme 1, l'application $|||\cdot|||$ est bien définie sur $\mathcal{L}_c(E,F)$.
Soit $f, g \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

— Positivité : on a $|||f||| = \sup_{\|x\|_E=1} \underbrace{\|f(x)\|_F}_{\geq 0} \geq 0$.

— Séparation : on suppose $|||f||| = 0$. Alors pour tout $x \in E$,

$$\|f(x)\|_F \leq 0\|x\|_E = 0$$

Ainsi, par positivité et séparation de la norme $\|\cdot\|_F$, pour tout $x \in E$, $f(x) = 0_F$. Par suite, $f = \mathbf{0}$.

— Homogénéité : on a, par homogénéité de $\|\cdot\|_F$ et les propriétés usuelles de la borne supérieure :

$$|||\lambda f||| = \sup_{\|x\|_E=1} \underbrace{\|\lambda f(x)\|_F}_{=|\lambda|.\|f(x)\|_F} = |\lambda|.|||f|||.$$

— Inégalité Triangulaire : on a, par inégalité triangulaire de $\|\cdot\|_F$ et les propriétés usuelles de la borne supérieure :

$$|||f+g||| = \sup_{\|x\|_E=1} \underbrace{\|f(x)+g(x)\|_F}_{\leq \|f(x)\|_F + \|g(x)\|_F} = |||f||| + |||g|||.$$

□

Proposition 31.

Soit $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}_c(F,G)$. Alors $g \circ f \in \mathcal{L}_c(E,G)$ et on a :

$$|||g \circ f||| \leq |||g|||.|||f|||.$$

Démonstration.

Soit $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}_c(F,G)$. Alors $g \circ f$ est linéaire continue comme composée d'applications linéaires et continues. On remarque que pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$, on a :

$$\|f(x)\|_F \leq |||f|||.\|x\|_E \text{ et } \|g(y)\|_G \leq |||g|||.\|y\|_F$$

Donc, pour tout $x \in E$,

$$\|g \circ f(x)\|_G = \|g(f(x))\|_G \leq |||g|||.\|f(x)\|_E \leq |||g|||.|||f|||.\|x\|_E$$

D'où $|||g \circ f||| \leq |||g|||.|||f|||$. □

Méthodes pour calculer une norme subordonnée :
On considère une application linéaire $f : E \to F$ où E et F sont munis de $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ respectivement.

On cherche le "meilleur" $k \geq 0$ possible tel que, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E$.
Une fois un tel k trouvé, alors f est continue et $|||f||| \leq k$.

En effet, f est continue en vertu du Théorème 7 et comme $|||f|||$ est la borne inférieure de $A = \{k' \in \mathbb{R}_+ \mid \forall\, x \in E,\ \|f(x)\|_F \leq k'\|x\|_E\}$ et que k appartient à A, $|||f||| \leq k$.

Ensuite, on démontre que notre k est bien le meilleur d'une des façons suivantes :

— on cherche $x_0 \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $\|f(x_0)\|_F = k\|x_0\|_E$ ou même $x_0 \in E$ avec $\|x_0\|_E = 1$ tel que $\|f(x_0)\|_F = k$. Dans ce cas, on conclut que $|||f||| = k$.

En effet, on a $\frac{\|f(x_0)\|_F}{\|x_0\|_E} = k$; or k étant un majorant de $B = \left\{\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \mid x \in E \setminus \{0_E\}\right\}$ car $|||f||| \leq k$; on a $k = \max B = \sup B = |||f|||$.

— on cherche une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $E \setminus \{0_E\}$ tel que $\frac{\|f(x_n)\|_F}{\|x_0\|_E} \xrightarrow[n\to+\infty]{} k$. Dans ce cas, on conclut que $|||f||| = k$.

En effet, k est un majorant de $B = \left\{\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \mid x \in E \setminus \{0_E\}\right\}$ car $|||f||| \leq k$, et on a trouvé une suite à valeurs dans B qui converge vers k. Ainsi, par caractérisation séquentielle de la borne supérieure $k = \sup B = |||f|||$.

Exemple 9.

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ telle que pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x+y, x-y)$. Alors la norme d'opérateur de f associée aux normes $\|\cdot\|_2$ (pour l'espace de départ) et $\|\cdot\|_2$ (pour l'espace d'arrivée) est $|||f||| = \sqrt{2}$.

En effet, on a :

$$\|f(x,y)\|_2 = \sqrt{(x+y)^2+(x-y)^2} = \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2}\|(x,y)\|_2$$

donc en particulier, $\|f(x,y)\|_2 \leq \sqrt{2}\|(x,y)\|_2$ d'où f est continue et $|||f||| \leq \sqrt{2}$ et comme on a égalité pour un certain $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ (en fait pour tous, d'après la première égalité !), on obtient $|||f||| = \sqrt{2}$

Exercice 21.

On considère $E = \mathbb{R}[X]$. Dans la suite, l'espace d'arrivée des fonctions étant $\mathbb{R}$, on le munit de sa norme canonique même si on ne le précise pas !

1. On munit E de la norme $\|P\| = \sup\limits_{t\in[-1,1]} |P(t)|$ et on considère la forme linéaire $f : P \mapsto P(0)$.
   Montrer que f est continue et déterminer la norme subordonnée de f.
2. On munit E de la norme $\|P\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{|P^{(n)}(0)|}{n!}$ et on considère la forme linéaire $g : P \mapsto P(\frac{1}{2})$
   Après avoir prouver que $\|\cdot\|$ est bien une norme, montrer que g est continue et déterminer la norme subordonnée de g.

Correction.

1. Pour tout $P \in E$, on a :
   $$|f(P)| = |P(0)| \leq \|P\|$$
   donc f est continue sur E muni de $\|\cdot\|$ et $|||f||| \leq 1$. De plus, on a, pour P le polynôme constant en 1 : $|f(P)| = 1 = \|P\|$ donc $|||f||| = 1$.
2. On rappelle ici le formule de Taylor pour les polynômes qui nous servira ici : pour $P \in E$ et $a \in \mathbb{R}$, on a :
   $$P = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n \quad \text{(somme finie)}$$
   Pour montrer que $\|\cdot\|$, seul l'axiome de séparation peut poser vraiment problème ; montrons seulement celui-ci : soit $P \in E$ tel que $\|P\| = 0$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P^{(n)}(0) = 0$. Ainsi, d'après la formule de Taylor pour les polynômes appliqué en $a = 0$, on obtient :
   $$P = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(0)}{n!}X^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 0.X^n = 0$$
   D'où l'axiome de séparation.

   Passons à la norme subordonnée. Soit $P \in E$. D'après la formule de Taylor pour les poly-

nômes appliquée en 0, on a, en evaluant en $\frac{1}{2}$:

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(0)}{n!} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Donc

$$|g(P)| = \left|P\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{|P^{(n)}(0)|}{n!}}_{\leq \|P\|} \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \|P\| = 2\|P\|.$$

Par suite, $|||g||| \leq 2$.
De plus, considérons la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes non nuls où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \sum_{k=0}^{n} X^k$. Alors, comme $\|P_n\| = 1$ car $P^{(k)}(0) = k!$ pour tout $k \leq n$, on a :

$$\frac{|g(P_n)|}{\|P_n\|} = \frac{\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k}{1} = 2 - \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$$

Ainsi, $|||g||| = 2$.

Exercice 22.

On considère $E = \mathbb{R}^n$ et les deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur E. Montrer que l'application identité Id_E est continue de E dans E dans toutes les façons de munir E (au départ et à l'arrivée) et calculer sa norme d'opérateur dans chacun de ces cas.

c. Continuité et applications multilinéaires

Théorème 8.

Soit E, F, G des espaces vectoriels normés et $f : E \times F \to G$ une application bilinéaire où $E \times F$ est muni de la norme produit. On a équivalence entre les assertions suivantes :

i) f est continue sur $E \times F$;

ii) f est continue en $(0_E, 0_F)$;

iii) f vérifie : il existe $k \geq 0$ telle que pour tout $(x, y) \in E \times F$:

$$\|f(x, y)\|_G \leq k\|x\|_E.\|y\|_F.$$

Démonstration.

