Chapitre VII

Séries numériques et vectorielles

Table des matières

Partie A : Séries de vecteurs **2**
1. Définitions 2
2. Espace vectoriel des séries convergentes 5
3. Série absolument convergente 8

Partie B : Compléments sur les séries numériques **10**
1. Règle de D'Alembert 10
2. Comparaison avec une intégrale 13
3. Rappels : Critère des séries alternées 17
4. Sommation des relations de comparaison 20

Dans ce chapitre, E désigne un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On notera $\|\cdot\|$ la norme dont est munie E.

Partie A

Séries de vecteurs

1. Définitions

Définition 1. *Série*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E. On appelle **série de terme général** u_n et on note $\sum u_n$ la **suite** $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, le terme $S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$ est appelé **somme partielle** d'ordre n de la série $\sum u_n$.

Remarque 1.

- Une série est une **suite** particulière ! Toutes les méthodes connues pour les suites peuvent donc s'appliquer pour les séries ! De plus, leurs particularités parmi les suites nous permettent de développer des outils adaptés à leur étude. Il est donc a priori plus aisé d'étudier une série quelconque qu'une suite quelconque !
- Une série est donc la suite de ses sommes partielles.
- Si le terme général u_n d'une série n'est défini qu'à partir du rang $n_0 \in \mathbb{N}$, on notera $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} u_n$ la série de somme partielle d'ordre $n \geq n_0$: $S_n = \displaystyle\sum_{i=n_0}^{n} u_i$.

Définition 2. *Somme d'une série*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E. On dit que la série $\sum u_n$ **converge** dans $(E, \|\cdot\|)$ si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles converge dans $(E, \|\cdot\|)$.
Dans ce cas, on appelle **somme de la série** $\sum u_n$ et on note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ la quantité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} S_N = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n.$$

Si la série $\sum u_n$ ne converge pas, on dira qu'elle **diverge**.

Dans la suite, $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désignent des suites à valeurs dans E.

Proposition 1.

Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0_E.

Démonstration.

On suppose que $\sum u_n$ converge. Alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $S \in E$ et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} S - S = 0_E.$$

□

Remarque 2.

La réciproque de cette proposition est fausse : la suite $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 et la série harmonique $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge !

Cette proposition motive donc la définition suivante :

Définition 3. *Divergence grossière*

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0_E, on dit que la série $\sum u_n$ **diverge grossièrement**.

Définition-Proposition 4. *Reste d'une série*

Si la série $\sum u_n$ converge, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{k\geq n+1} u_k$ converge. Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle **reste d'ordre** n de la série $\sum u_n$ et on note R_n la somme de la série $\sum_{k\geq n+1} u_k$ i.e.

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Remarque 3.

On ne parle de reste d'une série que si elle converge. De plus, dans ce cas, on remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$R_n = S - S_n \text{ où } S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Exercice 1.

Soit $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{1\}$ et $x \in E$. On considère la série $\sum u_n$ de terme général $u_n = \lambda^n x$. Discuter des cas évidents de convergence et de divergence grossière de $\sum u_n$.
En cas de convergence, déterminer la somme et les restes de la série.

Correction.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i x = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) x = \frac{1-\lambda^{n+1}}{1-\lambda} x.$$

Ainsi, si $|\lambda| < 1$, $\sum u_n$ converge et on a :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N \to +\infty} S_N = \frac{1}{1-\lambda} x,$$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$R_n = S - S_n = \frac{1}{1-\lambda} x - \frac{1-\lambda^{n+1}}{1-\lambda} x = \frac{\lambda^{n+1}}{1-\lambda} x.$$

Exercice 2.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_p(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente d'indice $q \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la nature de la série $\sum A^n$ et en cas de convergence, déterminer sa somme.

Correction.

Pour tout $n \geq q$, $A^n = 0_n$, donc, pour $N \geq q$, on a :

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} A^n = \sum_{n=0}^{q-1} A^n + \sum_{n=q}^{N} \underbrace{A^n}_{=0_n} = \sum_{n=0}^{q-1} A^n.$$

Ainsi, la suite $(S_N)_{N \in \mathbb{N}} = \sum A^n$ est stationnaire en $\sum_{n=0}^{q-1} A^n$, d'où $\sum A^n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = \sum_{n=0}^{q-1} A^n = I_n + A + ... + A^{q-1}.$$

Proposition 2.

La suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des restes de la série $\sum u_n$ converge vers 0_E.

Démonstration.

On a, avec S la somme de la série et S_n la somme partielle d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de la série :

$$\lim_{n\to+\infty} R_n = \lim_{n\to+\infty} (S - S_n) = S - S = 0_E.$$

□

Définition 5. *Série télescopique*

On dit que la série $\sum u_n$ est une **série télescopique** si le terme général u_n de la série s'écrit, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = v_{n+1} - v_n.$$

Proposition 3.