On montre i)⇒ii)⇒iii)⇒i)

- i)⇒ii) Si f est continue sur $E \times F$ alors f est continue en $(0_E, 0_F) \in E \times F$.
- ii)⇒iii) On suppose f continue en $(0_E, 0_F)$.
  Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in E \times F$,

$$\|(x, y)\| \leq \delta \;\Rightarrow\; \|f(x, y)\|_G \leq \varepsilon.$$

Pour $\varepsilon = 1$, il existe $\delta > 0$ vérifiant la proposition ci-dessus. Notons $k = \frac{1}{\delta^2} > 0$. Soit $(x, y) \in E \times F$ avec $(x, y) \neq (0_E, 0_F)$. On pose :

$$x' = \frac{\delta}{\|x\|_E} x \quad \text{et} \quad y' = \frac{\delta}{\|y\|_E} y.$$

Alors $\|(x, y)\| = \max(\|x'\|_E, \|y'\|_F) = \delta$, donc

$$\|f(x', y')\|_G \leq \varepsilon = 1.$$

De plus, par bilinéarité, $\|f(x', y')\|_G = \frac{\delta^2}{\|x\|_E \|y\|_F} \|f(x, y)\|_G$, donc

$$\|f(x, y)\|_G \leq k\|x\|_E \|y\|_F.$$

Et on remarque que cette inégalité est également vraie pour $(x, y) = (0_E, 0_F)$.

- iii)⇒i) On suppose ii). Soit $(x_0, y_0) \in E \times F$. Soit $\varepsilon > 0$ et on pose $\delta = \max(\sqrt{\frac{\varepsilon}{2k}}, \frac{\varepsilon}{2k(\|x_0\|_E + \|y_0\|_F)})$,

  Alors on a :

$$\begin{aligned}
\|f(x, y) - f(x_0, y_0)\|_G &\leq \|f(x, y) - f(x, y_0)\|_G + \|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)\|_G \\
&\leq \|f(x, y - y_0)\|_G + \|f(x - x_0, y_0)\|_G \\
&\leq k(\|x\|_E . \|y - y_0\|_F + \|x - x_0\|_E . \|y_0\|_F) \\
&\leq k(\underbrace{\|x\|_E}_{\leq \|x_0\| + \delta} + \|y_0\|_F) \|(x - x_0, y - y_0)\|. \\
&\leq k\delta^2 + k\delta(\|x_0\|_E + \|y_0\|_F) \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

  Donc f est continue.

□

Exercice 23.

Soit E un espace préhilbertien, $(\cdot|\cdot)$ un produit scalaire sur E et $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire. Montrer que $(\cdot|\cdot) : E \times E \to \mathbb{K}$ est continue.

Correction.

Soit $x, y \in E$. D'après le théorème de Cauchy-Schwarz, on a :

$$|(x|y)| \leq \|x\| . \|y\|.$$

Par suite, $(\cdot|\cdot)$ est continue.

Théorème 9.

Soit $E_1, ..., E_m$, G des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$ et $f : E \to G$ une application m-linéaire où $E = E_1 \times ... \times E_m$ est muni de la norme produit. On a équivalence entre les assertions suivantes :

i) f est continue sur E ;

ii) il existe $k \geq 0$ telle que pour tout $(x_1, ..., x_m) \in E$:

$$\|f(x_1, ..., x_m)\|_G \leq k\|x_1\|_{E_1} ... \|x_m\|_{E_m}.$$

Démonstration.

On raisonne de la même manière que dans la démonstration du théorème 8. □

Partie C

Compacité

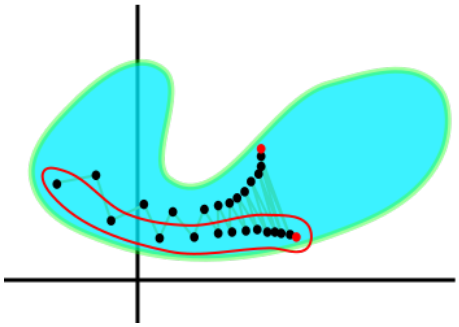
Dans toute cette partie, E désigne un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni d'une norme $\|\cdot\|$.

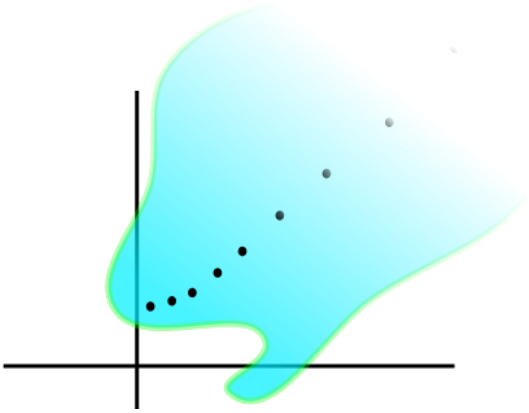
1. Définition

Définition 15. *Partie compacte*

Soit $A \subset E$. On dit que A est une partie **compacte** de E si toute suite à valeurs dans A possède au moins une valeur d'adhérence dans A.

Autrement dit, A est compacte si, de toute suite à valeurs dans A, on peut extraire une sous-suite qui converge dans A.





Exemple 10.

— L'ensemble vide est compact ; toute partie finie de E est compacte.

Montrons que toute partie finie A de E est compacte. Notons $N = \#A$. Alors il existe $x_1, \dots, x_N$ deux à deux distincts tels que $A = \{x_1, \dots, x_N\}$.
Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans A. Intuitivement, la partie A possédant un nombre fini d'éléments, la suite va devoir "passer" une infinité de fois par au moins un des x_i, disons x_{i_0} et donc la sous-suite des termes valant x_{i_0} étant constante, elle converge vers $x_{i_0} \in A$. Voyons comment construire une telle sous-suite rigoureusement :
Pour $i \in [\![1, N]\!]$, on note $U_i = \{n \in \mathbb{N} \mid u_n = x_i\}$. Alors la famille $(U_i)_{i\in[\![1,N]\!]}$ vérifie :

— pour tous $i, j \in [\![1, N]\!]$ avec $i \neq j$, $U_i \cap U_j = \emptyset$. En effet, si $n \in U_i$, alors $u_n = x_i \neq x_j$ donc $n \notin U_j$.

— $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{N} U_i = \mathbb{N}$. En effet

Remarque : certains U_i pouvant potentiellement être vides, il ne s'agit pas d'une partition de $\mathbb{N}$ à proprement parler.

La réunion étant finie et valant $\mathbb{N}$ qui est infini, il existe $i_0 \in [\![1, N]\!]$ tel que U_{i_0} est infini (par l'absurde, si tous les U_i étaient finis, leur réunion finie le serait aussi, ce qui est absurde car elle est égale à $\mathbb{N}$).
On construit alors la sous-suite de u dont les indices sont les éléments de U_{i_0} dans l'ordre. Pour ce faire, on utilise une méthode que l'on reverra quand nous étudierons la dénombrabilité, la construction d'une bijection de $\mathbb{N}$ dans un sous-ensemble infini de $\mathbb{N}$: si B est un sous-ensemble infini de $\mathbb{N}$, la fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que :

$$\begin{cases} \varphi(0) = \min(B) \\ \varphi(n+1) = \min(B \setminus \{\varphi(0), \dots, \varphi(n)\}) \text{ pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

est bien définie, strictement croissante et d'image B (on laisse le soin au lecteur de prouver ces affirmations). Ainsi, en appliquant cette construction à $B = U_{i_0}$, on obtient une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de u qui vérifie :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{\varphi(n)} = x_{i_0} \text{ car } \varphi(n) \in U_{i_0}.$$

Par suite, $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante en x_{i_0} et donc converge vers $x_{i_0} \in A$.
Il en résulte que A est compacte.

— Dans $\mathbb{R}$, les parties fermées bornées (les segments par exemple) sont compacts : il s'agit (pour "compact" au sens de la définition 15) du théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}$.

2. Propriétés

Proposition 32.

Soit $A \subset E$. Si A est compacte, alors A est fermée et bornée dans E.

Démonstration.

On suppose A compacte.

— Montrons que A est fermée. Soit (x_n) une suite à valeurs dans A qui converge vers $l \in E$. La suite (x_n) est à valeurs dans A qui est compact, donc on peut en extraire une sous-suite qui converge dans A. Or, toute sous-suite d'une suite convergente converge vers la même limite, donc $l \in A$. Ceci étant vrai pour toute suite (x_n) à valeurs dans A convergente, d'après la caractérisation séquentielle des fermés, A est fermé.

  Montrons par l'absurde que A est bornée. Supposons que A n'est pas bornée. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in A$ tel que $\|x_n\| \geq n$. Alors chaque sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ de (x_n) n'est pas bornée (car $x_{\varphi(n)} \geq \varphi(n)$) donc (x_n) ne possède pas de valeur d'adhérence. Contradiction.
  Par suite, A est bornée.

□

Remarque 10.

Attention, la réciproque est fausse en général ! Voire l'exercice suivant

Exercice 24.

On considère $E = \mathcal{F}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ muni de sa norme canonique.

— Montrer que $B_f(0_E, 1)$ n'est pas compact.

— Que dire de la réciproque de la proposition précédente ?

Indication.

Si une suite (u_n) vérifie qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ avec $n \neq m$:

$$\|u_n - u_m\| \geq \eta,$$

alors (u_n) ne possède aucune valeur d'adhérence.

Ainsi, pour montrer qu'une partie A n'est pas compacte, il suffit d'exhiber une suite vérifiant la propriété ci-dessus.

Correction.

— Considérons la suite (f_n) à valeurs dans E de terme général

$$f_n : x \mapsto f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-n, n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

.

  Alors clairement, (f_n) est à valeurs dans $B_f(0_E, 1)$ et on a, pour tous n, m avec $n \neq m$:

$$\|f_n - f_m\|_F = 1.$$

  Par suite, (f_n) ne possède pas de valeur d'adhérence, donc $B_f(0_E, 1)$ n'est pas compact.

— L'ensemble $B_f(0_E, 1)$ est fermé et borné mais n'est pas compact. La réciproque de la proposition en question est donc fausse.

Proposition 33.

Soit $A, B \subset E$. On suppose $B \subset A$. Si A est compacte et B est fermée, alors B est compacte.

Démonstration.

On suppose $B \subset A$, A compacte et B fermée. Soit (x_n) à valeurs dans B. Comme $B \subset A$, (x_n) est à valeurs dans A compacte donc il existe une sous-suite (u_n) de (x_n) qui converge dans A. Or B est fermée donc toute suite à valeurs dans B converge dans B. Il en résulte que (u_n) converge dans B. Ceci étant vrai pour toute suite (x_n) à valeurs dans B, B est compacte. □

Théorème 10.

Une suite à valeurs dans un compact est convergente, si, et seulement si, elle possède une unique valeur d'adhérence.

Démonstration.

- $(\Rightarrow)$. Une suite convergente ne possède qu'une seule valeur d'adhérence : sa limite.
- $(\Leftarrow)$. Soit $A \subset E$ un compact et (u_n) une suite à valeurs dans A.
  On suppose que (u_n) possède une unique valeur d'adhérence a. Supposons par l'absurde que (u_n) ne converge pas. Alors, en particulier, (u_n) ne converge pas vers a.
  Par suite, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $k \geq n$ tel que $\|u_k - a\| \geq \varepsilon$.
  Notons, $\varphi(0) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \|u_k - a\| \geq \varepsilon\}$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$,
  $$\varphi(n) = \min\{k > \varphi(n-1) \mid \|u_k - a\| \geq \varepsilon\}.$$
  Alors $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante, donc $(u_{\varphi(n)})$ est une sous-suite de (u_n) qui ne possède pas a pour valeur d'adhérence.
  Or $(u_{\varphi(n)})$ est une suite à valeur dans A compact et donc possède une valeur d'adhérence.
  Cela implique que (u_n) possède au moins deux valeurs d'adhérence. Contradiction.

□

Proposition 34.

Soit E, F des espaces vectoriels normés et $A \subset E$, $B \subset F$. Si A est un compact de E et B un compact de F, alors $A \times B$ est un compact de $E \times F$ muni de la norme produit.

Démonstration.

On suppose A est un compact de E et B un compact de F. Soit $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $A \times B$. Alors (x_n) est à valeurs dans A compact. Par suite, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ de (x_n) qui converge vers un certain $x \in A$. La suite $(y_{\varphi(n)})$ est à valeurs dans B compact, donc on peut en extraire une sous-suite $(y_{\varphi\circ\psi(n)})$ qui converge vers un certain $y \in B$.
Alors la sous-suite $((x_{\varphi\circ\psi(n)}, y_{\varphi\circ\psi(n)}))$ de $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(x, y) \in A \times B$. Donc $A \times B$ est compact. □

Corollaire 1.

Un produit d'une famille finie de compacts est un compact de l'espace produit muni de la norme produit.

Démonstration.

On raisonne par récurrence en appliquant la proposition précédente. □

Exercice 25.

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ où $\mathbb{R}^n$ est muni de la norme infini. Montrer que A est compact si, et seulement si, A est fermée bornée.

Correction.

Si A est compact alors A est fermée bornée. Montrons la réciproque pour $A \subset \mathbb{R}^n$ muni de la norme produit $\|\cdot\|$.

On suppose A fermée bornée. Alors il existe $R \geq 0$ tel que $A \subset B_f(0_E, R) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$. Or, pour la norme produit sur $\mathbb{R}^n$, on a :

$$B_f(0_E, R) = [-R, R]^n.$$

Donc $B_f(0_E, R)$ est compact comme produit d'une famille finie de compacts. Or A est fermé dans le compact $B_f(0_E, R)$, donc A est compact.

3. Applications continues sur un compact

Dans ce paragraphe, F est un espace vectoriel normé.

Proposition 35.

Soit $A \subset E$ et $f : A \to F$ une application continue sur A. Si A est un compact de E, alors $f(A)$ est un compact de F.

Autrement dit, l'image directe d'un compact par une application continue est un compact.

Démonstration.

On suppose que A est compact. Soit $(f(x_n))$ une suite à valeurs dans $f(A)$. Alors (x_n) est une suite à valeurs dans A compact donc il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ de (x_n) qui converge vers un certain $x \in A$. Par la caractérisation séquentielle de la continuité,

$$f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x).$$

Donc la sous-suite $(f(x_{\varphi(n)}))$ de $(f(x_n))$ converge vers $f(x) \in f(A)$. Il en résulte que $f(A)$ est compact. □

Corollaire 2. *Conséquences pour $F = \mathbb{R}$*

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une application continue. Si A est compacte, alors f est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration.

On suppose A compacte. Alors d'après la proposition 35, $f(A)$ est un compact de $\mathbb{R}$. C'est donc un fermé borné, donc f est borné et comme $f(A)$ est fermé, par la caractérisation séquentielle des bornes supérieures et inférieures, les bornes sont atteintes. □

Exercice 26.

Soit A, B des parties compactes non vide de E.

1. Montrer que pour tout $x \in E$, il existe $a \in A$ tel que $d(x, a) = d(x, A)$.
2. Montrer qu'il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $d(a, b) = d(A, B)$.

Correction.

1. Soit $x \in E$. L'application $f : y \mapsto d(x, y)$ est continue sur E dans $\mathbb{R}$ et donc sa restriction à A est continue de A dans $\mathbb{R}$. Comme A est compacte, alors f est bornée et atteint sa borne inférieure sur A. Donc il existe $a \in A$ tel que :
$$d(x, a) = \inf_{y \in A} d(x, y) = d(x, A).$$
2. $A \times B$ est compact comme produit de compacts et $(x, y) \mapsto d(x, y)$ est continue de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ donc sa restriction à $A \times B$ est bornée et atteint ses bornes. Par suite il existe $(a, b) \in A \times B$ tel que :
$$d(a, b) = \inf_{(x,y) \in A \times B} d(x, y) = d(A, B)$$

Théorème 11. *Théorème de Heine*

Soit $A \subset E$ et $f : A \to F$ une application continue. Si A est compact, alors f est uniformément continue sur A.

Démonstration.

On suppose que A est compact. Montrons par l'absurde que f est uniformément continue.
On suppose que f n'est pas uniformément continue. Alors,
$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists x, y \in A, \quad \|x - y\|_E \leq \delta \ \text{ et } \ \|f(x) - f(y)\|_F > \varepsilon.$$
Considérons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\delta = \frac{1}{n}$. Alors il existe $x_n, y_n \in A$ tels que $\|x_n - y_n\|_E \leq \frac{1}{n}$ et $\|f(x) - f(y)\|_F > \varepsilon$.

Alors (x_n) (et (y_n) également) est une suite à valeurs dans A compact, donc on peut extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers $a \in A$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|y_{\varphi(n)} - a\|_E \leq \|y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}\|_E + \|x_{\varphi(n)} - a\|_E \leq \frac{1}{\varphi(n)} + \|x_{\varphi(n)} - a\|_E \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

donc $(y_{\varphi(n)})$ converge vers a.
Par suite, par continuité de f, on a

$$f(y_{\varphi(n)}) - f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a) - f(a) = 0.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|f(y_{\varphi(n)}) - f(x_{\varphi(n)})\|_F > \varepsilon$. Contradiction. $\square$

Partie D

Connexité par arcs

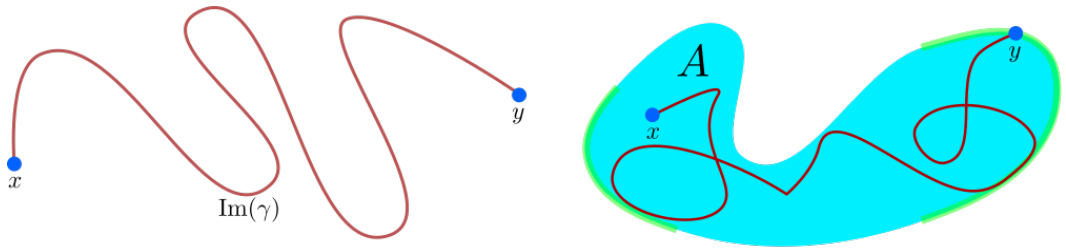
Dans toute cette partie, E désigne un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni d'une norme $\|\cdot\|$.