On suppose que la série $\sum u_n$ est télescopique avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_{n+1} - v_n$. Alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la série $\sum u_n$ sont de même nature i.e. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, $\sum u_n$ converge. De plus, en cas de convergence, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n - v_0.$$

Démonstration.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{n} u_i = \sum_{i=0}^{n} (v_{i+1} - v_i) = (v_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} v_i) - ((\sum_{i=1}^{n} v_i) - v_0) = v_n - v_0.$$

d'où le résultat en passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans cette égalité. □

2. Espace vectoriel des séries convergentes

Proposition 4.

L'ensemble des séries convergentes de terme général dans E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites à valeurs dans E.

De plus, l'application qui à une série convergente associe sa somme est une application linéaire i.e. pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et toutes séries $\sum u_n$, $\sum v_n$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Démonstration.

On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des séries de terme général dans E et $\mathcal{S}_c(E)$ l'ensemble des séries convergentes.

> *Exercice :* Montrer que $\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$ (ensemble des suites à valeurs dans E) - on démontrera (entre autres) que pour $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $\sum u_n, \sum v_n \in \mathcal{S}(E)$,
>
> $$\lambda \sum u_n + \mu \sum v_n = \sum (\lambda u_n + \mu v_n).$$

On rappelle (voire le chapitre Topologie des e.v.n.) que l'ensemble $c(E)$ des suites à valeurs dans E convergentes est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$.
On remarque que $\mathcal{S}_c(E) = \mathcal{S}(E) \cap c(E)$ donc $\mathcal{S}_c(E)$ est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$ comme intersection de sous-espaces vectoriels de $E^{\mathbb{N}}$.

De plus, considérons l'application $f : \mathcal{S}_c(E) \to \mathbb{K}$ telle que :

$$f : \sum u_n \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $\sum u_n, \sum v_n \in \mathcal{S}_c(E)$. Alors,

$$\begin{aligned}
f(\lambda \sum u_n + \mu \sum v_n) &= f(\sum (\lambda u_n + \mu v_n)) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) \\
&= \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} (\lambda u_n + \mu v_n) \\
&= \lim_{N \to +\infty} \left(\lambda \sum_{n=0}^{N} u_n + \mu \sum_{n=0}^{N} v_n \right) \\
&= \lambda \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n + \mu \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} v_n \\
&= \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \\
&= \lambda f(\sum u_n) + \mu f(\sum v_n)
\end{aligned}$$

Donc f est une application linéaire.

□

Exercice 3.

Soit $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Discuter de la nature de la série $\sum A^n$.

Correction.

On a $A = \frac{1}{2}(I_2 + J_a)$ où $J_a = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente d'indice 2 et commute avec I_2. Ainsi en appliquant la formule du binôme, on obtient pour $n \geq 2$:

$$A^n = \frac{1}{2^n}(I_2 + J_a)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} J_a^i I_2^{n-i} = I_2 + nJ_a;$$

par suite,

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} A^n = \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n}\right) I_2 + \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{n}{2^n}\right) J_a$$

Donc $\sum A^n$ converge car les séries numériques $\sum \frac{1}{2^n}$ et $\sum \frac{n}{2^n}$ converge. En effet, $\frac{1}{2} < 1$ et $\frac{3}{4} < 1$ donc les séries géométriques $\sum \frac{1}{2^n}$ et $\sum (\frac{3}{4})^n$ convergent et on a $\frac{n}{2^n} = o((\frac{3}{4})^n)$ donc, par comparaison avec le terme général d'une série convergente, on en déduit que $\sum \frac{n}{2^n}$ converge (on aurait pu utiliser la règle de D'Alembert, que l'on verra dans la prochaine partie, pour conclure la convergence de $\sum \frac{n}{2^n}$).

Proposition 5. *Utilisation d'une base*

On suppose que E est de dimension finie p. Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E et $\sum u_n$ la série de terme général $u_n = \sum_{i=1}^{n} u_n^{(i)} e_i \in E$. Alors la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, la série numérique $\sum u_n^{(i)}$ converge. Dans ce cas, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(i)}\right) e_i.$$

Exercice 4.

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_p(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable dans $M_p(\mathbb{K})$ telle que, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $|\lambda| < 1$. Démontrer que $\sum A^n$ est convergente et déterminer sa somme.
2. Application : déterminer la somme de la série $\sum \left(\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^n$.

Correction.

1. Comme A est diagonalisable, il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $D = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ avec $\alpha_1, ..., \alpha_p \in \mathrm{Sp}(A)$ tels que $A = PDP^{-1}$. On a $|\alpha_i| < 1$, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ et donc, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=0}^{N} A^n = P\left(\sum_{n=0}^{N} D^n\right)P^{-1} \\ &= P\,\mathrm{diag}\left(\frac{1-\alpha_1^{N+1}}{1-\alpha_1},\dots,\frac{1-\alpha_p^{N+1}}{1-\alpha_p}\right)P^{-1} \\ &\xrightarrow[N\to+\infty]{} P\,\mathrm{diag}\left(\frac{1}{1-\alpha_1},\dots,\frac{1}{1-\alpha_p}\right)P^{-1}. \end{aligned}$$

Il en résulte que $\sum A^n$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = P\,\mathrm{diag}\left(\frac{1}{1-\alpha_1},\dots,\frac{1}{1-\alpha_p}\right)P^{-1}$.

2. On a, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$A = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{-1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = P\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}{}^tP = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 2 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{7}{5} \end{pmatrix}$$

3. Série absolument convergente

Dans ce paragraphe, on suppose que E est de **dimension finie** p.

Définition 6. *Série absolument convergente*

On dit que la série $\sum u_n$ de terme général $u_n \in E$ est **absolument convergente** si la série à termes positifs $\sum \|u_n\|$ est convergente.

Théorème 1.

Si la série $\sum u_n$ converge absolument, alors $\sum u_n$ converge. De plus, on a :

$$\left\|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|.$$

Démonstration.

On suppose que $\sum u_n$ converge absolument. Alors $\sum \|u_n\|$ converge. Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ un base de E. Comme E est de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes sur E ; ainsi, il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \in E$, $\|x\|_\infty \leq c\|x\|$. Par suite, on a, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$:

$$|u_n^{(i)}| \leq \|u_n\|_\infty \leq c\|u_n\|,$$

donc $\sum u_n^{(i)}$ est une suite numérique absolument convergente, donc convergente. Ainsi, les séries des composantes de $\sum u_n$ convergent, donc $\sum u_n$ converge. $\square$

Exercice 5.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On munit l'espace vectoriel $M_p(\mathbb{K})$ d'une norme $\|\cdot\|$ qui est sous-multiplicative i.e. $\forall\, A, B \in M_p(\mathbb{K})$, $\|AB\| \leq \|A\|.\|B\|$.

Soit $A \in M_p(\mathbb{K})$ telle que $\|A\| < 1$.

1. Montrer que $\sum A^n$ est absolument convergente. Vers quelle limite converge la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. En déduire que $I_p - A$ est inversible en déterminant son inverse.

Correction.

1. On a, par sous-multiplicativité de la norme $\|\cdot\|$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|A^n\| \leq \|A\|^n$. Or $\sum \|A\|^n$ est une série géométrique de raison $\|A\| < 1$, donc le terme général $\|A^n\|$ de la série à termes positifs est majoré par le terme général d'une série convergente. Par suite, $\sum \|A^n\|$ converge ; d'où la série $\sum A^n$ est absolument convergente.

   Comme $\sum A^n$ est absolument convergente, $\sum A^n$ converge. Par suite, $\lim_{n\to+\infty} A^n = 0_n$.

2. On a, pour $N \in \mathbb{N}$,

$$(I_p - A)S_N = (I_p - A)\left(I_p + A + A^2 + ... + A^N\right) = I_p - A^{N+1},$$

   Par suite,

$$(I_p - A)\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = \lim_{n\to+\infty}(I_p - A)S_N = I_p - \lim_{n\to+\infty} A^{N+1} = I_p.$$

   Ainsi, $I_p - A$ est inversible et $(I_p - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n$.

Partie B

Compléments sur les séries numériques

Dans cette partie, on considérera seulement des séries à termes **réels**.

1. Règle de D'Alembert

Proposition 6. *Comparaison logarithmique*

Soit (u_n) et v_n des suites de réels strictement positifs à partir d'un certain rang n_0 telles que pour tout $n \geq n_0$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Alors,

— si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ converge ;

— si $\sum u_n$ diverge, $\sum v_n$ diverge.

Démonstration.

On a remarque que pour tout $n \geq n_0$, on a :

$$\frac{u_n}{u_{n_0}} = \prod_{i=n_0}^{n-1} \frac{u_{i+1}}{u_i} \leq \prod_{i=n_0}^{n-1} \frac{v_{i+1}}{u_i} = \frac{v_n}{v_{n_0}}$$

d'où :

$$u_n \leq \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} v_n.$$

Par suite, par comparaison de séries à termes positifs, on obtient que si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge (et donc également la contraposée).

□

Corollaire 1.

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. Si, à partir d'un certain rang n_0 :

— il existe $M \in]0, 1[$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq M$, alors $\sum u_n$ converge.

— pour tout $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors $\sum u_n$ diverge.

Démonstration.

— On considère la suite géométrique $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de raison $0 < M < 1$. Alors $\sum v_n$ converge, et,

à partir du certain rang n_0, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq M = \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Par suite, d'après la proposition précédente, $\sum u_n$ converge.