1. Chemins

Définition 16. *Chemin*

Soit $x, y \in E$. On appelle **chemin d'extrémités** x **et** y ou **chemin joignant** x **à** y, toute application continue $\gamma : [0,1] \to E$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

Soit $A \subset E$ et γ un chemin d'extrémités x et y. On dit que γ est un chemin d'extrémités x et y **dans A** si $\mathrm{Im}(\gamma) \subset A$.



Exemple 11.

Pour $x, y \in E$, l'application γ de $[0,1]$ dans E telle que $\gamma : t \mapsto (1-t)x + ty$ est un chemin d'extrémités x et y. On remarque que pour ce chemin, $\mathrm{Im}(\gamma) = [x, y]$ où $[x, y]$ est le segment d'extrémités x, y.

En effet, on a $\mathrm{Im}(\gamma) = \{\gamma(t) \mid t \in [0,1]\} = \{(1-t)x + ty \mid t \in [0,1]\} = [y, x] = [x, y]$.
De plus, $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$; il nous reste à montrer que γ est continue sur $[0,1]$: pour tout $t, s \in [0,1]$, on a :

$$\|\gamma(t) - \gamma(s)\| = \|(1-t)x + ty - ((1-s)x + sy)\| = |t-s|.\|x-y\|$$

donc γ est $\|x-y\|$-lipschitzienne sur $[0,1]$ et donc continue sur $[0,1]$.

Remarque 11. *Re-paramétrisation*

Soit $x, y \in E$.

— Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Si $g : [a,b] \to E$ est une application continue telle que $g(a) = x$ et $g(b) = y$ alors il existe un chemin joignant x à y.

En effet, $\gamma : t \mapsto g((1-t)a + tb)$ est une application continue telle que $\gamma(0) = g(a) = x$

et $\gamma(1) = g(b) = y$.

— Si γ est un chemin joignant x à y alors $\tilde{\gamma} : t \mapsto \gamma(1-t)$ est un chemin joignant y à x.

2. Connexité par arcs et composantes connexes par arcs

Définition 17.

Soit $A \subset E$. On définit la relation binaire $\mathcal{R}$ suivante sur A : pour $x, y \in A$,

$$x \,\mathcal{R}\, y \text{ si, et seulement si, il existe un chemin d'extrémités } x \text{ et } y \text{ dans } A.$$

Proposition 36.

Soit $A \subset E$. La relation binaire $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur A.

Démonstration.

Montrons que la relation binaire $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur A, c'est-à-dire $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive.

- *Réflexive.* Pour tout $x \in A$, l'application de $[0,1]$ dans E constante en x est un chemin d'extrémités x et x ; donc $x \,\mathcal{R}\, x$.
- *Symétrique.* Soit $x, y \in A$ tels que $x \,\mathcal{R}\, y$. Alors il existe un chemin γ joignant x à y dans A. Le chemin $\tilde{\gamma} : t \mapsto \gamma(1-t)$ est un chemin joignant y à x et $\tilde{\gamma}$ est dans A, en effet, $\mathrm{Im}(\tilde{\gamma}) = \mathrm{Im}(\gamma) \subset A$. Donc $y \,\mathcal{R}\, x$.
- *Transitive.* Soit $x, y, z \in A$ tels que $x \,\mathcal{R}\, y$ et $y \,\mathcal{R}\, z$. Soit γ_{xy} un chemin joignant x à y et γ_{yz} un chemin joignant y à z. Alors l'application $g : [0,2] \to E$ telle que, pour $t \in [0,2]$:

$$g(t) = \begin{cases} \gamma_{xy}(t) & \text{si } t \in [0,1], \\ \gamma_{yz}(t-1) & \text{si } t \in]1,2]. \end{cases}$$

  est une application continue de $[0,2]$ dans A telle que $g(0) = \gamma_{xy}(0) = x$ et $g(2) = \gamma_{yz}(1) = z$.
  En effet, g est continue sur $[0,1]$ et sur $]1,2]$ (comme composée d'applications continues sur cet intervalle) et de plus on a

$$\lim_{t \to 1^+} g(t) = \lim_{t \to 1^+} \gamma_{yz}(t-1) = \gamma_{yz}(0) = y = \gamma_{xy}(1) = g(1);$$

  donc g est continue sur $[0,2]$. On a également $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(\gamma_{xy}) \cup \mathrm{Im}(\gamma_{yz}) \subset A$.
  Par suite, la re-paramétrisation de g donnée par $\gamma_{xz} : t \mapsto g(2t)$ est un chemin joignant x à z de A (car $\mathrm{Im}(\gamma_{xz}) = \mathrm{Im}(g) \subset A$).

Donc $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur A.

□

Définition 18. *Composantes connexes par arcs*

Soit $A \subset E$. On appelle **composantes connexes par arcs de** A les classes d'équivalence de la relation $\mathcal{R}$.

Définition 19. *Connexité par arcs*

Soit $A \subset E$. On dit que A est **connexe par arcs** si A possède une unique composante connexe par arcs.

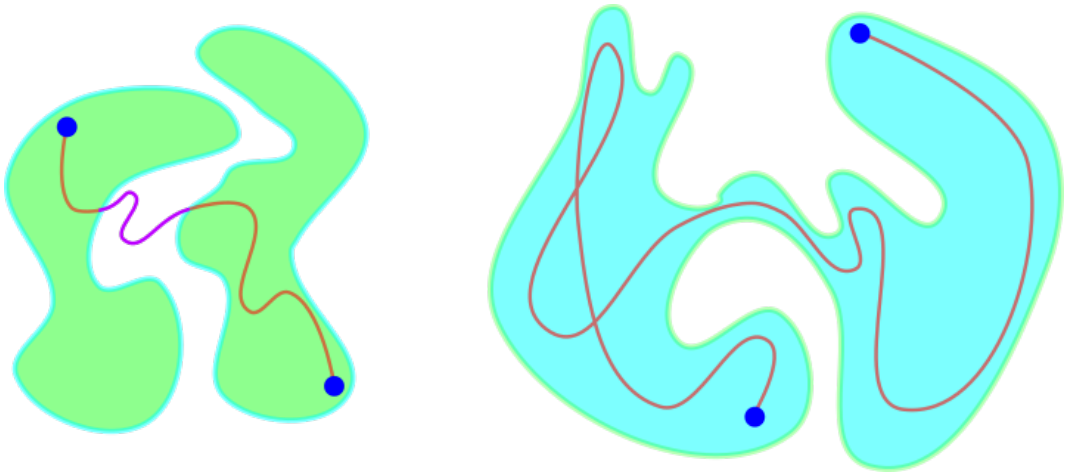
Proposition 37. *Caractérisation À CONNAÎTRE !*

Soit $A \subset E$. A est connexe par arcs si pour tout couple (x, y) de points de A, il existe un chemin joignant x à y dans A.

Démonstration.

- $(\Rightarrow)$. On suppose A connexe par arcs. Soit $x, y \in A$. Comme la relation $\mathcal{R}$ n'a qu'une seule classe d'équivalence, on a $x \mathcal{R} y$ i.e. il existe un chemin joignant x et y dans A.
- $(\Leftarrow)$. On suppose que pour tous $x, y \in A$, il existe un chemin joignant x et y dans A ; alors $x \mathcal{R} y$. Donc A possède une unique composante connexe par arcs, d'où A est connexe par arcs.

□



Exemple 12.

— Soit $A \subset E$. Si C est une composante connexe par arcs de A, alors C est connexe par arcs.

> Soit $x, y \in C$. Alors x, y appartiennent à une même classe d'équivalence pour $\mathcal{R}$ donc $x \mathcal{R} y$ i.e. il existe un chemin joignant x à y. Donc C est connexe par arcs.

— Soit $A \subset E$. Si A est convexe, alors A est connexe par arcs.

On suppose A convexe. Soit $x, y \in A$. Alors $[x, y] \subset A$ et donc, d'après l'exemple 11, $\gamma : t \mapsto (1-t)x + ty$ est un chemin joignant x à y dans A.
Donc A est connexe par arcs.

— Soit $A = \mathbb{R}^* \subset \mathbb{R}$. Alors A n'est par connexe par arcs et ses composantes connexes sont $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$.

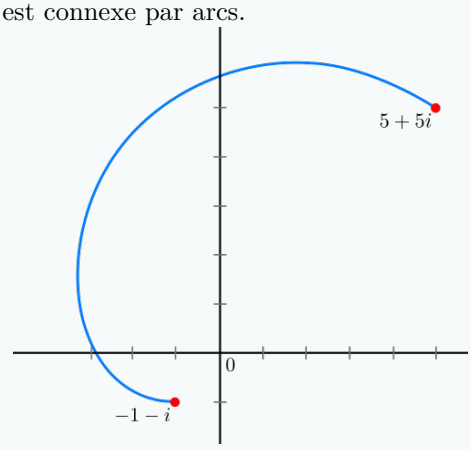
Montrons que $\mathbb{R}^*$ n'est pas connexe par arcs. Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ un chemin entre -1 et 1. En particulier, γ est continue et $\gamma(0) < 0$, $\gamma(1) > 0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t \in]0,1[$ tel que $\gamma(t) = 0$. Par suite, $\mathrm{Im}(\gamma) \nsubseteq \mathbb{R}^*$.
Ainsi, il n'existe aucun chemin entre -1 et 1 dans $\mathbb{R}^*$: ce dernier n'est donc pas connexe par arcs.
De plus, $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ sont convexes (exercice) donc sont connexes par arcs et $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}_-^* \sqcup \mathbb{R}_+^*$. Ainsi, les composantes connexes de $\mathbb{R}^*$ sont $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$.

— Soit $A = \mathbb{C}^* \subset \mathbb{C}$. Alors A est connexe par arcs.

Soit $z, z' \in \mathbb{C}^*$. Alors il existe $r, r' > 0$ et $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ tels que $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$.
On pose $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ telle que :

$$\gamma(t) = ((1-t)r + tr')\, e^{i\left((1-t)\theta + t\theta'\right)}$$

Alors γ est continue sur $[0,1]$ comme composée et produit de fonctions continues (fonctions affines et $x \mapsto e^{ix}$).
On a $\gamma(0) = re^{i\theta} = z$, $\gamma(1) = r'e^{i\theta'} = z'$ et pour tout $t \in [0,1]$, $\gamma(t) \neq 0$ car $|\gamma(t)| = (1-t)r + tr' \geq \min(r, r') > 0$.
Par suite, γ est un chemin dans $\mathbb{C}^*$ joignant z à z'.
Il en résulte que $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs.



Exemple de l'image d'un tel chemin entre $-1-i$ et $5+5i$.

Exercice 27.

— Déterminer si les ensembles suivants sont connexes par arcs et si ce n'est pas le cas, en déterminer les composantes connexes par arcs.

1. $B_f(0_E, 1)$.
2. $A = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^*$.
3. $A \cup B$ avec $A \cap B \neq \emptyset$ avec A, B connexes par arcs.
4. $S(0_E, 1)$ (discuter selon la dimension et le corps des scalaires).

— Que dire de l'intersection de deux parties de E connexes par arcs ?

Correction.

— 1. $B_f(0_E, 1)$ est convexe et donc connexe par arcs.

2. $A = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^*$. Pour $z, z' \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^*$, l'application

$$\gamma : t \mapsto \begin{cases} (1-2t)z & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ (2t-1)z' & \text{si } t \in]\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

3. Soit $x, y \in A \cup B$. Le seul cas "difficile" est $x \in A$ et $y \in B$. Soit $z \in A \cap B$. Comme $z \in A$ et A est connexe par arcs, il existe un chemin joignant x à z dans $A \subset A \cup B$ et comme $z \in B$ et B est connexe par arcs, il existe un chemin joignant z à y dans $B \subset A \cup B$. La re-paramétrisation de la concaténation de ces deux chemins est un chemin joignant x à y dans $A \cup B$.

4. Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$.
Si E est de dimension 1 sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, pour tout $u, v \in E$, u, v sont colinéaires, et donc si u, v sont unitaires, $v = \pm u$ (car dans $\mathbb{R}$ seuls -1 et 1 sont de valeur absolue 1). Par suite, pour u un vecteur unitaire, $S(0_E, 1) = \{u, -u\}$. Donc $S(0_E, 1)$ n'est pas connexe par arcs (à justifier soigneusement en utilisant le théorème des valeurs intermédiares) dans ce cas.

On suppose que $\dim(E) \geq 2$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Remarquons tout d'abord que pour tout $x \in S(0_E, 1)$, il existe $z \in S(0_E, 1)$ tel que $z \neq \pm x$. En effet :

1er cas : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $x \in S(0_E, 1)$. Alors $z = ix \in S(0_E, 1)$ et $z \neq \pm x$.

2eme cas : $\dim(E) \geq 2$. Soit $x \in S(0_E, 1)$ et $y \in E$ tel que $\{x, y\}$ est une famille libre (possible car $\dim(E) \geq 2$). Alors $z = \frac{y}{\|y\|} \in S(0_E, 1)$ et $z \neq \pm x$ car x et z ne sont pas colinéaires.

Pour $x, y \in E$, on note $S_{xy} : \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & E \\ t & \mapsto & (1-t)x + ty \end{array} \right.$ et $\psi : \left| \begin{array}{ccc} E \setminus \{0_E\} & \to & E \\ u & \mapsto & \frac{u}{\|u\|} \end{array} \right.$.

Alors S_{xy} est continue sur $[0, 1]$ et ψ est continue sur $E \setminus \{0_E\}$.

Démontrons maintenant que $S(0_E, 1)$ est connexe par arcs. Soit $x, y \in S(0_E, 1)$.
1er cas : $y \neq -x$. Alors, comme x, y sont de norme 1, $0_E \notin [x, y]$. Par suite, $\mathrm{Im}(S_{xy}) \subset E \setminus \{0_E\}$ donc $\gamma_{xy} = \psi \circ S_{x,y} : [0, 1] \to E$ est continue (comme composée d'applications continues), $\gamma_{xy}(0) = x$, $\gamma_{xy}(1) = y$ et il est clair que $\mathrm{Im}(\gamma_{xy}) \subset S(0_E, 1)$. Il en résulte que γ_{xy} est un chemin joignant x à y.

2eme cas : $y = -x$. Alors, d'après la remarque précédente, il existe $z \in S(0_E, 1)$ tel

que $z \neq x$ et $z \neq y$. En reprenant le raisonnement et les notations du premier cas, alors γ_{xz} et γ_{zy} sont des chemins dans $S(0_E, 1)$ joignant respectivement x à z et z à y. Donc la re-paramétrisation de la concaténation de ces deux chemins est un chemin joignant x à y dans $S(0_E, 1)$.

Il en résulte que $S(0_E, 1)$ est connexe par arcs.

— En général, une intersection de parties connexes par arcs n'est pas connexe par arcs : par exemple, pour $A = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ et $B = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$ qui sont connexes par arcs, $A \cap B$ ne l'est pas !