— La suite (u_n) à termes strictement positifs est croissante à partir du rang n_0, donc (u_n) ne converge pas vers 0. Ainsi $\sum u_n$ diverge grossièrement. (on aurait pu, comme dans le cas précédent, comparer $\sum u_n$ avec la série géométrique de raison 1).

□

Théorème 2. *Règle de D'Alembert*

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Alors :

— Si $\ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge.

— Si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge.

Démonstration.

- 1er cas : $\ell \in \mathbb{R}_+$:
  Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un certain rang n_0, tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$.
  — On suppose $\ell < 1$. Alors pour $\varepsilon < 1 - \ell$, on a, pour tout $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \ell + \varepsilon$ et on applique le corollaire précédent en posant $M = \ell + \varepsilon < 1$. Par suite, $\sum u_n$ converge.
  — On suppose $\ell > 1$. Alors pour $\varepsilon = \ell - 1$, on a, pour tout $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \ell - \varepsilon = 1$ et on applique le corollaire précédent. Par suite, $\sum u_n$ diverge.
- 2nd cas : $\ell = +\infty$:
  Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors, pour tout $A \geq 0$, il existe un certain rang n_0, tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq A$.
  Ainsi, pour $A = 1$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.
  D'après le corollaire précédent, $\sum u_n$ diverge.

□

Remarque 4.

— On peut voir, en regardant la construction de la démonstration de cette règle, que l'on compare la série $\sum u_n$ à une série géométrique. Ainsi, cette règle ne peut servir à étudier des suites dont le comportement ressemble à celui d'une série géométrique.

— Ainsi dans le cas $\ell = 1$, on ne peut pas conclure comme en témoigne par exemple $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$.

Exercice 6. *Applications de la règle de D'Alembert*

1. Montrer que $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Étudier la nature de la série $\sum \dfrac{n!}{n^n}$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Discuter de la nature de la série $\sum \dfrac{x^n}{\binom{2n}{n}}$ en fonction de x.

Correction.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \left|\frac{x^n}{n!}\right|$. Alors on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x|^{n+1}}{|x|^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1.$$

Ainsi, d'après la règle de D'Alembert, $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ est absolument convergente et donc convergente.

2. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e} < 1.$$

Ainsi, d'après la règle de D'Alembert, $\sum \dfrac{n!}{n^n}$ converge.

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$. Alors on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{4}x \begin{cases} < 1 & \text{si } x < 4 \\ = 1 & \text{si } x = 4 \\ > 1 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

D'après la règle de D'Alembert, $\sum u_n$ converge si $x < 4$ et diverge si $x > 4$. Si $x = 4$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4n+4}{4n+2} \geq 1.$$

Par suite, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (et à valeurs positives) donc elle ne converge pas vers 0. Ainsi, $\frac{4^n}{\binom{2n}{n}}$ diverge grossièrement.

Exercice 7. *Exponentielle de matrice*

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in M_p(\mathbb{K})$ muni d'une norme sous-multiplicative.

1. Montrer que la série $\sum \frac{A^n}{n!}$ est convergente. On note alors
$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}.$$
2. Calculer $\exp(A)$ pour $A = \begin{pmatrix} -7 & -4 & -4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction.

1. Comme $\|\cdot\|$ est sous-multiplicative, on a, pour $n \in \mathbb{N}$, $\left\| \frac{A^n}{n!} \right\| \leq \frac{\|A\|^n}{n!}$ qui est le terme général d'une série convergente (voire la quqtion 1. de l'exercice précédent). Ainsi, par majoration du terme général d'une série à termes positifs par le terme général d'une série convergente, $\sum \frac{A^n}{n!}$ est absolument convergente. Par suite, $\sum \frac{A^n}{n!}$ est convergente.
2. On remarque que si A est diagonalisable avec $A = PDP^{-1}$ où $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ et $D = \mathrm{diag}(\alpha_1, ..., \alpha_p)$, on a :
$$\exp(A) = P \exp(D) P^{-1}$$
et
$$\exp(D) = \mathrm{diag}(e^{\alpha_1}, ..., e^{\alpha_p}).$$
Ainsi, dans notre cas, on a :
$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
d'où
$$\begin{aligned} \exp(A) = P \exp(D) P^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -e + 2e^{-3} & -e + e^{-3} & -e + e^{-3} \\ e - e^{-3} & e & e - e^{-3} \\ e - e^{-3} & e - e^{-3} & e \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Comparaison avec une intégrale

Théorème 3. *Comparaison série intégrale*

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction **continue par morceaux et décroissante**. Alors la série :

$$\sum_{n\geq 1}\left(\int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n)\right)$$

converge.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors on a :

$$0 = f(n) - f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n) \leq f(n-1) - f(n)$$

Donc la série est à termes positifs et on a, pour tout $N \geq 1$:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N}\left(\int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n)\right) \leq \sum_{n=1}^{N}(f(n-1) - f(n)) = f(0) - f(N).$$

Or comme f est décroissante et minorée (par 0), f admet une limite $\ell \in \mathbb{R}_+$ en $+\infty$; ainsi, pour tout $N \geq 1$, $S_N \leq f(0) - \ell$. Par suite, par majoration uniforme des sommes partielles d'une série à termes positifs, la série converge. □

Corollaire 2.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction **continue par morceaux et décroissante**. Alors $\sum f(n)$ converge si, et seulement si, $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.