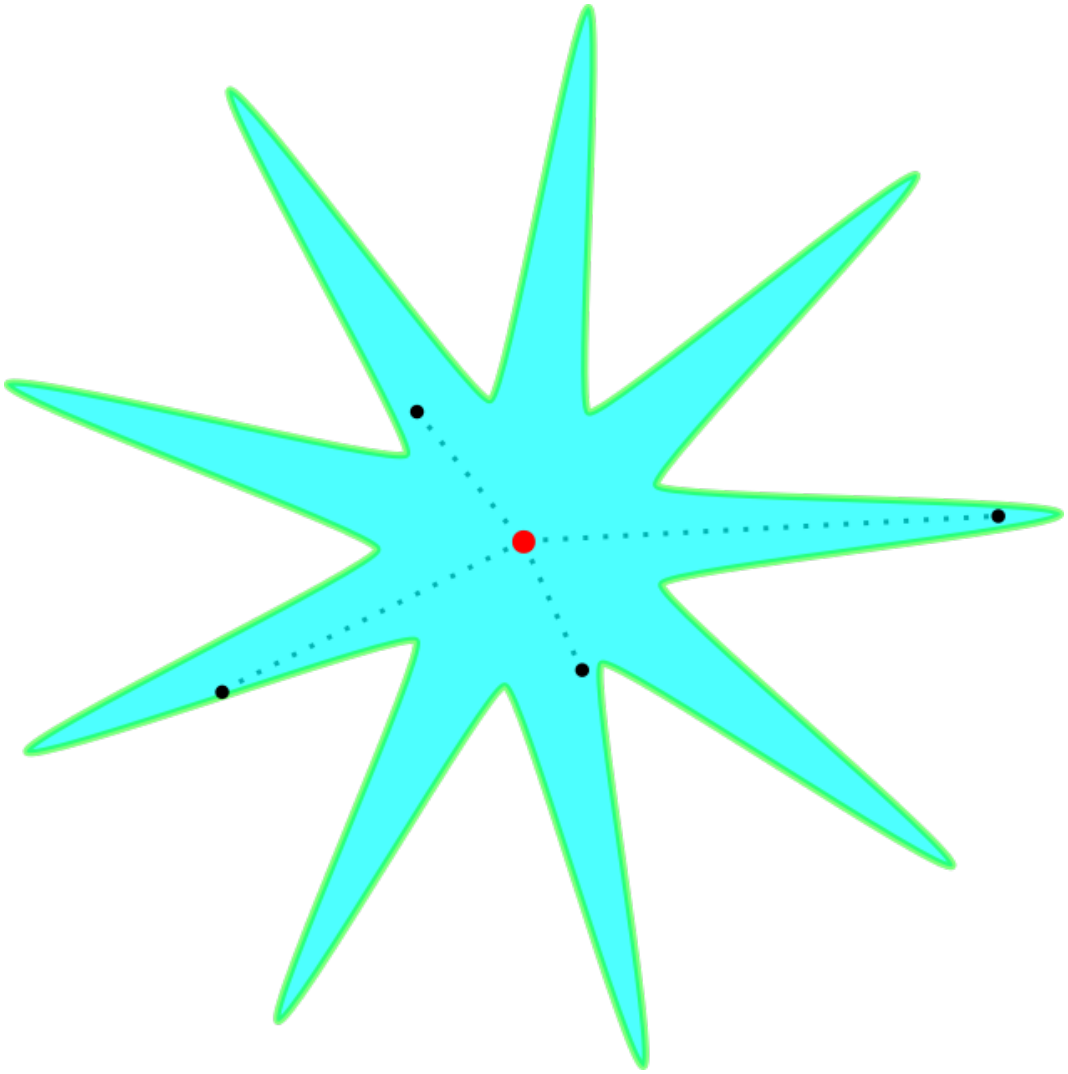
3. Parties étoilées

Définition 20. *Partie étoilée*

Soit $A \subset E$.

Soit $a \in A$. On dit que A est **étoilée en** a si, pour tout $x \in A$, $[a, x] \in A$.

On dit que A est **étoilée** s'il existe $a \in A$ tel que A est étoilée en a.



Proposition 38.

— Une partie convexe de E est étoilée en chacun de ses points.

— Une partie étoilée de E est connexe par arcs.

Démonstration.

Soit $A \subset E$.

— On suppose A convexe. Soit $a \in A$. Comme A est convexe, alors pour tout $x \in A$, $[a, x] \subset A$. Donc a est étoilée en a.

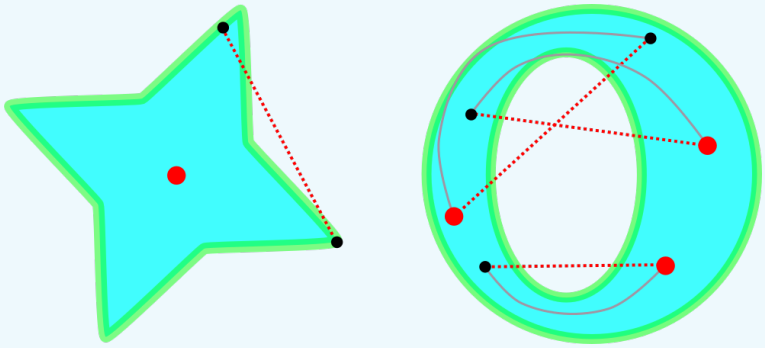
— On suppose qu'il existe $a \in A$ tel que A est étoilée en a. Pour tous $x, y \in A$, la reparamétrisation de la concaténation des chemins dont les images sont les segments $[x, a]$ et $[a, y]$ est une chemin de x à y dans A. Donc A est connexe par arcs.

□

Exercice 28.

1. Prouver grâce à des dessins convaincants que la réciproque de chacune des propositions précédentes est fausse.
2. Montrer que $A = \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$ est une partie étoilée de $\mathbb{C}$.

Correction.

1. 

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $[0, x] \subset \mathbb{R} \subset A$ et $[0, ix] \subset i\mathbb{R} \subset A$, donc A est étoilée en 0.

4. Parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$

On rappelle qu'un intervalle de $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ de la forme, avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ ou, dans les cas "ouverts" $a = -\infty$ ou $b = +\infty$:

$$[a, b] := \{x \in a \leq x \leq b\}; \quad [a, b[:= \{x \in a \leq x < b\};$$

$$]a, b] := \{x \in a < x \leq b\}; \text{ ou }]a, b[:= \{x \in a < x < b\}.$$

Proposition 39.

Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Démonstration.

Dans cette démonstration, on notera (pour] ou [;) pour] ou [et $\lhd$ pour $<$ ou $\leq$. Soit $I = (a, b)$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Alors pour tous $x, y \in I$ et tout $z \in [x, y]$,

$$a \lhd x \leq z \leq y \lhd b,$$

donc $[x, y] \subset I$. Par suite, I est convexe.

Réciproquement, si I est une partie convexe (non vide) de $\mathbb{R}$. Alors on note $a = \inf(I)$ (possiblement $-\infty$) et $b = \sup(I)$ (possiblement $+\infty$). Alors $a \leq b$ et $I \subset [a, b]$ (ou ouvert en a et/ou en b dans les cas infini). On a alors les quatre cas suivants :

- *1er cas :* $a, b \in I$. Comme I est convexe, $[a, b] \subset I$. Donc $I = [a, b]$.
- *2eme cas :* $a \in I, b \notin I$. Soit $x \in I$. Alors $a \leq x < b$ donc $x \in [a, b[$. Réciproquement, si $x \in [a, b[$, on a $x < b$, donc x n'est pas un majorant de I. Par suite, il existe $y \in I$ tel que

$x \leq y < b$. Comme I est convexe, $x \in [a, y] \subset I$. Par suite, $I = [a, b[$.

- *3eme cas : $a \notin I, b \in I$.* Alors, par un raisonnement similaire au 2eme cas, on obtient $I =]a, b]$.
- *4eme cas : $a \notin I, b \notin I$.* Alors, par un raisonnement similaire au 2eme cas, on obtient $I =]a, b[$.

Dans tous les cas, la partie convexe I de $\mathbb{R}$ est un intervalle. □

Proposition 40.

Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Démonstration.

Montrons que pour toute partie I de $\mathbb{R}$, I est connexe par arcs, si, et seulement si, I est convexe. D'après l'exemple 12 et la proposition 4, si I est un intervalle alors I est convexe, donc I est connexe par arcs.

Réciproquement, si I est connexe par arcs, alors pour tous $x, y \in I$, il existe une fonction continue γ_{xy} de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$ et $\mathrm{Im}(\gamma) \subset I$.
Soit $x, y \in I$ et $z \in [x, y]$ avec $x < z < y$. On note $\Gamma_z = \{t \in [0, 1] \mid \gamma(t) \leq z\}$. Alors, comme $\gamma(0) = x \leq z$, $0 \in \Gamma_z$, donc Γ_z est non vide. De plus, Γ_z est majoré par 1, donc Γ_z possède une borne supérieure $M := \sup(\Gamma_z)$.
Par la caractérisation séquentielle de la borne supérieure, il existe (u_n) à valeurs dans Γ_z telle que $u_n \to M$. Or γ_{xy} est continue donc :

$$\gamma_{xy}(u_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \gamma_{xy}(M).$$

Par suite, $\gamma_{xy}(M) \leq z$. Comme $M = \sup(\Gamma_z)$, M appartient à la frontière $\mathrm{Fr}(\Gamma_z)$ de Γ_z. Par suite M est un point adhérent à $\Gamma_z^c = \{t \in [0, 1] \mid \gamma_{xy}(t) > z\}$ (qui est non vide : 1 y appartient), donc, comme précédemment, en considérant une suite à valeurs dans Γ_z^c qui converge vers M et la continuité de γ_{xz}, on obtient : $\gamma_{xy}(M) \geq z$.
Il en résulte que $[x, y] \subset \gamma_{xy}([0, 1]) \subset I$. Donc I est convexe. □

5. Image continue d'une partie connexe par arcs

Théorème 12.

Soit F un espace vectoriel normé, $A \subset E$ et $f : A \to F$ une application continue.
Si A est une partie connexe par arcs de E, alors $f(A)$ est une partie connexe par arcs de F.

Autrement dit : l'image directe d'un connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs.

Démonstration.

On suppose A connexe par arcs. Soit $f(x), f(y) \in f(A)$ (où $x, y \in A$). Comme $x, y \in A$ connexe par arcs, il existe γ un chemin joignant x à y dans A. Alors l'application composée $f \circ \gamma$ est continue sur $[0,1]$, $f \circ \gamma(0) = f(x)$, $f \circ \gamma(1) = f(y)$ et $\mathrm{Im}(f \circ \gamma) \subset f(A)$. Donc $f \circ \gamma$ est un chemin joignant $f(x)$ à $f(y)$ dans $f(A)$. Il en résulte que $f(A)$ est connexe par arcs. □

Corollaire 3. *Théorème des valeurs intermédiaires*

Soit $A \subset E$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une application continue.