Démonstration.

On sait que $\sum_{n\geq 1}\left(\int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n)\right)$ converge, donc $\sum f(n)$ converge si, et seulement si, $\sum_{n\geq 1}\int_{n-1}^{n} f(t)dt$ converge. Or on a $\sum_{n\geq 1}\int_{n-1}^{n} f(t)dt$ converge si, et seulement si

$$\int_0^{\infty} f(t)dt = \lim_{N\to+\infty}\int_0^{N} f(t)dt = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\int_{n-1}^{n} f(t)dt$$

existe dans $\mathbb{R}_+$. D'où le résultat. □

Proposition 7. *Série-Intégrale : estimation des sommes partielles et des restes*

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction **continue par morceaux et décroissante** et $n \in \mathbb{N}$. Alors les sommes partielles de la série $\sum f(n)$ vérifient pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$\int_{n+1}^{n+m+1} f(t)dt \leq S_{n+m} - S_n = f(n+1) + \ldots + f(n+m) \leq \int_{n}^{n+m} f(t)dt.$$

Et en cas de convergence de la série $\sum f(n)$, les restes de la série vérifient :

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt \leq R_n \leq \int_{n}^{+\infty} f(t)dt.$$

Démonstration.

On a, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{i}^{i+1} f(t)dt \leq f(i) \leq \int_{i-1}^{i} f(t)dt.$$

Donc, pour $m \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{i=n+1}^{n+m} \int_{i}^{i+1} f(t)dt \leq \sum_{i=n+1}^{n+m} f(i) \leq \sum_{i=n+1}^{n+m} \int_{i-1}^{i} f(t)dt,$$

et ainsi, on obtient le résultat concernant les sommes partielles. Si $\sum f(n)$ converge, alors $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge et donc, les mêmes intégrales mais à partir de n et de $n+1$ convergent. De plus, d'après les inégalités précédentes, on a :

$$\underbrace{\lim_{m\to+\infty} \int_{n+1}^{n+m+1} f(t)dt}_{=\int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt} \leq \underbrace{\lim_{m\to+\infty} S_{n+m} - S_n}_{=R_n} \leq \underbrace{\lim_{m\to+\infty} \int_{n}^{n+m} f(t)dt}_{=\int_{n}^{+\infty} f(t)dt}.$$

□

Remarque 5.

En particulier, on a l'inégalité $\int_1^{N+1} f(t)dt \leq \sum_{n=1}^{N} f(n) \leq \int_0^N f(t)dt$.

Exercice 8.

Donner, selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, la nature des séries suivantes. En cas de divergence, donner un équivalent simple des sommes partielles et en cas de convergence, donner un équivalent simple des restes.

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$.
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^\alpha}$.

Correction.

1. Pour $\alpha > 0$, la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue et décroissante sur de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même. Ainsi, d'après le théorème de comparaison série-intégrale (voire Corollaire 2), $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge. Or on a :

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}\left(x^{1-\alpha} - 1\right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln(x) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}.$$

d'où les trois cas suivants :
1er cas : $0 < \alpha < 1$. Dans ce cas, $1 - \alpha > 0$, donc

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{1-\alpha}\left(x^{1-\alpha} - 1\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

Par suite, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

2eme cas : $\alpha = 1$. On a

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty,$$

Par suite, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

3eme cas : $\alpha > 1$. Dans ce cas, $\alpha - 1 > 0$, donc

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha - 1}\left(1 - \frac{1}{x^{\alpha-1}}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{\alpha-1}.$$

Par suite, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge et ainsi $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

On a donc bien le critère de Riemann : $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$. (Pour $\alpha \leq 0$, on remarque que la série diverge grossièrement).