Si A est une partie connexe par arcs de E, alors $f(A)$ est un intervalle ; autrement dit, pour tous $x, y \in A$,

$$[f(x), f(y)] \subset f(A).$$

Démonstration.

On applique le théorème 5 au cas $F = \mathbb{R}$ en utilisant la proposition 4 qui assure qu'une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}$ est un intervalle. □

Exercice 29.

Montrer qu'il n'existe pas de bijection continue de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$.

Correction.

Si f est une bijection continue de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$, alors la restriction g de f sur $\mathbb{C} \setminus \{f^{-1}(0)\}$ est bijective et continue sur $\mathbb{C} \setminus \{f^{-1}(0)\}$ dans $\mathbb{R}^*$. Or $\mathbb{C} \setminus \{f^{-1}(0)\}$ est connexe par arcs, et $\mathbb{R}^*$ ne l'est pas. Contradiction car l'image d'un connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs.

Partie E

Espaces vectoriels normés de dimension finie

Dans le cas particulier des espaces vectoriels de dimension finie, nous allons voir que la plupart des notions étudiées depuis le début du chapitre sont invariantes par changement de norme. Ainsi, en dimension finie, la topologie s'en trouve grandement simplifiée : l'étude des ouverts et fermés, de la convergence de suite, de limites ou de la continuité des fonctions,... ne dépendent pas du choix des normes !

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul et $\mathbb{K}$ un corps égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Équivalence des normes en dimension finie

Lemme 2.

Soit $A \subset \mathbb{K}^n$ où $\mathbb{K}^n$ est muni de la norme infini. A est compact si, et seulement si, A est fermé borné.

Démonstration.

Voir la correction de l'exercice 25. □

Théorème 13.

Dans $\mathbb{K}^n$, toutes les normes sont équivalentes.

Démonstration Non exigible.

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{K}^n$. Montrons que $\|\cdot\|$ et la norme infini $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.
On note $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

- Montrons que $\|\cdot\|_\infty$ est plus fine que $\|\cdot\|$. Pour $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$, on a :

$$\|x\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \|e_i\| \leq C\|x\|_\infty$$

  où $C = \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|$.
  Donc il existe $C > 0$ tel que $\|\cdot\| \leq C\|\cdot\|_\infty$.
- Montrons que $\|\cdot\|$ est plus fine que $\|\cdot\|_\infty$.
  1. Montrons tout d'abord que $\|\cdot\|$ est continue sur $\mathbb{K}^n$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Pour tous $x, y \in \mathbb{K}^n$,
  $$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \leq C\|x - y\|_\infty;$$
  donc $\|\cdot\|$ est continue sur $\mathbb{K}^n$ car lipschitzienne sur $\mathbb{K}^n$.
  2. Montrons ensuite que la sphère unité S_∞ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est compacte dans $\mathbb{K}^n$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. Toute sphère dans un espace vectoriel normé est fermée et bornée pour

sa propre norme, donc S_∞ est fermée bornée pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Donc, d'après le lemme 2, S_∞ est compacte dans $\mathbb{K}^n$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Utilisons désormais ces deux points précédents : Pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, S_∞ est compact et $\|\cdot\|$ est continue de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{R}$, donc d'après le corollaire 3, $\|\cdot\|$ est bornée sur S_∞ et atteint ses bornes. En particulier, elle atteint sa borne inférieure m en $x_0 \in S_\infty$ et on remarque que $m > 0$ car $x_0 \neq (0, ..., 0)$.

Par suite, pour tout $x \in \mathbb{K}^n$ avec $x \neq (0, ..., 0)$, $\frac{x}{\|x\|_\infty} \in S_\infty$ et on a :

$$m \leq \|\frac{x}{\|x\|_\infty}\| = \frac{1}{\|x\|_\infty}\|x\|.$$

Ce qui implique, l'égalité suivante, vraie également pour $x = (0, ..., 0)$:

$$\|x\|_\infty \leq \frac{1}{m}\|x\|.$$

Donc $\|\cdot\|_\infty$ est dominée par $\|\cdot\|$.

Il en résulte que $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.

Ainsi, par transitivité, toutes les normes sont équivalentes sur $\mathbb{K}^n$. □

Théorème 14.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors toutes les normes sur E sont équivalentes.

Démonstration.

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Alors il existe un isomorphisme f de E dans $\mathbb{K}^n$. Soit $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ des normes sur E. Alors d'après la proposition **??**, $\|f(\cdot)\|_1$ et $\|f(\cdot)\|_2$ sont des normes sur $\mathbb{K}^n$. Par suite, d'après le théorème précédent, il existe $c, C > 0$ tels que :

$$c\|f(\cdot)\|_1 \leq \|f(\cdot)\|_2 \leq C\|f(\cdot)\|_1.$$

Or f est bijective donc en composant par f^{-1}, on obtient :

$$c\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq C\|\cdot\|_1.$$

Il en résulte que $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_1$ sont équivalentes. □

2. Conséquences topologiques

Remarque 12.

On vient de voir qu'en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. D'après les résultats obtenus dans le chapitre relatif à la comparaison de normes, on remarque que de nombreuses propriétés topologiques sont indépendantes de la norme choisie sur un espace vectoriel de dimension finie. Ainsi, les notions suivantes ne dépendent pas de la norme choisie :

— les ouverts, les fermés, les voisinages ;

— l'intérieur, l'adhérence, la frontière des parties ;
— les limites des suites/fonctions, la continuité des fonctions ;
— les parties bornées, compactes, connexes par arcs.

Il sera donc légitime que lorsqu'on parlera dans la suite d'un espace vectoriel normé, on ne précisera plus de quelle norme on munit cet espace et, de plus, on utilisera la norme la plus adaptée dans les démonstrations.

Proposition 41. *convergence et limites en dimension finie*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{K}$, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E, $\ell = \sum_{i=1}^n \ell_i e_i \in E$, A une partie d'un espace vectoriel normé quelconque et $a \in A$.

- Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E. On note $(u_k^{(1)}), ..., (u_k^{(n)})$ les suites des coordonnées dans $\mathcal{B}$, i.e. pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$u_k = \sum_{i=1}^n u_k^{(i)} e_i.$$

  Alors la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E converge vers ℓ si, et seulement si, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la suite $(u_k^{(i)})_{k\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ converge vers ℓ_i.

- Soit $f : A \to E$. On note $(f_1, ..., f_n)$ les applications coordonnées dans $\mathcal{B}$, i.e. pour tout $x \in A$:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) e_i.$$

  Alors, l'application f admet ℓ comme limite en a si, et seulement si, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, l'application f_i admet ℓ_i comme limite en a.

Démonstration.

On muni E de la norme $\|\cdot\|$ suivante : pour $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$,

$$\|x\| = \max(|x_1|, ..., |x_n|).$$

L'application $f : x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \mapsto (x_1, ..., x_n)$ est un isomorphisme de E dans $\mathbb{K}^n$ et on a pour tout $x \in E$, $\|x\| = \|f(x)\|_\infty$. En appliquant les résultats de convergence des suites dans un espace produit muni de la norme produit, on obtient :

$$(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ à valeurs dans } E \text{ converge vers } \ell\,;$$

si, et seulement si

$$(f(u_k))_{k\in\mathbb{N}} \text{ à valeurs dans } \mathbb{K}^n \text{ converge vers } f(\ell)\,;$$

si, et seulement si

$$((x_1, ..., x_n))_{k\in\mathbb{N}} \text{ à valeurs dans } \mathbb{K}^n \text{ converge vers } (\ell_1, ..., \ell_n)\,;$$

si, et seulement si

pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, la suite $(u_k^{(i)})_{k\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ converge vers ℓ_i.

Pour la seconde partie de la proposition, on utilise la caractérisation séquentielle de la limite et la première partie de la proposition. □

3. Compacité en dimension finie

Dans cette partie, on suppose connu le théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}$ (vu en 1ere année).

Lemme 3.

Dans $\mathbb{C}$ muni du module, toute boule fermée est compacte.

Démonstration.

Soit $R \geq 0$ et $B_f(R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$. Soit (z_n) une suite à valeurs dans $B_f(R)$, avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = x_n + iy_n$ (où $x_n, y_n \in \mathbb{R}$).
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n| \leq |z_n| \leq R$ et $|y_n| \leq |z_n| \leq R$, donc $(x_n), (y_n)$ sont deux suites à valeurs dans le compact $[-R, R]$.
Par suite, la suite $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, est à valeurs dans le compact $[-R, R]^2$, et donc possède une sous-suite $((x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $(x, y) \in [-R, R]^2$. De plus, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sqrt{x_n^2 + y_n^2} = |z| \leq R,$$

donc, comme $(u, v) \mapsto \sqrt{u^2 + v^2}$ est continue, en passant à la limite dans cette inégalité, on obtient :

$$\sqrt{x^2 + y^2} = |z| \leq R.$$

Alors $z = x + iy$ appartient à $B_f(R)$ et de plus, la sous-suite $(x_{\varphi(n)} + iy_{\varphi(n)})$ de (z_n) converge vers z.
Il en résulte que $B_f(R)$ est compact. □

Théorème 15. *Théorème de Bolzano-Weierstrass*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. De toute suite à valeurs dans E bornée on peut extraire une sous-suite convergente.