Intéressons nous désormais aux équivalents des restes et des sommes partielles :
On a, pour tout $i \geq 2$,

$$\int_{i-1}^i \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{i^\alpha} \leq \int_i^{i+1} \frac{1}{t^\alpha} dt,$$

1er cas : $0 < \alpha < 1$. La série diverge, donc on s'intéresse à un équivalent des sommes partielles. On a

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq 1 + \int_2^{n+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq S_n(\alpha) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^\alpha} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt \qquad (*)$$

Ainsi, on obtient :

$$\frac{1}{1-\alpha}\left((n+1)^{1-\alpha} - 1\right) \leq S_n(\alpha) \leq 1 + \frac{1}{1-\alpha}\left(n^{1-\alpha} - 1\right).$$

On remarque alors que :

$$\frac{1}{1-\alpha}\left((n+1)^{1-\alpha}-1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1+\frac{1}{1-\alpha}\left(n^{1-\alpha}-1\right);$$

par suite, d'après le théorème des gendarmes, $S_n(\alpha)\dfrac{1-\alpha}{n^{1-\alpha}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Il en résulte que :

$$S_n(\alpha) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

2eme cas : $\alpha = 1$. La série diverge, donc on s'intéresse de nouveau à un équivalent des sommes partielles. D'après $(*)$, on obtient :

$$\ln(n+1) \leq S_n(1) \leq 1+\ln(n).$$

Par suite,

$$S_n(1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).$$

3eme cas : $\alpha > 1$. La série converge, donc on s'intéresse à un équivalent des restes. On a, pour $n \geq 1$:

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt \leq R_n(\alpha) \leq \int_{n}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_n(\alpha) \leq \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

D'où, finalement,

$$R_n(\alpha) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

2. On réitère les mêmes techniques avec la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x(\ln(x))^\alpha}$.

3. Rappels : Critère des séries alternées

Définition 7. *Série alternée*

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On dit que la série $\sum v_n$ est **alternée** s'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels tous de même signe telle que

$$\sum v_n = \sum (-1)^n u_n.$$

Exemple 1.

$\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ ou $\sum \sin\left(\pi(\sqrt{n^2+1})\right)$ sont des séries alternées.

Théorème 4. *Critère des séries alternées*

Soit $\sum v_n$ une série alternée. Si :

i) la suite $(|v_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et

ii) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0,

alors $\sum v_n$ converge et on a les propriétés suivantes :

— si $v_0 \geq 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$S_{2k+1} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \leq S_{2k}.$$

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, R_n est du signe de v_{n+1} et

$$|R_n| \leq |v_{n+1}|.$$

Démonstration.

Quitte à échanger la suite (v_n) par la suite $(-v_n)$, on suppose $v_0 \geq 0$. Cela implique que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v_{2k} \geq 0$ et $v_{2k+1} \leq 0$ car la série est alternée.

On considère les suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} = (S_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}} = (S_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$. Montrons qu'elles sont adjacentes i.e. (a_k) est décroissante, (b_k) est croissante et $(a_k - b_k)$ converge vers 0.

— Soit $k \in \mathbb{N}$. On a

$$a_{k+1} - a_k = S_{2k+2} - S_{2k} = v_{2k+2} + v_{2k+1} = |v_{2k+2}| - |v_{2k+1}| \leq 0$$

car $(|v_n|)$ est décroissante d'après ii) ; et, grâce à un argument similaire, on a :

$$b_{k+1} - b_k = S_{2k+3} - S_{2k+1} = v_{2k+3} + v_{2k+2} = |v_{2k+2}| - |v_{2k+3}| \geq 0.$$

Par suite, (a_k) est décroissante et (b_k) est croissante.

— Soit $k \in \mathbb{N}$. On a

$$a_k - b_k = S_{2k} - S_{2k+1} = -v_{2k+1} = |v_{2k+1}| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

Il en résulte que $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et converge ainsi vers une même limite notée S. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a, pour $k = E(\frac{n}{2})$:

$$b_k = S_{2k+1} \leq S_n \leq S_{2_k} = a_k,$$

avec égalité à gauche lorsque n est impair, et égalité à droite lorsque n est pair. Ainsi, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, et en remarquant que $k = E(\frac{n}{2}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, on obtient que (S_n) converge vers S, d'où l'existence de la somme de la série $\sum v_n$ et on a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$S_{2k+1} \leq S = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \leq S_{2_k}.$$

□

Remarque 6.

Sous les hypothèses du critère des séries alternées, en particulier, $S = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ est du même signe que v_0 et lorsque $v_0 \geq 0$, $S \leq v_0$.

Exercice 9.

1. Étudier la nature $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ selon les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que le reste R_n de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ est le terme général d'une série convergente.
3. On considère la suite $\sum u_n$ de terme général :

$$u_n = \begin{cases} \frac{-1}{k^2} \text{ si } n = 2k \text{ est pair} \\ \frac{1}{k} \text{ si } n = 2k+1 \text{ est impair} \end{cases}$$

Quelle est la nature de cette série ? Qu'en conclure sur les hypothèses du critère des séries alternées ?

Correction.

1. *1er cas* $\alpha \leq 0$: on a $\frac{(-1)^n}{n^\alpha} = (-1)^n n^{-\alpha} \nrightarrow 0$ car $-\alpha \geq 0$ donc $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.
   2eme cas $\alpha > 0$. Alors $(\frac{1}{n^\alpha})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et tend vers 0, donc d'après le critère des séries alternées, $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.
2. D'après la question précédente, $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ converge ; on peut donc s'intéresser aux restes de cette série.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :
$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}.$$
   Toujours d'après le critère des séries alternées, on a :
$$|R_n| \leq \left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}\right| = \frac{1}{(n+1)^2}$$
   Ainsi, $|R_n|$ est bien le terme général d'une série convergente d'après le critère de Riemann $(2 > 1)$ car $\dfrac{1}{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.
   Par suite, $\sum R_n$ est absolument convergente, et donc convergente.
3. Tout d'abord, on remarque que (u_n) est bien le terme général d'une série alternée qui vérifie $u_n \to 0$. Par contre, $(|u_n|)$ n'est pas décroissante...
   On a, pour $2 \leq n = 2k$ un entier pair :
$$u_n + u_{n+1} = u_{2k} + u_{2k+1} = \frac{-1}{k^2} + \frac{1}{k} = \frac{k-1}{k^2}.$$

Ainsi, pour $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$S_{2N+1} = \sum_{n=1}^{2N+1} u_n = 1 + \sum_{k=1}^{N} (u_{2k} + u_{2k+1}) = 1 + \sum_{k=1}^{N} \frac{k-1}{k^2}$$

Or, on a $\dfrac{k-1}{k^2} = o(\frac{1}{k})$ donc d'après le critère de Riemann, la série $\sum \dfrac{k-1}{k^2}$ diverge. Par suite, la suite $(S_{2N+1})_{N\in\mathbb{N}}$ diverge également !
Il en résulte que $\sum u_n$ diverge.

On en conclut que l'hypothèse de décroissance de la suite $(|u_n|)$ est nécessaire ! Si on l'omet, le théorème devient faux comme en atteste cet exemple.

4. Sommation des relations de comparaison

a. En cas de convergence

Proposition 8.

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries numériques avec $\sum v_n$ à termes positifs. On suppose que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent. Alors les restes $R_n(u)$ et $R_n(v)$ respectifs des séries associées aux suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient quand $n \to +\infty$:

- Si $u_n = O(v_n)$, alors $R_n(u) = O(R_n(v))$.
- Si $u_n = o(v_n)$, alors $R_n(u) = o(R_n(v))$.
- Si $u_n \sim v_n$, alors $R_n(u) \sim R_n(v)$.

Démonstration.

On remarque que dans chacun des cas précédent, la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ verifie la même relation de comparaison que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vis-à-vis de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par suite, comme $\sum v_n$ converge, par comparaison, $\sum |u_n|$ converge et donc ses restes $R_n(|u|)$ sont bien définis et on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|R_n(u)| = |\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_n| = R_n(|u|).$$

- On suppose $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$. Alors il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M v_n$. Par suite, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|R_n(u)| \leq R_n(|u|) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \underbrace{|u_n|}_{\leq M v_n} \leq M \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_n = M R_n(v).$$

  D'où $R_n(u) = \underset{n\to+\infty}{O}(R_n(v))$.
- On procède de manière similaire : on suppose $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$. Soit $\varepsilon > 0 <$. Alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ implique $|u_n| \leq \varepsilon v_n$.

Par suite, pour tous $n \geq N$ et $k \geq n+1$, on a $k \geq N$ donc :

$$|R_n(u)| \leq R_n(|u|) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \underbrace{|u_n|}_{\leq \varepsilon v_n} \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_n = \varepsilon R_n(v).$$

D'où $R_n(u) = \underset{n\to+\infty}{o}(R_n(v))$.

— On suppose $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Alors par définition, $u_n - v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n - v_n$. Alors, par comparaison (ou par combinaison linéaire de série convergente), $\sum w_n$ est convergente et ses restes $R_n(w)$ vérifient, d'après le point précédent, $R_n(w) = \underset{n\to+\infty}{o}(R_n(v))$.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n(w) = R_n(u) - R_n(v)$, donc :

$$R_n(u) - R_n(v) = \underset{n\to+\infty}{o}(R_n(v)).$$

D'où $R_n(u) = \underset{n\to+\infty}{\sim} R_n(v)$.

□

b. En cas de divergence

Proposition 9.

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries numériques avec $\sum v_n$ à termes positifs. On suppose que $\sum v_n$ diverge. Alors les sommes partielles $S_n(u)$ et $S_n(v)$ respectifs des séries associées aux suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient quand $n \to +\infty$:

— Si $u_n = O(v_n)$, alors $S_n(u) = O(S_n(v))$.
— Si $u_n = o(v_n)$, alors $S_n(u) = o(S_n(v))$.
— Si $u_n \sim v_n$, alors $S_n(u) \sim S_n(v)$.

Démonstration.

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant à termes positifs, donc les séries associées sont des suites croissantes. De plus, comme $\sum v_n$ diverge, alors $(S_n(v))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, i.e. pour tout $A \geq 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N_1$ implique $S_n(v) \geq A$.

— On suppose $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$. Alors il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M v_n$.
Par suite, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n(u) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{u_n}_{\leq M v_n} \leq M \sum_{k=0}^{n} v_n = M S_n(v).$$

D'où $S(u) = \underset{n\to+\infty}{O}(S_n(v))$.

— on suppose $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ implique $u_n \leq \frac{\varepsilon}{2} v_n$.
De plus, pour $A = \frac{2S_N(u)}{\varepsilon} \geq 0$, d'après la remarque initiale, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour

tout entier $n \geq N_1$, $S_n(v) \geq A$ i.e. $S_N(u) \leq \frac{\varepsilon}{2} S_n(v)$.
Soit un entier $n \geq \max(N, N_1)$. Alors :

$$S_n(u) = \sum_{k=0}^{N} u_n + \sum_{k=N+1}^{n} \underbrace{u_n}_{\leq \frac{\varepsilon}{2} v_n} \leq \underbrace{S_N(u)}_{\leq \frac{\varepsilon}{2} S_n(v)} + \frac{\varepsilon}{2} \underbrace{\sum_{k=N+1}^{n} v_n}_{\leq S_n(v)} = \varepsilon S_n(v).$$

D'où $S_n(u) = \underset{n \to +\infty}{o}(S_n(v))$.

— On suppose $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$. Alors par définition, $u_n - v_n = \underset{n \to +\infty}{o}(v_n)$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n - v_n$, et $S_n(w)$ la somme partielle d'ordre n de $\sum w_n$. Alors on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n(w) = S_n(u) - S_n(v)$ et d'après le cas précédent, comme $w_n = \underset{n \to +\infty}{o}(v_n)$,

$$S_n(u) - S_n(v) = S_n(w) = \underset{n \to +\infty}{o}(S_n(v)).$$

D'où $S_n(u) = \underset{n \to +\infty}{\sim} S_n(v)$.

□

Corollaire 3. *Lemme de Cesàro*

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs complexes. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{C}$, alors :

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell.$$

Correction.

On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ et pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - \ell$. Alors on a $v_n = u_n - \ell = \underset{n \to +\infty}{o}(1)$. Comme la série $\sum 1$ diverge, d'après la proposition précédente, la somme partielle S_n d'indice n de la série $\sum v_n$ vérifie :

$$S_n = \underset{n \to +\infty}{o}\left(\sum_{k=0}^{n} 1\right) = \underset{n \to +\infty}{o}(n)$$

Or on a $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_n = \sum_{k=0}^{n} u_n - \sum_{k=0}^{n} \ell = \sum_{k=0}^{n} u_n - (n+1)\ell$. Par suite,

$$\sum_{k=0}^{n} u_n = (n+1)\ell + \underset{n \to +\infty}{o}(n),$$

d'où le résultat en quotientant cette dernière égalité par $n+1$.

c. Applications

Exercice 10.

Retrouver un équivalent simple des restes de $\sum \frac{1}{n^2}$ grâce à une série télescopique.

Correction.

On a $\dfrac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n(n+1)}$. De plus $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge donc :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$ donc, par "télescopage",

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n+1}.$$

Il en résulte que :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Exercice 11. *Développement asymptotique d'une suite récurrente*

On considère la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in]0,1] \\ u_{n+1} = \sin(u_n) \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout $x \in]0,1]$, $0 < \sin(x) < x$. En déduire que (u_n) admet une limite $\lambda \in \mathbb{R}$ et la déterminer.
2. Chercher $\alpha > 0$ tel que la suite $\left(u_{n+1}^{-\alpha} - u_n^{-\alpha}\right)$ converge vers une limite non nulle et déterminer cette limite.
3. En déduire un équivalent en $+\infty$ de $\frac{1}{u_n^2}$. Déterminer ainsi un équivalent simple en $+\infty$ de u_n.

Exercice 12. *Développement asymptotique à 3 termes de la série harmonique*

On considère la série harmonique $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note H_n sa somme partielle d'indice n et $d_n = H_n - \ln(n)$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$,

$$d_n - d_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}.$$

puis en déduire que $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
Dans la suite, on notera γ la limite de $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui par ailleurs répond au doux nom de *constante d'Euler*.

2. En comparant les restes des séries (convergentes !) de termes généraux $d_{n-1} - d_n$ et $\frac{1}{2n^2}$, montrer que :
$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$