Autrement dit : toute suite à valeurs dans E bornée possède au moins une valeur d'adhérence.

Démonstration.

Soit E un espace de dimension finie n et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. On munit E de la norme $\|\cdot\|$ définie, pour $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$, par $\|x\| = \max(|x_1|, ..., |x_n|)$.

Soit (u_k) une suite à valeurs dans E bornée et $(u_k^{(i)})_{k\in\mathbb{N}}$ ses suites coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. Comme (u_n) est bornée, il existe $\mathbb{R} \geq 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|u_k\| \leq R$, et donc, pour tout

$i \in [\![1, k]\!]$,

$$|u_k^{(i)}| \leq R.$$

Par suite, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $(u_k^{(i)})_{k\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $B_f(R)$ qui est compact (où $B_f(R)$ désigne $[-R, R]$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
Par suite, chaque $(u_k^{(i)})_{k\in\mathbb{N}}$ possède au moins une valeur d'adhérence.
D'après la proposition sur le convergence des suites en dimension finie, il en résulte que (u_k) possède au moins une valeur d'adhérence (attention, cette implication n'est pas triviale. exercice : prouver cette implication). □

Théorème 16.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Les parties compacts de E sont les parties fermées bornées.

Démonstration.

Un compact est fermé borné.
Soit A une partie fermée bornée de E. Soit (u_n) une suite à valeurs dans A. Alors (u_n) est bornée donc, d'après le théorème précédent, il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ qui converge. Or $(u_{\varphi(n)})$ est une suite à valeurs dans A fermée, donc elle converge dans A. Par suite, A est compact. □

Proposition 42.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Tout sous-espace vectoriel de E est fermé.

Démonstration.

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Soit (u_n) une suite à valeurs dans F qui converge vers $l \in E$.
Comme (u_n) converge, alors elle est bornée. Or F est de dimension finie donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass appliqué dans l'espace vectoriel F, il existe une sous-suite de (u_n) qui converge dans F.
Or toute valeur d'adhérence d'une suite convergente est égale à sa limite, donc $l \in F$. Donc F est fermé dans E. □

Exercice 30.

Soit $E = \mathcal{F}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ muni de sa norme canonique.

1. Montrer que $F = \{f \in E \mid \exists R \geq 0,\ \forall x \notin [-R, R],\ f(x) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que F n'est pas fermé.

Correction.

1. La fonction nulle appartient à F et pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, et pour $f \in F$ nulle en dehors de $[-R_1, R_1]$, $g \in F$ nulle en dehors de $[-R_2, R_2]$, $\lambda f + \mu g$ est nulle en dehors de $[-\max(R_1, R_2), \max(R_1, R_2)]$. Donc F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. Alors $f \in E$ et $f \notin F$. Considérons la suite de terme général

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [-n, n] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors,

$$\|f_n - f\|_\infty = \frac{1}{1+n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Donc la suite (f_n) à valeurs dans F converge vers $f \notin F$. Donc F n'est pas fermé.

4. Continuité des applications linéaires, multilinéaires et polynomiales

a. Continuité des applications linéaires

Théorème 17.

Soit E, F des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$. Si E est de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est continue.

Autrement dit, si E est de dimension finie, $\mathcal{L}_c(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$.

Démonstration.

On suppose que E est de dimension finie n. Soit $f : E \to F$ une application linéaire et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. On munit E de la norme $\|\cdot\|$ définie, pour $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$, par $\|x\| = \max(|x_1|, ..., |x_n|)$. On note $K = \sum_{i=1}^n \|f(e_i)\|_F$.

Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. On a :

$$\|f(x)\|_F = \|\sum_{i=1}^n x_i f(e_i)\|_F \leq \sum_{i=1}^n \underbrace{|x_i|}_{\leq \|x\|_F} \|f(e_i)\|_F \leq K\|x\|.$$

Par suite, f est continue. □

b. Continuité des applications multilinéaires

Théorème 18.

Soit E, F, G des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Si E et F sont de dimension finie, toute application bilinéaire de $E \times F$ dans G est continue.

Démonstration.

On suppose E de dimension n et F de dimension m. Soit $\mathcal{B}_E = (e_1, ..., e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}_F = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m)$ une base de F. On munit E et F des normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ suivante : pour $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$ et $y = \sum_{j=1}^m y_j \varepsilon_j \in F$,

$$\|x\|_E = \max(|x_1|, ..., |x_n|) \quad \text{et} \quad \|y\|_E = \max(|y_1|, ..., |y_m|).$$

Soit $f : E \times F \to G$ une application bilinéaire. Pour $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$ et $y = \sum_{j=1}^m y_j \varepsilon_j \in F$, on a :

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j f(e_i, \varepsilon_j),$$

d'où, pour $k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j \|f(e_i, \varepsilon_j)\|_G$:

$$\|f(x, y)\|_G \leq k\|x\|_E \|y\|_F.$$

Par suite, f est continue sur $E \times F$. □

Exemple 13.

Soit E un espace euclidien, $(\cdot|\cdot)$ un produit scalaire sur E. Alors $(\cdot|\cdot) : E \times E \to \mathbb{R}$ est continue.

Théorème 19.

Soit $E_1, ..., E_k$ et F des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Si $E_1, ..., E_k$ sont de dimension finie, toute application multilinéaire de $E_1 \times ... \times E_k$ dans F est continue.

Démonstration.

On raisonne de la même manière que dans la démonstration du théorème 18. □

Exemple 14.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E. Alors l'application

$$\det_{\mathcal{B}} : E^n \to \mathbb{K}$$

est continue.

En effet, $\det_{\mathcal{B}} : (x_1, ..., x_n) \mapsto \det_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_n)$ est une application n-linéaire de E^n dans $\mathbb{K}$.

c. Continuité des fonctions polynomiales

Définition 21. *Fonction polynomiale*

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie n, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E et $f : E \to \mathbb{K}$ une application.

On dit que f est une **fonction polynomiale** s'il existe une famille $(\lambda_{k_1,\dots,k_n})_{(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{N}^n}$ de scalaires presque tous nuls telle que pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$,

$$f(x) = \sum_{(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{N}^n} \lambda_{k_1,\dots,k_n} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}.$$

Dans ce cas, on dit que le **degré** de f est l'entier :

$$\deg(f) = \max\{k_1 + \dots + k_n \mid \lambda_{k_1,\dots,k_n} \neq 0\}.$$

Exemple 15.

Sur $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique,

$$f : (x, y, z) \mapsto x^4 - y^2 z - 2z^3 + 5x^2 y^2 z^2$$

est une fonction polynomiale de degré 6.

Remarque 13.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E. On peut remarquer les faits suivants :

- Soit u l'isomorphisme canonique de $\mathbb{K}^n$ dans E muni de $\mathcal{B}$. Une application f est polynomiale sur E muni de $\mathcal{B}$, si et seulement si, $f \circ u$ est polynomiale sur $\mathbb{K}^n$ muni de sa base canonique.
- La définition de fonction polynomiale ne dépend pas de la base choisie.

Théorème 20.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie n, $\mathcal{B}$ une base de E et $f : E \to \mathbb{K}$ une application.

Si f est polynomiale, alors f est continue sur E.

Démonstration.

D'après la remarque précédente, il suffit de montrer le résultat pour f une fonction polynomiale sur $\mathbb{K}^n$.

Une fonction polynomiale f sur $\mathbb{K}^n$ est une combinaison linéaire de produits d'applications coordonnées $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$ qui sont continues sur $\mathbb{K}^n$. Par suite, f est continue sur $\mathbb{K}^n$. $\square$

Exemple 16.

L'application

$$\det : \left| \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ M & \mapsto & \det(M) \end{array} \right.$$

est continue.

En effet, $\det((a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(j),j}$, donc det est une application polynomiale. (On peut également, sans se soucier des coefficients polynomiaux de la fonction, raisonner par récurrence en utilisant le développement par rapport aux lignes (ou colonnes))

Exercice 31.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

Correction.

L'application $\det : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est continue et d'image $\mathbb{R}^*$. Comme $\mathbb{R}^*$ n'est pas connexe par arcs, alors $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs. En effet, l'image d'une partie connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs.