Chapitre VIII

Suites et Séries de fonctions

Table des matières

Partie A : Convergences des suites et des séries de fonctions **2**
1. Convergence simple 2
2. Convergence uniforme 5
3. Convergence uniforme des séries de fonctions 19

Partie B : Convergence uniforme : continuité, limites, intégration et dérivation **27**
1. Continuité 27
2. Limites 34
3. Intégration 36
4. Dérivation 40

Partie C : Approximation uniforme **46**
1. Définitions 46
2. Approximation uniforme par des fonctions en escalier 46
3. Approximation uniforme par des fonctions polynomiales 48

Dans ce chapitre, E et F désigne un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Toutes les fonctions que l'on considère dans ce chapitre sont, sauf indication contraire, des fonctions définies sur une partie A de E et à valeurs dans F.

Partie A

Convergences des suites et des séries de fonctions

1. Convergence simple

a. Suites de fonctions

Définition 1. *Convergence simple d'une suite de fonctions*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $A \subset E$ dans F.

On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement sur** A si, pour tout $x \in A$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans F est convergente.

Dans ce cas, la fonction $f : x \mapsto \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ de A dans F est bien définie et on dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement vers** f.

Exemple 1.

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par $f_n : t \mapsto t^n$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Remarque 1.

L'exemple précédent nous montre que lorsqu'une suite de fonctions continues converge simplement vers f, f n'est pas continue en général !

Exercice 1.

1. Écrire la définition de la convergence simple vers une fonction en termes "epsilonesques".
2. Pour $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de fonctions qui converge simplement sur A vers des fonctions f et g respectivement, étudier la convergence simple des suites de fonctions $(\lambda f_n + \mu g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (où $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$) et $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge simplement sur A vers une fonction f. Que dire de f lorsqu'à partir d'un certain rang, les f_n sont : positives ? croissantes ? dérivables ?

périodiques (de même période T) ? strictement positives ?

Correction.

1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans F et $f : A \to F$. Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur A si, et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in A,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, \quad \|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon.$$

2. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simplement vers f et g respectivement sur A. Soit $\lambda, \mu \in K$. Montrons que $(\lambda f_n + \mu g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur A vers $\lambda f + \mu g$ et que $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur A vers fg.

   <u>CVS sur A :</u>

   Soit $x \in A$. On étudie la nature des suites $((\lambda f_n + \mu g_n)(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et $((f_n g_n)(x))_{n\in\mathbb{N}}$.
   On a :

$$(\lambda f_n + \mu g_n)(x) = \lambda f_n(x) + \mu g_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda f(x) + \mu g(x) = (\lambda f + \mu g)(x),$$

   et

$$(f_n g_n)(x) = f_n(x) g_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x) g(x) = (fg)(x),$$

   Ainsi, les suites $((\lambda f_n + \mu g_n)(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et $((f_n g_n)(x))_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, et ce pour tout $x \in A$. Par suite, $(\lambda f_n + \mu g_n)$ et $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simplement sur A et ce, vers les fonctions $\lambda f + \mu g$ et fg respectivement.

3. Par les propriétés de la limite, on remarque que la positivité, la croissance et la périodicité (avec une période commune) "passent" à la convergence simple.
   Par contre, la dérivabilité ne passe pas (voire $f_n : t \to t^n$ sur $[0, 1]$) et la stricte positivité ne passe pas non plus (voire $f_n : t \to t^n$ sur $]0, 1]$).

Exercice 2.

Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$a)\ f_n : t \mapsto \frac{1 + nt^2}{1 + nt} \text{ sur } \mathbb{R}_+. \qquad b)\ f_n : t \mapsto \sin^n(t)\cos(t) \text{ sur } \mathbb{R}.$$

$$c)\ f_n : x \mapsto f_n(x) = \begin{cases} nx^2 & \text{si } x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \\ 6n\left(\frac{1}{\sin(\frac{1}{nx})} - \frac{1}{\tan(\frac{1}{nx})}\right) & \text{si } x \notin [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \end{cases} \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Correction.

a) Étudions la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}_+$:

   <u>CVS sur $\mathbb{R}_+$:</u>

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On étudie la nature de $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$. On a :

$$f_n(x) = \frac{1+nx^2}{1+nx} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ t & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Ainsi, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et ce, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
Donc (f_n) converge simplement vers $f : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ t & \text{si } t > 0 \end{cases}$ sur $\mathbb{R}_+$.

b) Étudions la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur R.

<u>CVS sur $\mathbb{R}$:</u>
Soit $t \in \mathbb{R}$. On étudie la nature de $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$. On a :

$$f_n(t) = \sin^n(t)cos(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } t \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \text{ car } cos(t) = 0 \\ 0 & \text{si } t \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \text{ car } |sin(t)| < 1 \end{cases}$$

Ainsi, la suite $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et ce, pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

c) Étudions la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}$.

<u>CVS sur $\mathbb{R}$:</u>
Soit $x \in \mathbb{R}$. On étudie la nature de $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$.
Traitons tout d'abord le cas $x \neq 0$. Alors $\frac{1}{nx} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc, à partir d'un certain rang N (par exemple $N = E(1/|x|) + 1$), pour tout $n \geq N$, $x \notin [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$. Par suite, pour tout $n \geq N$,

$$f_n(x) = 6n\left(\frac{1}{\sin(\frac{1}{nx})} - \frac{1}{\tan(\frac{1}{nx})}\right).$$

Or, quand $n \to +\infty$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin(\frac{1}{nx})} - \frac{1}{\tan(\frac{1}{nx})} &= \frac{\tan(\frac{1}{nx}) - \sin(\frac{1}{nx})}{\sin(\frac{1}{nx})\tan(\frac{1}{nx})} \\ &= \frac{\frac{1}{nx} + \frac{1}{3n^3x^3} + o(\frac{1}{n^3}) - (\frac{1}{nx} - \frac{1}{6n^3x^3} + o(\frac{1}{n^3}))}{\frac{1}{n^2x^2} + o(\frac{1}{n^2})} \\ &= \frac{\frac{1}{2n^3x^3} + o(\frac{1}{n^3})}{\frac{1}{n^2x^2} + o(\frac{1}{n^2})} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2nx} \end{aligned}$$

Remarque : on aurait pu obtenir ce résultat plus simplement, en utilisant $\tan = \sin / \cos$ *:*

$$\frac{1}{\sin(\frac{1}{nx})} - \frac{1}{\tan(\frac{1}{nx})} = \frac{1 - \cos(\frac{1}{nx})}{\sin(\frac{1}{nx})} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{1/(nx)^2}{2}}{1/nx} = \frac{1}{2nx}$$

Ainsi, toujours pour $x \neq 0$ et $n \geq N$,

$$f_n(x) = 6n\left(\frac{1}{\sin(\frac{1}{nx})} - \frac{1}{\tan(\frac{1}{nx})}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{6n}{2nx} = \frac{3}{x}.$$

Il en résulte que :

$$f_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{3}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \end{cases}$$

Ainsi, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, et ce, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{3}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \end{cases}$.

La définition suivante est une simple reformulation de la précédente dans le cas particulier des séries :

Définition 2. *Convergence simple d'une série de fonctions*

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de $A \subset E$ dans F. On dit que $\sum f_n$ **converge simplement sur** A si la suite de ses sommes partielles converge simplement sur A i.e. si pour tout $x \in A$, $\sum f_n(x)$ est convergente. Dans ce cas, on note $S : A \to F$ la fonction :

$$S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

Exemple 2.

— La série de fonctions $\sum f_n$ où $f_n : t \mapsto t^n$ converge simplement vers $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ sur $]-1,1[$.

> CVS sur $]-1,1[$: soit $t \in]-1,1[$. On étudie la nature de $\sum t^n = (S_N)_{N\in\mathbb{N}}$. On a :
>
> $$S_N = \sum_{n=0}^{N} t^n = \frac{1-t^{N+1}}{1-t} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{1-t} \text{ car } |t| < 1.$$

— La série de fonctions $\sum f_n$ où $f_n : t \mapsto \dfrac{t^n}{n!}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

> CVS sur $\mathbb{R}$: soit $t \in \mathbb{R}$. On étudie la nature de $\sum \frac{t^n}{n!}$.
> En appliquant la règle de D'Alembert, on montre que $\sum \frac{t^n}{n!}$ est une série absolument convergente et donc convergente. Ainsi, la série $\sum \frac{t^n}{n!}$ converge pour tout $t \in \mathbb{R}$ d'où $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
> De plus, on le montrera plus tard dans ce chapitre, sa somme vérifie
>
> $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} = e^t,$$
>
> donc $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction exponentielle.

2. Convergence uniforme

a. Définition et premières propriétés

Définition 3. *Convergence uniforme d'une suite de fonctions*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions et f une fonction de $A \subset E$ dans F.
On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément vers** f **sur** A si :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in A,\ \forall\, n \geq N, \quad \|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon.$$

On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément sur** A s'il existe f telle que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A.

Question 1.

Comparer les définitions des convergences simple et uniforme en termes epsilonesques ! Quelle est la différence ?

On rappelle la notation suivante :

Notation 1. *Norme de la convergence uniforme*

Soit $\mathcal{F}_b(A, F)$ (ou encore $\mathcal{B}(A, F)$) l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ des fonctions bornées de $A \subset E$ dans F. On note $\|\cdot\|_\infty$ la **norme de la convergence uniforme** sur $\mathcal{F}_b(A, F)$ i.e. pour $f \in \mathcal{F}_b(A, F)$:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in A} \|f(x)\|_F.$$

Proposition 1.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions et f une fonction de A dans F. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A si, et seulement si :

i) Les fonctions $f_n - f$ sont bornées sur A à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$ et,

ii) $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Démonstration.

- $(\Rightarrow)$. On suppose que (f_n) converge uniformément vers f sur A. Alors :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in A,\ \forall\, n \geq N, \quad \|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon.$$

  Prenons $\varepsilon = 1$. Alors il existe un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a, pour tout $x \in A$, $\|f_n(x) - f(x)\|_F \leq 1$.
  Ainsi, à partir d'un certain rang, $f_n - f$ est bornée sur A par 1.
  Montrons désormais que $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Alors

$$\exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in A,\ \forall\, n \geq N, \quad \|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon.$$

Par suite, comme l'inégalité précédente est vraie pour tout $x \in A$, on a, pour tout $n \geq N$,

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in A} \|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon.$$

Il en résulte que $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

- ($\Leftarrow$). On suppose $i)$ et $ii)$. Du fait de $i)$, quitte à supprimer une nombre fini de termes de la suite (f_n) on peut supposer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n - f$ est bornée sur A. Ainsi, on peut considérer, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la quantité $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{t \in A} \|f_n(t) - f(t)\|_F$. Soit $\varepsilon > 0$. D'après $ii)$, $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$,

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$ et $x \in A$. Alors on a :

$$\|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \sup_{t \in A} \|f_n(t) - f(t)\|_F = \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Il en résulte que la suite $(f_n - f)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.

□

Proposition 2.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions et f une fonction de A dans F. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A, alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur A.

Démonstration.

On suppose que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A. alors d'après la proposition précédente, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $f_n - f$ est bornée. Soit $x \in A$. Pour $n \geq N$, on a :

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0,$$

d'où $f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$. Il en résulte que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur A. □

Exemple 3.

— La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \sqrt{x + \frac{1}{n}}$ converge uniformément vers $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$.

En effet : soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on note $f : x \mapsto \sqrt{x}$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$|f_n(x) - f(x)| = |\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}| = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}} \leq \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{0 + \frac{1}{n}} + \sqrt{0}} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Par suite, les fonctions $f_n - f$ sont bornées sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

— La suite de fonctions de terme général $t \mapsto t^n$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1[$.

En effet, on remarque tout d'abord que (f_n) converge simplement vers le fonction nulle sur $[0, 1[$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et on note $f : x \mapsto 0$. Comme $f_n : t \mapsto t^n$ est strictement croissante sur $[0, 1[$ (pour $n > 0$), on a :

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1[} t^n = \lim_{t \to 1^-} t^n = 1$$

Par suite,

$$\|f_n - f\|_\infty = 1 \underset{n \to +\infty}{\not\to} 0.$$

Proposition 3.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites de fonctions de A dans F et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent uniformément vers respectivement f et g sur A, alors $(\lambda f_n + \mu g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\lambda f + \mu g$ sur A.

Démonstration.

On suppose $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent uniformément vers respectivement f et g sur A. Alors, à partir d'un certain rang N_1 (resp. N_2), pour tout $n \geq N_1$ (resp. $n \geq N_2$), $f_n - f$ (resp. $g_n - g$) est bornée sur A. Par suite, comme l'ensemble des fonctions bornées sur A est un espace vectoriel, à partir du rang $N = \max(N_1, N_2)$, pour tout $n \geq N$, $\lambda f_n + \mu g_n - (\lambda f + \mu g)$ est bornée sur A. Et de plus, on a :

$$\|\lambda f_n + \mu g_n - (\lambda f + \mu g)\|_\infty \leq |\lambda| \|f_n - f\|_\infty + |\mu| \|g_n - g\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0,$$

car $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent uniformément vers respectivement f et g sur A. Il en résulte que $(\lambda f_n + \mu g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\lambda f + \mu g$ sur A. □

Méthode : Montrer qu'une suite de fonctions converge uniformément.

- *Limite potentielle :* On étudie la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. S'il y a convergence simple vers une fonction f sur A, on étudie alors la convergence uniforme vers f sur A.
- *Convergence uniforme vers la limite :* Pour montrer la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on cherche à obtenir une majoration de $\|f_n - f\|_\infty$ qui tende vers 0 i.e. une majoration **indépendante de** $x \in A$ du type (à partir d'un certain rang)

$$\|f_n(x) - f(x)\|_F \leq u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

où (u_n) est une suite de réels positifs qui tend vers 0 (**et qui ne dépend pas de** $x \in A$ **!!!**).

La suite (u_n) s'obtient la plus souvent par une majoration simple, quand c'est possible, de $\|f_n(x) - f(x)\|_F$ ou par une étude des extrema de la fonction $x \mapsto \|f_n(x) - f(x)\|_F$ (à n fixé).

Exercice 3.

Étudier la convergence uniforme des suites de fonctions de termes généraux suivants sur l'intervalle de définition indiqué :

1. pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ tel que $f_n : x \mapsto x^n$.
2. pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tel que $f_n : x \mapsto x^n(1 - x)$.
3. pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $f_n : x \mapsto \sin(x + \frac{1}{n})$.
4. pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tel que $f_n : x \mapsto \frac{x}{n(1+x^n)}$.

Correction.

1. — CVS sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Soit $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. On a :

$$f_n(x) = x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

car $|x| \leq \frac{1}{2} < 1$.
Par suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\mathbf{0}$ (la fonction nulle) sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

— CVU sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, on a :

$$|f_n(x) - f(x)| = |x|^n \leq \frac{1}{2^n},$$

D'où $f_n - f$ est borné sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et :

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Remarque : l'inégalité précédente est en fait une égalité.

Il en résulte que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\mathbf{0}$ sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

2. — <u>CVS sur $[0,1]$</u>. Soit $x \in [0,1]$. On a :

$$f_n(x) = x^n(1-x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 \times (1-x) = 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 \times 0 = 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Par suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\mathbf{0}$ (la fonction nulle) sur $[0,1]$.

— <u>CVU sur $[0,1]$</u>. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On étudie sur $[0,1]$ la fonction :

$$x \mapsto g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = x^n(1-x).$$

La fonction g_n est dérivable, et on a $g_n'(x) = x^{n-1}(n-(n+1)x)$.

x	0		$\frac{n}{n+1}$		1
$g_n'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$g_n(x)$	0	$\nearrow$	$g_n(\frac{n}{n+1})$	$\searrow$	0

Par suite, on a :

$$\|f_n - f\|_\infty = g_n(\frac{n}{n+1}) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n (1 - \frac{n}{n+1}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e} \times 0 = 0.$$

Il en résulte que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\mathbf{0}$ sur $[0,1]$.

3. — <u>CVS sur $\mathbb{R}$</u>. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, par continuité de la fonction sin sur $\mathbb{R}$ et donc en x :

$$f_n(x) = \sin(x + \frac{1}{n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sin(x)$$

Par suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f = \sin$ sur $\mathbb{R}$.

— <u>CVU sur $\mathbb{R}$</u>. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= |\sin(x + \tfrac{1}{n}) - \sin(x)| \\ &= |\cos(x)\sin(\tfrac{1}{n}) + \sin(x)\left(\cos(\tfrac{1}{n}) - 1\right)| \\ &\leq |\cos(x)||\sin(\tfrac{1}{n})| + |\sin(x)||\cos(\tfrac{1}{n}) - 1| \\ &\leq |\sin(\tfrac{1}{n})| + |\cos(\tfrac{1}{n}) - 1| \end{aligned}$$

D'où $f_n - f$ est borné par 2 sur $\mathbb{R}$ et :

$$\|f_n - f\|_\infty \leq |\sin(\frac{1}{n})| + |\cos(\frac{1}{n}) - 1| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

car $\lim_{t\to 0} \sin(t) = 0$ et $\lim_{t\to 0} \cos(t) = 1$.

Il en résulte que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers sin sur $\mathbb{R}$.

Correction suite.

4. — CVS sur $\mathbb{R}_+$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a :

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+x^n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Par suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\mathbf{0}$ (la fonction nulle) sur $\mathbb{R}_+$.

— CVU sur $\mathbb{R}_+$. Soit $n \geq 2$. On étudie sur $[0,1]$ la fonction :

$$x \mapsto g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \frac{x}{n(1+x^n)}.$$

La fonction g_n est dérivable, et on a

$$g_n'(x) = \frac{n(1+x^n) - n^2x^n}{n^2(1+x^n)^2} = \frac{1-(n-1)x^n}{n(1+x^n)^2} = \frac{1-(n-1)x^n}{n(1+x^n)^2}$$

x	0		$\frac{1}{\sqrt[n]{n-1}}$		$+\infty$
$g_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$g_n(x)$	0	$\nearrow$	$g_n(\frac{1}{\sqrt[n]{n-1}})$	$\searrow$	0

Par suite, on a :

$$\|f_n - f\|_\infty = g_n(\frac{1}{\sqrt[n]{n-1}}) = \frac{1}{\sqrt[n]{n-1}} \cdot \frac{1}{n(1+\frac{1}{n-1})} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \times 0 = 0.$$

Il en résulte que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\mathbf{0}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Remarque : on pouvait conclure plus rapidement en remarquant l'inégalité suivante :

$$g_n(x) = \frac{x}{n(1+x^n)} \leq \frac{1}{n}.$$

En effet, pour $0 \leq x \leq 1$, $\frac{x}{1+x^n} \leq \dfrac{1}{1+x^n} \leq 1$ *;*

et pour $x > 1$, $x^n > x$, *donc* $\frac{x}{1+x^n} \leq \dfrac{x}{1+x} \leq 1$.

Méthode : Montrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément.

S'il n'y a pas convergence simple sur A, il n'y pas convergence uniforme.

Mais si on a déterminé une limite f pour la convergence simple, pour montrer que la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers f, on peut :

- montrer que la fonction $f_n - f$ n'est pas bornée sur A, ou

- exhiber une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A telle que la suite de terme général

$$\|f_n(x_n) - f(x_n)\|_F \textbf{ ne tend pas vers } 0.$$

Exercice 4.

Étudier la convergence uniforme des suites de fonctions de termes généraux suivants :

1. pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{n!}$.
2. pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $f_n : x \mapsto \frac{nx}{1+n^2x^2}$.
3. pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $f_n : x \mapsto \left(x + \frac{1}{n}\right)^2$.

Correction.

1. — <u>CVS sur $\mathbb{R}$</u>. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\mathbf{0}$ (la fonction nulle) sur $\mathbb{R}$.

— <u>CVU sur $\mathbb{R}$</u>. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{|x|^n}{n!} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} +\infty,$$

Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n - f$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.
Il en résulte que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers $\mathbf{0}$ sur $\mathbb{R}$.

2. — <u>CVS sur $\mathbb{R}$</u>. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

car, pour $x \neq 0$, $\dfrac{nx}{1+n^2x^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{nx}$.
Par suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\mathbf{0}$ (la fonction nulle) sur $\mathbb{R}$.

— <u>CVU sur $\mathbb{R}$</u>. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \frac{n|x|}{1+n^2x^2}.$$

On remarque que pour $x_n = \dfrac{1}{n}$, on a :

$$g_n(x_n) = \frac{n\frac{1}{n}}{1+n^2(\frac{1}{n})^2} = \frac{1}{2}$$

Donc :

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} g_n(x) \geq g_n(x_n) = \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0.$$

Il en résulte que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers $\mathbf{0}$ sur $\mathbb{R}$.

3. — <u>CVS sur $\mathbb{R}$</u>. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, par continuité sur $\mathbb{R}$ et donc en x de la fonction carrée :

$$f_n(x) = \left(x + \frac{1}{n}\right)^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} x^2.$$

Par suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f : x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$.

— <u>CVU sur $\mathbb{R}$</u>. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|f_n(x) - f(x)| = |\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 - x^2| = |\frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2}| \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} +\infty,$$

Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n - f$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.
Il en résulte que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de fonctions à valeurs réelles qui convergent uniformément vers f et g respectivement. Est-ce que $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément ?

Correction.

Non, car la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $f_n : x \mapsto x + \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}$, converge uniformément vers $f : x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$ et on a prouvé précédemment que la suite de terme général $f_n^2 : x \mapsto (x + \frac{1}{n})^2$ ne converge pas uniformément vers $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$.

b. Convergence uniforme des suites de fonctions bornées

Proposition 4.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions bornées sur A. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f sur A, alors f est bornée sur A.

Démonstration.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions bornées sur A. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A.

Par convergence uniforme, à partir d'un certain rang N, $f_n - f$ est bornée sur A. Par suite, pour tout $x \in A$, on a, pour $n \geq N$:

$$\|f(x)\|_F \leq \|f_n(x)\|_F + \|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \|f_n\|_\infty + \|f_n - f\|_\infty$$

Donc f est bornée sur A. □

Question 2.

Cela est-il vrai dans le cas de la convergence simple ?

Réponse : Non ! Considérons la fonction $f : x \mapsto x$ et la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par :

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} f(x) = x & \text{si } x \in [-n, n] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un suite de fonctions bornées sur $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers f qui n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.
(Et bien-sur, il ne peut y avoir convergence uniforme vers f sur $\mathbb{R}$ en vertu de la proposition précédente !)

Proposition 5.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions bornées sur A. Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément si, et seulement si, (f_n) converge dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{F}_b(A, F), \|\cdot\|_\infty)$.

Démonstration.

Il s'agit simplement de deux formulations différentes de la même propriété. □

Exercice 6.

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $g : x \mapsto \dfrac{x}{1 + 27x^4}$

1. Calculer $\|g\|_\infty$.
2. On considère la suite de terme générale $f_n : x \mapsto g(nx)$. Étudier les convergences simple et uniforme de cette suite.

Correction.

1. La fonction g est une fonction impaire et dérivable sur $\mathbb{R}$. On effectue son étude sur $\mathbb{R}_+$. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$g'(x) = \frac{(1 + 27x^4) - 108x^4}{(1 + 27x^4)^2} = \frac{1 - 81x^4}{(1 + 27x^4)^2},$$

x	0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

Par suite, comme g est impaire, on a :

$$\|g\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} |g(x)| = \frac{1}{4}.$$

2. — <u>CVS sur $\mathbb{R}$.</u> Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f_n(x) = g(nx) = \frac{nx}{1+27n^4x^4} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0, \end{cases}$$

car pour $x \neq 0$, $\dfrac{nx}{1+27n^4x^4} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{27n^3x^3}$.

Par suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f : x \mapsto 0$ sur $\mathbb{R}$.

— <u>CVS sur $\mathbb{R}$.</u> Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $\varphi : x \mapsto nx$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donc :

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |g(nx)| = \sup_{y\in\mathbb{R}} |g(y)| = \frac{1}{4} \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0.$$

Par suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de fonctions à valeurs réelles **bornées** qui convergent uniformément vers f et g respectivement. Est-ce que $(f_ng_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément ?

Correction.

Cette fois-ci, l'hypothèse "bornées" permet de conclure par l'affirmative.
En effet, d'après la proposition précédente, f et g sont bornées sur A. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in A$, on a :

$$\begin{aligned}
|(f_ng_n - fg)(x)| &= |f_n(x)g_n(x) - f(x)g_n(x) + f(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \\
&\leq |f_n(x)g_n(x) - f(x)g_n(x)| + |f(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \\
&\leq |g_n(x)|.|f_n(x) - f(x)| + |f(x)|.|g_n(x) - g(x)| \\
&\leq |g_n(x)|.|f_n(x) - f(x)| + |f(x)|.|g_n(x) - g(x)| \\
&\leq \|g_n\|_\infty \|f_n - f\|_\infty + \|f\|_\infty \|g_n - g\|_\infty
\end{aligned}$$

Donc $f_n g_n - fg$ est bornée et on remarque que, par convergence uniforme de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers g, on a :

$$\|g_n\|_\infty = \|g_n - g + g\|_\infty \leq \|g_n - g\|_\infty + \|g\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|g\|_\infty.$$

Ainsi, on a :

$$\|f_n g_n - fg\|_\infty \leq \|g_n\|_\infty \|f_n - f\|_\infty + \|f\|_\infty \|g_n - g\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|g\|_\infty \times 0 + \|f\|_\infty \times 0 = 0.$$

Donc $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers fg.

c. Convergence uniforme sur une partie

Définition 4. *Convergence uniforme sur une partie*

Soit $B \subset A$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans $\mathbb{R}$. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément sur** $B \subset A$ si, pour $(f_{n|_B})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur B.

Exemple 4.

Pour tout $a > 0$, la suite de fonctions de terme général $f_n : t \mapsto \frac{1}{1+nt}$ converge uniformément sur $[a, +\infty[\subset \mathbb{R}_+^*$.

On remarque tout d'abord que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$. En effet, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f : x \mapsto 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ mais on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}}\left(\frac{1}{1+nt}\right) = 1 \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0,$$

car f_n est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim_{t\to 0} \dfrac{1}{1+nt} = 1$.
Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.
Remarque : on aurait aussi pu utiliser le fait que, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\|f_n - f\|_\infty = \|f_n\|_\infty \geq f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1+n\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0.$$

Soit $a > 0$. Étudions la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, pour tout $x \in [a, +\infty[$,

$$|f_n(t) - f(t)| = \frac{1}{1+nt} \leq \frac{1}{1+na}.$$

Ainsi, les $f_n - f$ sont bornés sur $[a, +\infty[$ et :

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{1+na} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Il en résulte que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a, +\infty[$.

Exercice 8.

Étudier la convergence uniforme de la suite de terme général $f_n : x \mapsto e^{-nx}\sin(nx)$ sur $\mathbb{R}_+$ puis sur les intervalles de la forme $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Correction.

— CVS sur $\mathbb{R}_+$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a :

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \text{ car } \sin(0) = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

car, pour $x > 0$, $e^{-nx} \xrightarrow[n\to]{} 0$ et $|\sin(nx)| \leq 1$.
Par suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f : x \mapsto 0$ sur $\mathbb{R}_+$.

— CVU sur $\mathbb{R}_+$. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \frac{1}{n}$. Alors, on a :

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = e^{-n\frac{1}{n}}\sin\left(n\frac{1}{n}\right) = e\sin(1).$$

Par suite,

$$\|f_n - f\|_\infty \geq e\sin(1) \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0.$$

Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

— Soit $a > 0$. CVU sur $[a, +\infty[$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [a, +\infty[$,

$$|f_n(x) - f(x)| = e^{-nx}|\sin(nx)| \leq e^{-na}.$$

Par suite,

$$\|f_n - f\|_\infty \leq e^{-na} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Il en résulte que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a, +\infty[$.

Définition 5. *Convergence uniforme sur tout segment*

Soit I un intervalle d'intérieur non vide et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément sur tout segment de** I si, pour tout segment $[a, b] \subset I$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$.

Exemple 5.

La suite de fonctions de terme général $f_n : t \mapsto t^n$ converge uniformément sur tout segment de $]-1, 1[$.

CVS sur $]-1, 1[$:
Soit $t \in]-1, 1[$. On étudie la nature de la suite $(t^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On a : $t^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $|t| < 1$ donc $(t^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
Ainsi la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f : x \mapsto 0$ sur $]-1, 1[$.

CVU sur $[-a, a]$ avec $a \in [0, 1[$:
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $f_n - f : t \mapsto t^n$ est bornée sur $[-a, a]$ car continue sur un segment et, comme $|a| < 1$:

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{t\in[-a,a]} |t^n| = a^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Par suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur tout intervalle de la forme $[-a, a]$ avec $a \in [0, 1[$.
Or, tout segment de $]-1, 1[$ est inclus dans un intervalle de la forme $[-a, a]$ avec $a \in [0, 1[$: en effet, si $[b, c] \subset]-1, 1[$, alors, pour $a = \max(|b|, |c|) \in [0, 1[$, on a $[b, c] \subset [-a, a]$; donc, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur tout segment de $]-1, 1[$.

Exercice 9.

Étudier la converge uniforme de la suite de terme général $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{n!}$ sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Correction.

On a déjà prouvé que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$ où $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{n!}$ pour $n \in \mathbb{N}$, converge simplement vers la fonction nulle - notée f ici - sur $\mathbb{R}$ et on a prouvé que cette suite ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$. Montrons qu'il y a tout de même convergence uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Soit $a > 0$.

CVU sur $[-a, a]$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [-a, a]$, on a :

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| = \frac{|x|^n}{n!} \leq \frac{a^n}{n!}$$

Donc la fonction $f_n - f$ est bornée sur $[-a, a]$ et on a :

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in[-a,a]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{a^n}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Il en résulte que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[-a, a]$ vers la fonction nulle.

Comme tout segment de $\mathbb{R}$ est inclus dans un intervalle de la forme $[-a, a]$ avec $a > 0$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

3. Convergence uniforme des séries de fonctions

a. Généralités

Définition 6.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de A dans F. On dit que $\sum f_n$ **converge uniformément sur** A si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles converge uniformément sur A.

Proposition 6.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de A dans F. Alors $\sum f_n$ converge uniformément sur A si, et seulement si, $\sum f_n$ converge simplement sur A et la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des restes de $\sum f_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur A.

Démonstration.

$\sum f_n = (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction S sur A si, et seulement si, $(R_n)_{n\in\mathbb{N}} = (S - S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction $S - S = 0$ sur A. □

Exemple 6.

La série de fonctions $\sum f_n$ de terme général $f_n : x \mapsto x^n$ converge uniformément vers $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ sur tout segment de $]-1, 1[$ mais ne converge pas uniformément sur $]-1, 1[$.

D'après l'exemple 2, $\sum f_n$ converge simplement sur $]-1,1[$ vers $S : x \mapsto \frac{1}{1-x}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

<u>CVU sur $[-a,a]$ avec $a \in [0,1[$:</u>

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [-a,a]$, on a $|x^{n+1}| \leq a^{n+1}$ et $1-x \geq 1-a$ donc $|R_n(x)| \leq \frac{a^{n+1}}{1-a}$.
Par suite, la fonction R_n est bornée sur $[-a,a]$ et on a, comme $|a| < 1$:

$$\|R_n\|_\infty \leq \frac{a^{n+1}}{1-a} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Il en résulte que $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[-a,a]$ vers la fonction nulle et donc $\sum f_n$ converge uniformément sur $[-a,a]$ vers S.
De plus, tout segment de $]-1,1[$ étant inclus dans un intervalle de la forme $[-a,a]$ avec $a \in [0,1[$, la série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de $]-1,1[$ vers S.

<u>CVU sur $]-1,1[$:</u>

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x} \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty,$$

d'où la fonction R_n n'est pas bornée sur $]-1,1[$ et donc $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $]-1,1[$.
Il en résulte que la série $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $]-1,1[$.

Exercice 10.

1. Étudier la convergence uniforme de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n+1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la convergence uniforme de la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ sur $\mathbb{R}$ puis sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Correction.

1. Tout d'abord étudions la convergence simple de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}$ où $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n+1+x^2}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

   <u>CVS sur $\mathbb{R}$.</u> Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{n+1+x^2}$.
   Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0 quen $n \to +\infty$ donc, d'après le critère des séries alternées, $\sum \frac{(-1)^n}{n+1+x^2}$ converge.

   Il en résulte que $\sum f_n$ converge simplement vers $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

   <u>CVU sur $\mathbb{R}$.</u> Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, comme la somme d'une série alternées convergente

est plus petite que son premier terme (en valeur absolue), on a :

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1+x^2} \right| \leq \frac{1}{n+2+x^2} \leq \frac{1}{n+2}$$

Donc la fonction R_n est bornée et :

$$\|R_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |R_n(x)| \leq \frac{1}{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par suite, $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ (vers f).

2. On a déjà prouvé que $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}$ où $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{n!}$ pour $n \in \mathbb{N}$, converge simplement vers exp sur $\mathbb{R}$ - et on a également montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$.

   Montrons que $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$ tout entier.

   <u>CVU sur $\mathbb{R}$.</u> Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \right|$$

   Si $x > 0$, on a $\mapsto \frac{x^k}{k!} > 0$ pour tout $k \geq n+1$. Ainsi, pour tout $x > 0$:

$$|R_n(x)| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

   Or la fonction $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$; en effet sa limite quand $x \to +\infty$ est $+\infty$, donc la fonction R_n n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.

   Il en résulte que $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

   Comme il n'y a pas convergence sur $\mathbb{R}$ et que le "problème" se situe en $+\infty$, on tente la convergence uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$.

   <u>CVU sur $[-a, a]$.</u> Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [-a, a]$, en faisant le changement d'indice $k' = k - (n+1)$ et en remarquant que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(k+n+1)! \geq k!(n+1)!$, on obtient :

$$|R_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{|x|^k}{k!} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|x|^k}{k!} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|} \leq \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} e^a$$

   Donc la fonction R_n est bornée et on a :

$$\|R_n\|_\infty = \sup_{x\in[-a,a]} |R_n(x)| \leq \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} e^a \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

   On aurait également pu majorer (et c'est même une égalité) $\|R_n\|_\infty$ par $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a^k}{k!}$ qui est le reste d'ordre n d'une série convergente et donc qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

   Par suite, $\sum f_n$ converge uniformément sur $[-a, a]$ (vers exp).

   Tout segment de $\mathbb{R}$ étant inclus dans un segment de la forme $[-a, a]$ avec $a > 0$, on a donc la convergence uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}$ de $\sum f_n$ vers exp.

b. Convergence normale des séries de fonctions

Définition 7. *Convergence normale*

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de A dans F. On dit que $\sum f_n$ **converge normalement sur** A si :

i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est bornée ; et

ii) la série $\sum \|f_n\|_\infty$ est convergente.

Exemple 7.

La série $\sum \dfrac{\cos(n^3 x)}{(n+1)^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

En effet, on a, pour $f_n : x \mapsto \dfrac{\cos(n^3 x)}{(n+1)^2}$:

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\left|\frac{\cos(n^3 x)}{(n+1)^2}\right|\right) \leq \frac{1}{(n+1)^2}$$

Or d'après le critère de Riemann, $\frac{1}{(n+1)^2}$ est le terme général d'une série convergente. Ainsi, $\sum f_n$ converge normalement.

Proposition 7.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de A dans F. Si $\sum f_n$ converge normalement sur A, alors $\sum f_n$ converge uniformément sur A.

Démonstration.

Si $\sum f_n$ converge normalement, alors les f_n sont bornés et $\sum \|f_n\|_\infty$ converge. La convergence de $\sum \|f_n\|_\infty$ revient à la convergence absolue de $\sum f_n$. Par suite, $\sum f_n$ converge dans $\mathcal{F}_b(A, F)$ vers f et donc $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur A. □

Remarque 2.

Attention, la réciproque est fausse : chercher parmi les exemples précédents une série de fonctions qui converge uniformément mais pas normalement.

On a ainsi, pour une **série** de fonctions, le diagramme suivant :

$$\textbf{CVN} \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \textbf{CVU} \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \textbf{CVS}$$

Proposition 8.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de A dans F. Si $\sum f_n$ converge normalement sur A, alors, pour tout $x \in A$, la série de vecteurs $\sum f_n(x)$ est absolument convergente, i.e. $\sum \|f_n(x)\|_F$ converge.

Démonstration.

Si $\sum f_n$ converge normalement, $\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in A} \|f_n(x)\|_F$ est le terme général d'une série convergente. Soit $x \in A$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\|f_n(x)\|_F \leq \|f_n\|_\infty,$$

par comparaison, la série à terme positifs $\sum \|f_n(x)\|_F$ est convergente i.e. $\sum f_n(x)$ est absolument convergente. □

Méthode : Montrer qu'une série de fonctions converge normalement

Pour montrer la convergence normale de $\sum f_n$, on cherche à obtenir une majoration de $\|f_n\|_\infty$ qui tende vers 0 i.e. une majoration **indépendante de** $x \in A$ du type (à partir d'un certain rang)

$$\|f_n(x)\|_F \leq u_n$$

telle que $\sum u_n$ est une série numérique convergente (**et** u_n **ne dépend pas de** $x \in A$ **!!!**).

Exercice 11.

1. Étudier la convergence normale/uniforme/simple de $\sum_{n\geq 1} \dfrac{e^{-nx}}{n^2}$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. Étudier la convergence normale/uniforme/simple de $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2+x^2}$ puis de $\sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{n^2+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Correction.

1. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \frac{e^{-nx}}{n^2}$. Commençons par la convergence normale :
   CVN sur $\mathbb{R}_+$ **:** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:
   $$|f_n(x)| = \frac{e^{-nx}}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$
   Donc f_n est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et l'inégalité précédente étant une égalité pour $x = 0$, on a
   $$\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n^2}$$
   Or $\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série convergente d'après le critère de Riemann $(2 > 1)$; par suite, $\sum \|f_n\|_\infty$ converge et donc $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.
   Comme pour une série de fonctions, CVN $\Rightarrow$ CVU $\Rightarrow$ CVS, la série $\sum f_n$ converge uniformément et simplement sur $\mathbb{R}_+$.

2. • On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^2+x^2}$ qui est bien définie sur $\mathbb{R}$.
CVN sur $\mathbb{R}$: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|f_n(x)| = \frac{1}{n^2+x^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Donc f_n est bornée sur $\mathbb{R}$ et l'inégalité précédente étant une égalité pour $x = 0$, on a :

$$\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n^2}$$

Or $\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série convergente d'après le critère de Riemann $(2 > 1)$; par suite, $\sum \|f_n\|_\infty$ converge et donc $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
Comme pour une série de fonctions, CVN $\Rightarrow$ CVU $\Rightarrow$ CVS, la série $\sum f_n$ converge uniformément et simplement sur $\mathbb{R}$.

• On garde les mêmes notations que précédemment et on pose $f_0 : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ qui est définie sur $\mathbb{R}^*$. On ne peut donc plus étudier les convergences sur $\mathbb{R}$ de $\sum_{n\geq 0} f_n$ du fait que f_0 n'est pas définie en 0 ! On doit donc faire notre étude sur les intervalles $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$. Les f_n étant tous des fonctions paires, on peut restreindre l'étude à $\mathbb{R}_+^*$.
CVN sur $\mathbb{R}_+^*$: Soit $n \in \mathbb{N}$. On remarque que f_0 n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+^*$ car $f_0(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$ donc sa norme infinie n'est pas définie et donc l'étude de la convergence normale n'est pas possible même si cela semblait de prime abord être exactement comme le cas précédent.
Il n'y a donc pas convergence normale sur $\mathbb{R}_+^*$ à cause d'un "détail" mais on se doute que la convergence uniforme va sûrement fonctionner puisque dans les restes, f_0 n'apparaîtra pas !

CVS sur $\mathbb{R}_+^*$: Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On étudie la nature de $\sum f_n(x)$.
On a $f_n(x) = \frac{1}{n^2+x^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ et $\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série convergente (critère de Riemann avec $2 > 1$), donc $\sum f_n(x)$ converge, et ce, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
Ainsi, $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.
CVU sur $\mathbb{R}_+^*$: Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$|R_n(x)| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = r_n$$

Or la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge donc la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de ses restes converge vers 0. Ainsi, R_n est une fonction bornée et on a :

$$\|R_n\|_\infty \leq r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par suite, $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$ (et donc également sur $\mathbb{R}_-^*$).

Exercice 12. *Fonction Zêta de Riemann*

La fonction ζ de Riemann est définie, pour $s \in]1, +\infty[$ par :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Justifier la définition de la fonction ζ sur $]1, +\infty[$ en étudiant la convergence simple de la série de fonctions. Que dire de la convergence uniforme de la série vers la fonction ζ ?

Correction.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : s \mapsto \frac{1}{n^s}$ qui est bien définie sur $\mathbb{R}$.

- Déterminons le domaine de la fonction ζ. On remarque que $\zeta(s)$ existe si, et seulement si, la série numérique $\sum f_n(s)$ est convergente. On se ramène donc à trouver le plus grand intervalle sur lequel la série de fonction $\sum f_n$ converge simplement.

  CVS sur $\mathbb{R}$: Soit $s \in \mathbb{R}$. On a, d'après le critère de Riemann,
  $f_n(s) = \frac{1}{n^s}$ est le terme général d'une série convergente si, et seulement si, $s > 1$.
  Ainsi, la série $\sum f_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$ et ne converge pas simplement sur $]-\infty, 1]$.

  Il en résulte que le domaine de définition de ζ est $]1, +\infty[$.

  > **Remarque :** En prenant s complexe, on peut, de la même manière que précédemment, montrer que ζ est bien définie sur $\mathrm{DP} = \{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > 1\}$. On montrera dans la suite que ζ est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$ et de manière similaire, on peut montrer que ζ est *holomorphe* (une généralisation de la dérivabilité réelle pour les complexes) sur DP.
  > Par des méthodes que nous ne détaillerons pas ici, on peut montrer que la fonction ζ peut être prolongée de manière *analytique* (nous parlerons de cela quand nous aborderons les développements en séries entières) et donc en particulier, ζ admet un prologement continu sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.
  > Ce prolongement (dont on peut prouver qu'il est unique) donne la valeur :
  >
  > $$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$$
  >
  > d'où la célèbre confusion : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n = -\frac{1}{12}$!
  >
  > Mais il ne faut pas s'y méprendre ! Comme nous l'avons définie, la série à termes positifs $\sum n$ diverge et donc tend vers $+\infty$. La formule $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ de la fonction ζ n'est plus valable dans le sens "somme de série numérique" pour les complexes s en dehors de DP et il faut utiliser une autre formule - une de celles qui permettent de définir le prolongement - pour obtenir la valeur de $\zeta(s)$.

- On essaye la convergence normale dans un premier temps :

  CVN sur $]1, +\infty[$: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

  $$\|f_n\|_\infty = \sup_{s \in]1, +\infty[} \left(\frac{1}{n^s}\right) = \frac{1}{n}$$

qui le terme général d'une série divergente, donc il n'y a pas convergence normale sur $]1,+\infty[$.
On voit que le problème se situe en 1 puisque le "$\frac{1}{n}$" est atteint en $s=1$. On tente donc d'isoler ce problème :
soit $a>1$.

CVN sur $[a,+\infty[$ **:** Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a :

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{s\in[a,+\infty[}\left(\frac{1}{n^s}\right) = \frac{1}{n^a}$$

qui est le terme général d'une série convergente d'après le critère de Riemann car $a>1$.
Ainsi, $\sum f_n$ converge normalement et donc uniformément vers ζ sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$ pour $a>1$. Nous verrons dans la partie suivante que cela nous satisfait amplement pour en déduire la continuité de ζ sur $]1,+\infty[$.

Mais pour répondre à la question initiale, il nous reste à étudier la convergence uniforme sur $]1,+\infty[$:

CVU sur $]1,+\infty[$ **:** Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a, pour tout $s>1$:

$$|R_n(s)| = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^s}.$$

Or, par une comparaison série-intégrale que nous avons effectuée au chapitre précédent, on a :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^s} \geq \int_{n+1}^{+\infty}\frac{1}{t^s}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{s-1}\frac{1}{(n+1)^{s-1}} \xrightarrow[s\to 1^+]{} +\infty\times 1 = +\infty$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes, $|R_n(s)| \xrightarrow[s\to 1^+]{} +\infty$ et ainsi, R_n n'est pas bornée sur $]1,+\infty[$.
Ainsi, $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $]1,+\infty[$.

Partie B

Convergence uniforme : continuité, limites, intégration et dérivation

1. Continuité

Proposition 9.

Soit $a \in A$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions et f une fonction de A dans F. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a, alors f est continue en a.

Démonstration.

Pour tout $x \in A$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\|f(x) - f(a)\|_F \leq \|f(x) - f_n(x)\|_F + \|f_n(x) - f_n(a)\|_F + \|f_n(a) - f(a)\|_F.$$

Soit $\varepsilon > 0$.

- Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in A$ et pour tout $n \geq N$:

$$\|f(x) - f_n(x)\|_F \leq \|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

  et c'est donc en particulier vrai pour $x = a$ également :

$$\|f(a) - f_n(a)\|_F \leq \|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

- Soit $n \geq N$. Comme f_n est continue en a, alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in A$ avec $\|x - a\|_E \leq \delta$:

$$\|f_n(x) - f_n(a)\|_F \leq \|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ainsi, en choisissant $n \geq N$, on exhibe un δ tel que pour tout $x \in A$ avec $\|x - a\|_E \leq \delta$,

$$\|f(x) - f(a)\|_F \leq \underbrace{\|f(x) - f_n(x)\|_F}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\|f_n(x) - f_n(a)\|_F}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\|f_n(a) - f(a)\|_F}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} \leq \varepsilon.$$

Par suite, f est continue en a. □

Corollaire 1.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions et f une fonction de A dans F. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur A, alors f est continue sur

A.

Démonstration.

Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur A, alors, pour tout $a \in A$, f_n est continue sur A et donc, d'après la proposition précédente, f est continue en a. Il en résulte que f est continue sur A. □

Proposition 10. *Cas particulier des séries*

Soit $a \in A$, $\sum f_n$ une série de fonctions et S une fonction de A dans F. Si la série $\sum f_n$ converge uniformément vers S sur A et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a (resp. sur A), alors S est continue en a (resp. sur A).

Démonstration.

On suppose que $\sum f_n = (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers S sur A et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a (resp. sur A). Alors, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers S sur A et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ est continue en a (resp. sur A) comme somme (finie !) de fonctions continues en a (resp. sur A). Ainsi, d'après la proposition 9 (resp. le corollaire 1), S est continue en a (resp. sur A). □

Remarque 3.

- Ainsi, on peut, après avoir établi la convergence simple d'une suite/série de fonctions continues, conclure directement à la non convergence uniforme si la fonction limite n'est pas continue !
- Comme la convergence normale d'une série de fonctions implique la convergence uniforme, une série de fonctions continues qui converge normalement converge vers une fonction S continue.

Théorème 1.

Soit $a \in A$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions et f une fonction de A dans F. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur un voisinage de a et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a, alors f est continue en a.

Soit $a \in A$, $\sum f_n$ une série de fonctions et S une fonction de A dans F. Si la série $\sum f_n$ converge uniformément vers S sur un voisinage de a et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a, alors S est continue en a.

Démonstration.

On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur un voisinage V de a et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a. Alors d'après le corollaire 1, $f : V \to F$ est continue sur V. Comme V est un voisinage (relatif de A) de a, alors $f : A \to F$ est continue en a.

De même dans le cas particulier des séries en utilisant la proposition 10. □

Théorème 2. *Théorème de continuité des limites de suites/séries de fonctions*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions et f une fonction de A dans F. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f au voisinage de tout point de A et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur A, alors f est continue sur A.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions et S une fonction de A dans F. Si la série $\sum f_n$ converge uniformément vers S au voisinage de tout point de A et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur A, alors S est continue sur A.

Démonstration.

On applique le théorème précédent en tout point de A. □

Exemple 8.

La série de fonction $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$ vers $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

On pose $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{n!}$. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

CVN sur $[-a, a]$:

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[-a,a]} \left(\left|\frac{x^n}{n!}\right|\right) = \frac{a^n}{n!}.$$

Or, $\frac{a^n}{n!}$ est le terme général d'une série convergente (d'après la règle de D'Alembert par exemple) d'où $\sum f_n$ converge normalement sur $[-a, a]$ et donc uniformément sur $[-a, a]$ vers S et ce, pour tout $a > 0$.

De plus, tout segment de $\mathbb{R}$ est inclus dans intervalle de la forme $[-a, a]$ avec $a > 0$ donc $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$ vers S.

Ainsi, la fonction S est continue sur $\mathbb{R}$ car $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ converge uniformément au voisinage de tout point de $\mathbb{R}$.

En effet, chaque point x_0 de $\mathbb{R}$ est inclus dans un segment $[x_0 - 1, x_0 + 1]$ qui est un voisinage de x_0 dans $\mathbb{R}$.

Exercice 13.

1. Justifier que la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2+x^2}$ est bien définie sur $]0,+\infty[$ et qu'elle est continue sur cet intervalle.
2. Montrer que la fonction ζ de Riemann est continue sur $]1,+\infty[$.

Correction.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^2+x^2}$. On a montré dans l'exercice 11 que $\sum f_n$ converge simplement et uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Comme $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$, sa fonction limite $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

   De plus, $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$ vers S donc d'après le théorème de continuité des limites de séries de fonctions (Theorème 1), S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$. Montrons que $\zeta : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est définie et continue sur $]1,+\infty[$.

   — Domaine de définition de ζ.

   <u>CVS sur $\mathbb{R}$:</u>

   Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, d'après le critère de Riemann, $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$ est le terme général d'une série convergente si, et seulement si, $x > 1$.

   Ainsi, $\sum f_n$ converge simplement sur $]1,+\infty[$ d'où ζ est définie sur $]1,+\infty[$.

   — On applique le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions :

   - les f_n sont continues sur $]1,+\infty[$ car $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{n^x} = e^{-x\ln(n)}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
   - <u>CVU sur tout segment de $\mathbb{R}$:</u>

     Soit $a > 1$. On établit la Convergence Normale sur $[a,+\infty[$.

     Soit $n \in \mathbb{N}$. pour tout $x \in [a,+\infty[$,

     $$|f_n(x)| = \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^a}$$

     donc $\|f_n\|_\infty \leq \dfrac{1}{n^a}$ (c'est même une égalité) qui est le terme général d'une série convergente d'après le critère de Riemann.

     Ainsi, par comparaison, $\sum \|f_n\|_\infty$ converge. Il en résulte que, pour tout $a > 1$, $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$, et donc que $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de $]1,+\infty[$.

   Par suite, d'après le théorème de continuité de la somme d'une série de fonction, ζ est continue sur $]1,+\infty[$

Exercice 14. *Fonction continue et dérivable nulle part*

On considère la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que φ est 4-périodique sur $\mathbb{R}$ et définie, pour $x \in [-2, 2]$, par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 + x & \text{si } -2 < x < 0 \end{cases}$$

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \dfrac{\varphi(2^{2^n})x}{2^n}$.

1. Montrer que φ est bornée par 1 et 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est définie, 1-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.
3. Dans cette question, on cherche à démontrer que S n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_n \in \mathbb{Z}$ et $u_n \in \{-1, 1\}$ tels que $2^{2^n}x$ et $2^{2^n}x + u_n$ sont compris entre $2a_n$ et $2a_n + 2$.
   (b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On pose $h_N = \frac{u_N}{2^{2^N}}$.
      i. Calculer $f_n(x + h_N) - f_N(x)$ pour $n = N$ puis pour $n > N$.
      ii. Montrer que :
      $$|S_{N-1}(x + h_N) - S_{N-1}(x)| \leq \frac{1}{2^{2^{N-1}}}$$
      où S_n désigne la somme partielle d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de la série $\sum_{n\geq 1} f_n$.
   (c) Déduire de ce qui précède que S n'est pas dérivable en x puis conclure.

Correction.

1. On a $|1 \pm x| \leq 1$ pour tout $x \in [-2, 2]$, donc, par 4-périodicité de φ, φ est bornée par 1 sur $\mathbb{R}$. Montrons qu'elle est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x < y$. Distinguons plusieurs cas :
   * Si $|x - y| \geq 2$: comme φ est bornée par 1, on a :
   $$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq 2 \leq |x - y|.$$
   * Si $|x - y| < 2$: φ étant 4-périodique, on peut supposer sans perte de généralité que $x \in]-2, 2]$.
     — Si $x, y \in]-2, 0[$ ou $x, y \in [0, 2]$ alors, φ étant affine de coefficient drecteur ± 1 sur ces intervalles, on a $|\varphi(x) - \varphi(y)| = |x - y|$.
     — Sinon, si $x \in]-2, 0[$, alors $y \in [0, 2]$ d'où :
     $$|f(x) - f(y)| \leq \underbrace{|f(x) - f(0)|}_{=|1+x-1|} + \underbrace{|f(0) - f(y)|}_{|1-(1-y)|} = |x| + |y| = -x + y = |x - y|.$$
     — Sinon, si $x \in [0, 2]$, alors $y \in]2, 4[$ d'où :
     $$|f(x)-f(y)| \leq \underbrace{|f(x) - f(2)|}_{=|1-x+1|} + \underbrace{|f(2) - f(y)|}_{|-1-(1+(y-4))|} = |2-x|+|2-y| = 2-x+y-2 = |x-y|.$$

   Ainsi, dans tous les cas, $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq |x - y|$. D'où φ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
   Remarque : on aurait pu montrer le fait plus général suivant : si une fonction est continue, lipschitzienne

par morceaux sur $\mathbb{R}$ et telle que l'ensemble des constantes de Lispchitz sur les morceaux est majoré, alors cette fonction est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

2. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$.
   <u>CVN sur $\mathbb{R}$:</u>
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a, comme φ est bornée par 1 sur $\mathbb{R}$:
   $$|f_n(x)| = \frac{|\varphi(2^{2^n}x)|}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}.$$
   Ainsi, $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{2^n}$ qui est le terme général d'une série convergente car série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1,1[$.
   Par suite, par comparaison $\sum_{n\geq 1} \|f_n\|_\infty$ converge et donc $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
   Il en résulte que $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément et simplement sur $\mathbb{R}$ vesr S.
   De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de la fonctions continues $x \mapsto 2^{2^n}x$ et φ (continue car lipschitzienne), donc, d'après le théorème de continuité des sommes de séries de fonctions, S est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
   On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $2^n \geq 2$ d'où $2^{2^n} = 4q$ avec $q \in \mathbb{N}^*$ et donc, par 4-périodicité de φ :
   $$f_n(x+1) = \varphi(2^{2^n}(x+1)) = \varphi(2^{2^n}x + 2^{2^n}) = \varphi(2^{2^n}x) = f_n(x).$$
   Par suite, f_n est 1 périodique. Ainsi, comme S est la limite simple de la série $\sum_{n\geq 1} f_n$, S est 1 périodique sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $y = 2^{2^n}x$. Pour $a_n = \left\lfloor \frac{y}{2} \right\rfloor \in \mathbb{Z}$, on a $2a_n \leq y < 2a_n + 2$.
   — Si $2a_n \leq y < 2a_n + 1$, alors $2a_n \leq 2a_n + 1 \leq y + 1 < 2a_n + 2$, d'où, pour $u_n = 1$, $2^{2^n}x = y$ et $2^{2^n}x + u_n = y + 1$ sont compris entre $2a_n$ et $2a_n + 2$.
   — Si $2a_n + 1 \leq y < 2a_n + 2$, alors $2a_n \leq y - 1 < 2a_n + 1 < 2a_n + 2$, d'où, pour $u_n = -1$, $2^{2^n}x = y$ et $2^{2^n}x + u_n = y - 1$ sont compris entre $2a_n$ et $2a_n + 2$.
   (b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
   $$2^{2^n}h_N = 2^{2^n}\frac{u_N}{2^{2^N}} = 2^{2^n - 2^N}u_N.$$
   i. $*$ <u>pour $n = N$:</u>
   Si a_N est pair, alors $2^{2^N}x$ et $2^{2^N}x + u_N$ sont compris entre $4q$ et $4q+2$ où $a_N = 2q$;
   Si a_N est impair, alors $2^{2^N}x$ et $2^{2^N}x + u_N$ sont compris entre $4q-2$ et $4q$ où $a_N = 2q - 1$;
   donc, par 4-périodicité de φ, on a :
   $$\varphi(2^{2^N}x + u_N) - \varphi(2^{2^N}x)$$
   $$= \begin{cases} 1 - (2^{2^N}x + u_N - 4q) - (1 - (2^{2^N}x - 4q)) & \text{si } a_N \text{ pair} \\ 1 + (2^{2^N}x + u_N - 4q) - (1 + (2^{2^N}x - 4q)) & \text{si } a_N \text{ impair} \end{cases}$$
   $$\varphi(2^{2^N}x + u_N) - \varphi(2^{2^N}x) \quad = \quad u_N$$
   d'où :
   $$f_N(x + h_N) - f_N(x) = \frac{u_N}{2^N} = \pm\frac{1}{2^N}.$$

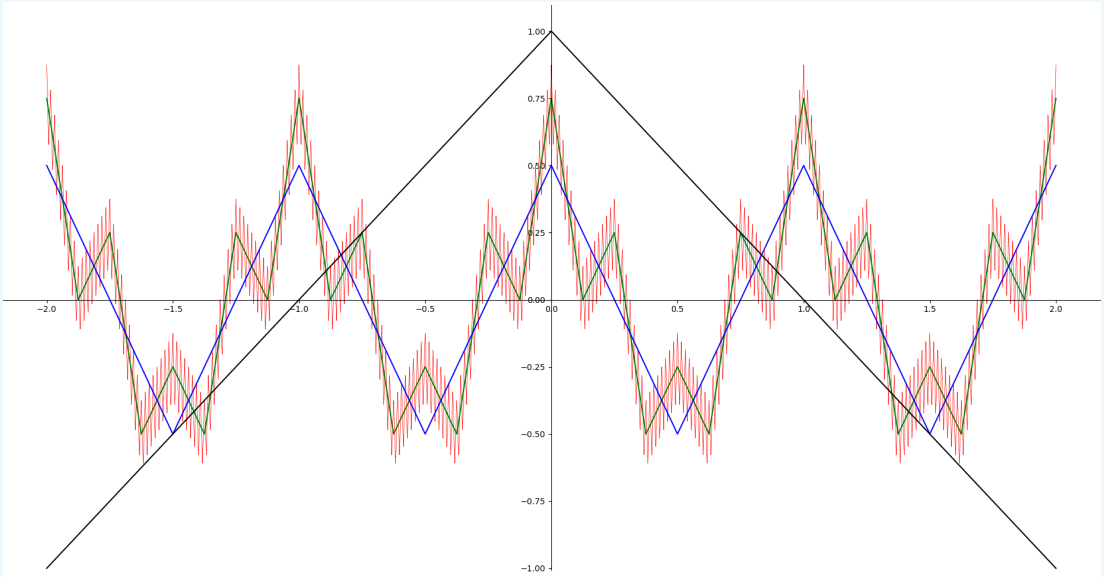
* <u>pour $n > N$:</u>
  On a $2^n - 2^N = 2^N(2^{n-N}) \geq 2$ car $N \in \mathbb{N}^*$ donc $q = 2^{2^n - 2^N - 2} u_N$ est un entier et on a :
  $$2^{2^n} h_N = 2^{2^n - 2^N} u_N = 4q.$$
  Par suite, par 4-périodicité de φ :
  $$f_n(x+h_N) - f_n(x) = \varphi(2^{2^n}x + 2^{2^n}h_N) - \varphi(2^{2^n}x) = \varphi(2^{2^n}x + 4q) - \varphi(2^{2^n}x) = 0.$$

ii. Comme φ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$|\varphi(2^{2^n}x + 2^{2^n}h_N) - \varphi(2^{2^n}x)| \leq 2^{2^n}|h_N| = 2^{2^n - 2^N}.$$
Par suite, si $n < N$, on a $2^n - 2^N \leq 2^{N-1} - 2^N = -2^{N-1}$, d'où
$$|\varphi(2^{2^n}x + 2^{2^n}h_N) - \varphi(2^{2^n}x)| \leq \frac{1}{2^{2^{N-1}}}.$$
Ainsi, on a :
$$\begin{aligned}
|S_{N-1}(x+h_N) - S_{N-1}(x)| &= \left|\sum_{n=1}^{N-1}(f_n(x+h_N) - f_n(x))\right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{N-1}|f_n(x+h_N) - f_n(x)| \\
&\leq \sum_{n=1}^{N-1}\frac{|\varphi(2^{2^n}x + 2^{2^n}h_N) - \varphi(2^{2^n}x)|}{2^n} \\
&\leq \frac{1}{2^{2^{N-1}}}\underbrace{\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{2^n}}_{=1-\frac{1}{2^{N-1}}\leq 1} \\
&\leq \frac{1}{2^{2^{N-1}}}.
\end{aligned}$$

(c) On a, d'après les deux précédentes questions, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:
$$\begin{aligned}
\left|\frac{S(x+h_N) - S(x)}{h_N}\right| &= \frac{1}{|h_N|}\left|\sum_{n=1}^{+\infty}(f_n(x+h_N) - f_n(x))\right| \\
&= 2^{2^N}\left|(S_{N-1}(x+h_N) - S_{N-1}(x)) \pm \frac{1}{2^N}\right| \\
&\geq 2^{2^N}(\frac{1}{2^N} - |S_{N-1}(x+h_N) - S_{N-1}(x)| \\
&\geq 2^{2^N}(\frac{1}{2^N} - \frac{1}{2^{2^{N-1}}}).
\end{aligned}$$
Ainsi, on a :
$$\left|\frac{S(x+h_N) - S(x)}{h_N}\right| \geq 2^{2^N}(\frac{1}{2^N} - \frac{1}{2^{2^{N-1}}}) = 2^{2^N - N}(1 - \frac{1}{2^{2^{N-1}-N}}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Or, on remarque que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, donc la quantité $\dfrac{S(x+h)-S(x)}{h}$ n'admet pas de limite finie quand h tend vers 0 i.e. S n'est pas dérivable en x.

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, S n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$ et est continue en tout point de $\mathbb{R}$!



Aperçu des fonctions : φ (en noir) ; S_1 (en bleu) ; S_2 (en vert) ; S_3 (en rouge).

2. Limites

a. Interversion de limites

Théorème 3. *Théorème de la double limite*

Soit $a \in \overline{A}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction f sur A. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\ell_n \in F$ tel que $f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_n$ alors :

i) il existe $\ell \in F$ tel que la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans F vers ℓ et,

ii) $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.

Autrement dit,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right).$$

Sous les mêmes hypothèses, le résultat est valable dans les cas suivants :

— $A \subset \mathbb{R}$ et $a = \pm\infty$;

— $F = \mathbb{R}$; à partir d'un certain rang, $\ell_n = \lim_{x\to a} f_n(x) = \pm\infty$; et $\ell = \pm\infty$.

Démonstration Hors programme.

Cette démonstration est hors programme car nous n'avons pas le bon cadre permettant de la démontrer "joliment" : il nous manque la notion d'espace métrique *complet*. En fait, l'énoncé reste vrai en supposant que F (l'espace d'arrivée des fonctions f_n et f) est un espace métrique complet. Dans notre cas, F est bien complet car c'est un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Un espace métrique est dit complet si toutes les suites à valeurs dans cet espace dont les termes se rapprochent uniformément en l'infini - on appelle cela une suite de Cauchy - convergent. De manière imagée, un espace complet est un ensemble dans lequel il n'y a pas d'élement "manquant", de "trou", métriquement parlant - penser à $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ munis de la distance associée à la valeur absolue : $\mathbb{Q}$ n'est pas complet et $\mathbb{R}$ l'est ; les trous dans $\mathbb{Q}$ sont les irrationnels. Par exemple, pour montrer la non-complétude de $\mathbb{Q}$, on peut considérer la suite $(\frac{\lfloor 10^n e \rfloor}{10^n})_{n\in\mathbb{N}}$ qui est une suite de Cauchy à valeurs dans $\mathbb{Q}$ mais qui ne converge pas dans $\mathbb{Q}$ car e est irrationnel (oui, e est irrationnel ! Exercice : prendre la suite (S_n) des sommes partielles de $\sum \frac{1}{n!}$ et la suite $(S_n + \frac{1}{n.n!})$; montrer qu'elles sont adjacentes - et donc de limite e puis en déduire que e est bien irrationnel).
Comme dit précédemment, $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet : pour le démontrer, il nous faudrait construire proprement l'ensemble des réels, ce qui est complètement hors programme. Selon la construction effectuée (avec des suites de Cauchy justement ou les coupures de Dedekind par exemple), la complétude ne s'obtient pas de la même manière.
Pour démontrer notre énoncé tout en restant dans le programme, nous allons "tricher" un peu, en laissant sous silence la construction de $\mathbb{R}$, et en nous inspirant d'une façon de montrer la complétude de $\mathbb{R}$, sans en parler bien-sûr !

Allons-y :
Soit $a \in \overline{A}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction f sur A telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\ell_n \in F$ tel que $f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_n$.

i) Montrons que la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geq N$, $\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p, q \geq N$ et pour tout $x \in A$, on a :
$$\|f_p(x) - f_q(x)\|_F \leq \|f_p(x) - f(x)\|_F + \|f_q(x) - f(x)\|_F \leq \|f_p - f\|_\infty + \|f_q - f\|_\infty \leq \varepsilon.$$
Par suite, en passant à la limite quand x tend vers a, l'application $u \mapsto \|u\|_F$ étant continue sur F, on obtient :
$$\|\ell_p - \ell_q\|_F \leq \varepsilon.$$
C'est ici que nous devons nous compliquer la vie : avec l'hypothèse F complet, nous aurions pu conclure directement que la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge car nous venons de prouver qu'il s'agit d'une suite de Cauchy. Rusons pour nous en sortir dans le cadre du programme :
pour tout $n \geq N$, on a $\|\ell_n\|_F \leq \|\ell_n - \ell_N\|_F + \|\ell_N\|_F \leq \varepsilon + \|\ell_N\|_F$, donc la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée à partir du rang N et donc est bornée tout court !
Comme F est un espace vectoriel normé de dimension finie (sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), le théorème de Bolzano-Weierstrass s'applique à la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$: il existe une sous-suite $(\ell_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un certain $\ell \in F$.
Soit $\varepsilon' > 0$. On pose $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2} > 0$.
Comme $(\ell_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, il existe un rang $M \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq M$, $\|\ell_{\varphi(n)} - \ell\|_F \leq \varepsilon$ et en reprenant le calcul initial, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $p, q \geq N$, $\|\ell_p - \ell_q\|_F \leq \varepsilon$.
On pose $N' = \max(N, M) \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \geq N'$, on a $\varphi(n) \geq n \geq N$, d'où :
$$\|\ell_n - \ell\|_F \leq \|\ell_n - \ell_{\varphi(n)}\|_F + \|\ell_{\varphi(n)} - \ell\|_F \leq 2\varepsilon = \varepsilon'.$$

Par suite, $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

ii) Notons ℓ la limite de la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et montrons que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$. Soit $\varepsilon > 0$.

— Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A, il existe un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geq N_1$, $\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}$;

— comme $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, il existe un rang $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geq N_2$, $\|\ell_n - \ell\|_F \leq \frac{\varepsilon}{3}$;

— pour $N = \max(N_1, N_2)$, comme $f_N(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_N$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in A$, $\|x - a\|_E \leq \delta \Rightarrow \|f_N(x)\ell_N\|_F \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Par suite, pour tout $x \in A$ tel que $\|x - a\|_E \leq \delta$, on a :

$$\|f(x) - \ell\|_F \leq \underbrace{\|f(x) - f_N(x)\|_F}_{\leq \|f_N - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\|f_N(x) - \ell_N\|_F}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\|\ell_N - \ell\|_F}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} \leq \varepsilon.$$

Ainsi, $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.

□

b. Cas des séries

Théorème 4. *Inversion limite/somme*

Soit $a \in \overline{A}$ et $\sum f_n$ une série de fonctions qui converge uniformément sur A. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\ell_n \in F$ tel que $f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_n$ alors la série $\sum \ell_n$ converge et on a :

$$\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right).$$

Sous les mêmes hypothèses, le résultat est valable dans les cas où $A \subset \mathbb{R}$ et $a = \pm\infty$.

Exercice 15.

1. Justifier l'existence et déterminer $\lim_{s\to+\infty} \zeta(s)$.
2. Justifier l'existence et déterminer $\lim_{x\to 0^+} x \sum_{n=0} \dfrac{1}{n^2 + x}$.

3. Intégration

Dans ce paragraphe, les fonctions considérées sont définies sur un intervalle d'intérieur non vide I de $\mathbb{R}$ et sont à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; de plus, a, b sont des éléments de I tels que $a < b$.

a. Intégration sur un segment

On rappelle la notation suivante :

Notation 2. *Norme de la convergence en moyenne*

Soit $C([a,b],\mathbb{K})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$. On note $\|\cdot\|_1$ la **norme de la convergence en moyenne** sur $C([a,b],\mathbb{K})$ i.e. pour $f \in C([a,b],\mathbb{K})$:

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 11.

Soit (f_n) une suite de fonctions continues et f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne vers f i.e. $\|f_n - f\|_1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration.

On a :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_a^b (f_n(t) - f(t))\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\,\mathrm{d}t \\ &= \|f_n - f\|_1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.\end{aligned}$$

□

Lemme 1.

Sur $C([a,b],\mathbb{K})$, la norme de la convergence en moyenne est dominée par la norme de la convergence uniforme ; plus précisément, on a, pour tout $f \in C([a,b],\mathbb{K})$:

$$\|f\|_1 \leq (b-a)\|f\|_\infty.$$

Démonstration.

Soit $f \in C([a,b],\mathbb{K})$. On a :

$$\int_a^b \underbrace{|f(t)|}_{\leq \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|}\,\mathrm{d}t \leq \|f\|_\infty \int_a^b \mathrm{d}t = (b-a)\|f\|_\infty.$$

□

Théorème 5. *Interversion limite/intégrale*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues et f une fonction de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$ alors $f \in C([a,b],\mathbb{K})$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration.

On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$. Alors, comme les (f_n) sont continues sur $[a,b]$, alors f est continue sur $[a,b]$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n - f \in C([a,b],\mathbb{K})$ et on a, d'après le lemme précédent :

$$\|f_n - f\|_1 \leq (b-a)\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Donc (f_n) converge en moyenne vers f. Par suite, d'après la proposition précédente, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

□

Exercice 16.

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 n\sin^n(x)\,\mathrm{d}x$.

Correction.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto n\sin^n(x)$ qui est continue sur $[0,1]$. Étudions la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

CVS sur $[0,1]$:

Soit $x \in [0,1]$. Étudions la nature de $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.
Comme $[0,1] \subset [0,\frac{\pi}{2}[$, on a $0 \leq \sin(x) < 1$ donc, par croissances comparées :

$$f_n(x) = n\sin^n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction nulle.

CVU sur $[0,1]$:

On a, par positivité et croissance de la fonction $\sin^n$ sur $[0,1]$:

$$\|f_n - f\|_\infty = n\sin^n(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction nulle.

Ainsi, d'après le théorème d'interversion limite/intégrale, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 n\sin^n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} n\sin^n(x)\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 0\,\mathrm{d}x = 0.$$

b. Intégration des séries de fonctions

Théorème 6. *Interversion intégrale/somme*

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$. Si $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers sa somme S, alors on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^b S(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration.

On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sum f_n$. Comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a,b]$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ est continue sur $[a,b]$ comme somme de fonctions continues sur $[a,b]$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers S. Ainsi, on obtient le résultat en appliquant le théorème d'interversion limite/intégrale (Théorème 5) à la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Exercice 17.

Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ est définie et continue sur $[0,\pi]$, puis démontrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{7}{4}\zeta(3)$.

c. Primitives

Théorème 7.

Soit $a \in I$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues et f une fonction de I dans $\mathbb{K}$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout segment de I, alors pour tout $x \in I$:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Soit $a \in I$ et $\sum f_n$ une série de fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$. Si $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers sa somme S, alors on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^x S(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration.

On applique le théorème 5 sur le segment $[a,x]$. □

Exercice 18.

Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

Correction.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto x^n$ qui est une fonction continue sur $]-1,1[$. De plus, d'après l'exemple 6 la série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de $]-1,1[$ vers la fonction $S : x \mapsto \frac{1}{1-x}$.
Ainsi, d'après le théorème 7, pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$-\ln(1-x) = \int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x t^n\,\mathrm{d}t \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

4. Dérivation

Dans ce paragraphe, les fonctions considérées sont définies sur un intervalle d'intérieur non vide I de $\mathbb{R}$ et sont à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; de plus, a, b sont des éléments de I tels que $a < b$.

a. Dérivation des suites de fonctions

Théorème 8. *Interversion dérivation/limite*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe C^1 sur I et f, g des fonctions de I dans $\mathbb{K}$. Si

i) la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I et ;

ii) la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur tout segment de I.

Alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout segment de I et la fonction f est de classe C^1 sur I où on a :

$$f' = \left(\lim_{n\to+\infty} f_n \right)' = g = \lim_{n\to+\infty} f'_n.$$

Démonstration.

En fait, on peut affaiblir les hypothèses du théorème sans changer sa conclusion : le résultat reste valide si on remplace i) par : "il existe $a \in I$ et $\ell \in \mathbb{K}$ tel que $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ" et en posant $f : x \mapsto \int_a^x g(x)\,\mathrm{d}t + \ell$. Montrons le :

Tout d'abord, remarquons que la fonction g est continue sur I d'après le théorème de continuité des limites de suites de fonctions car les f'_n sont continues sur I et la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge sur tout segment de I vers la fonction g.
Ainsi, la fonction $f : x \mapsto \int_a^x g(x)\,\mathrm{d}t + \ell$ est définie sur I et de classe C^1 sur I comme primitive sur I de la fonction g continue sur I.
Comme les f_n sont C^1 sur I, les f'_n sont continues sur I et d'après ii), la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge sur tout segment de I vers la fonction g. Ainsi, d'après le théorème 7, pour $x \in I$, la suite

$\left(\int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et on a :

$$f(x)-\ell=\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{n\to+\infty}\int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I, $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et de plus, on a, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$f_n(x)=\int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t+f_n(a).$$

Ainsi, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge comme combinaison linéaire de suite convergente et on a :

$$f_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)+\ell-\ell=f(x).$$

Il en résulte que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I et on a :

$$\left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)'=f'=g=\lim_{n\to+\infty} f_n'.$$

Il reste à montrer que la convergence est uniforme sur tout segment de I :
Soit S un segment de I de longueur s et contenant a. Pour tout $x\in S$, on a :

$$\begin{aligned}
|f_n(x)-f(x)| &= \left|\int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t+f_n(a)-\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t-\ell\right)\right| \\
&= \left|\int_a^x (f_n'(t)-g(t))\,\mathrm{d}t+f_n(a)-\ell\right| \\
&\leq \int_{\min(a,x)}^{\max(a,x)} \underbrace{|f_n'(t)-g(t)|}_{\leq\|f_n'-g\|_{\infty,S}}\,\mathrm{d}t+|f_n(a)-\ell| \\
&\leq |x-a|\,\|f_n'-g\|_{\infty,S}+|f_n(a)-\ell| \\
&\leq s\|f_n'-g\|_{\infty,S}+|f_n(a)-\ell|.
\end{aligned}$$

Par suite, f_n-f est bornée sur S (mais on le savait déjà car f_n-f est continue sur le segment S) et on a, par convergence uniforme sur S de $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ vers g et par convergence de $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ :

$$\|f_n-f\|_{\infty,S}\leq s\|f_n'-g\|_{\infty,S}+|f_n(a)-\ell|\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I contenant a vers f. Or, tout segment de I est inclus dans un segment de I contenant a, donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers f. □

Remarque 4.

Dans la conclusion, on ne peut pas espérer mieux que la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur tout segment de I, et ce, même si on a convergence uniforme de $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ sur I tout entier vers g. En effet, pour $f_n : x\mapsto (x+\frac{1}{n})^2$, on a $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $g : x\mapsto 2x$

mais $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers $f : x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$ tout entier (mais converge bien sûr uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$) !

Corollaire 2. *Cas des fonctions de classe C^k*

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ de classe C^k sur I. Si

i) pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$, la suite $(f_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I et ;

ii) la suite $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I.

Alors la limite simple f de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de classe C^k sur I et, pour tout $k \in [\![0, k]\!]$, on a $f^{(k)} = \lim_{n\to+\infty} f_n^{(k)}$.

b. Dérivation des séries de fonctions

Théorème 9. *Interversion dérivation/somme*

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ de classe C^1 sur I. Si

i) la série $\sum f_n$ converge simplement vers sa somme S sur I et ;

ii) la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de I.

Alors la série $\sum f_n$ converge uniformément vers S sur tout segment de I et la fonction S est de classe C^1 sur I où on a :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = S' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'.$$

Exemple 9.

La série de fonctions $\sum f_n$ de terme général $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{n!}$ est C^1 de somme S sur $\mathbb{R}$ et on a $S' = S$ et ainsi $S = \exp$ car $S(0) = 1$.

On applique le théorème précédent :

- les f_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ car ce sont des fonctions polynomiales et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f_n'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } n > 0. \end{cases}$$
- <u>CVS sur $\mathbb{R}$:</u> Soit $x \in \mathbb{R}$. En appliquant la règle de D'Alembert, on montre que $\dfrac{x^n}{n!}$ est le terme général d'une série numérique absolument convergente et donc convergente.
Ainsi, $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
- <u>CVU sur tout segment de $\mathbb{R}$ de la série des dérivées :</u>
Soit $a > 0$. On établit la Convergence Normale sur $[-a, a]$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $f_0' = 0$ et pour tout $x \in [-a, a]$,
$$|f_n'(x)| = \frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!} \leq \frac{a^{n-1}}{(n-1)!}$$
donc $\|f_n'\|_\infty \leq \dfrac{a^{n-1}}{(n-1)!}$ (c'est même une égalité) qui est le terme général d'une série convergente d'après, par exemple, la règle de d'Alembert.
Ainsi, par comparaison, $\sum \|f_n'\|_\infty$ converge. Il en résulte que, pour tout $a > 0$, $\sum f_n'$ converge normalement sur $[-a, a]$, et donc que $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Par suite, d'après le théorème d'interversion dérivation/somme, S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$S'(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dx} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = S(x).$$

Remarque : Ainsi, comme $S(0) = 1$, S est solution du problème de Cauchy :
$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$
dont l'unique solution est la fonction $x \mapsto e^x$.
On a donc montré l'égalité qu'il faut *absolument* connaître :
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Corollaire 3. *Cas des séries de fonctions de classe C^k*

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ de classe C^k sur I. Si

i) pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$, la série $\sum f_n^{(i)}$ converge simplement vers f sur I et ;

ii) la série $\sum f^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I.

Alors la somme S de la série $\sum f_n$ est de classe C^k sur I et, pour tout $i \in [\![0, k]\!]$, on a

$$S^{(i)} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(i)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(i)}.$$

c. Suites et séries de fonctions de classe C^∞

Théorème 10. *Cas des fonctions de classe C^∞*

- **Théorème d'interversion dérivation /limite**

  Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ de classe C^∞ sur I. Si,
  i) la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I, et
  ii) pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la suite $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I,
  alors la limite simple f de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de classe C^∞ sur I et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $f^{(k)} = (\lim_{n\to+\infty} f_n)^{(k)} = \lim_{n\to+\infty} f_n^{(k)}$.

- **Théorème d'interversion dérivation /somme**

  Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ de classe C^∞ sur I. Si,
  i) la série $\sum f_n$ converge simplement sur I, et
  ii) pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I,
  alors la somme S de la série $\sum f_n$ est de classe C^∞ sur I et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$S^{(k)} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}.$$

Exemple 10.

La série de fonctions $\sum f_n$ de terme général $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{n!}$ est C^∞ de somme S sur $\mathbb{R}$ et on pour tout $k \in \mathbb{N}$, $S^{(k)} = S$.

Exercice 19.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ de terme général $f_n : x \mapsto x^n$ est C^∞ sur $]-1, 1[$. Pour $k \in \mathbb{N}$, en déduire une expression, pour tout $x \in]-1, 1[$, de :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{k+n}{k} x^n.$$
2. Montrer que la fonction ζ est C^∞ sur $]1, +\infty[$ et pour $k \in \mathbb{N}$ déterminer $\zeta^{(k)}$.
3. Montrer que la fonction $\varphi : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{e^{-nx}}{n^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que f est croissante et déterminer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$. En déduire que f n'est pas dérivable en 0.

Correction.

2. Montrons que $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$ est de classe C^∞ sur $]1,+\infty[$. Pour cela, on vérifie les hypothèses du théorème d'interversion dérivation/somme (version C^∞) :

   i) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$ est de classe C^∞ sur $]1,+\infty[$;

   ii) pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de $]1,+\infty[$.

   i) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a, pour $x \in]1,+\infty[$, $f_n(x) = \frac{1}{n^x} = e^{-x\ln(n)}$. Ainsi, f_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme composée de la fonction exp et $x \mapsto -x\ln(n)$ qui sont C^∞ sur $\mathbb{R}$. Ainsi, en particulier, f_n est de classe C^∞ sur $]1,+\infty[$ et on a, pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in]1,+\infty[$:

$$f_n^{(k)} = (-1)^k \ln(n)^k e^{-x\ln(n)} = \frac{(-1)^k \ln(n)^k}{n^x}.$$

   ii) Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $a > 1$. On étudie la convergence normale de $\sum f_n^{(k)}$ sur $[a,+\infty[$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\|f_n^{(k)}\|_\infty = \sup_{x\in[a,+\infty[} \left|\frac{(-1)^k \ln(n)^k}{n^x}\right| \leq \frac{\ln(n)^k}{n^a}.$$

   — Pour $k = 0$, $\dfrac{\ln(n)^k}{n^a} = \dfrac{1}{n^a}$ est le terme général d'une série convergente d'après le critère de Riemann car $a > 1$. Ainsi, $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$.

   — Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $\beta > 0$, $\ln(n) = o(n^\beta)$; ainsi, pour $\beta = \dfrac{a-1}{2k} > 0$, on a :

$$\frac{\ln(n)^k}{n^a} = o\left(\frac{1}{n^{a-k\beta}}\right)$$

   Or $a - k\beta = a - \frac{a-1}{2} = \dfrac{a+1}{2} > 1$ car $a > 1$; par suite, d'après le critère de Riemann, $\dfrac{1}{n^{a-k\beta}}$ est le terme général d'une série convergente et donc $\dfrac{\ln(n)^k}{n^a}$ l'est aussi par comparaison. Ainsi, $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a,+\infty[$

   Il en résulte que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur $[a,+\infty$ pour tout $a > 1$ et donc sur tout segment de $]1,+\infty[$.
   Il en résulte que, par le théorème d'interversion dérivation/somme, ζ est de classe C^∞ sur $]1,+\infty[$, et on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]1,+\infty[$:

$$\zeta^{(k)}(x) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n\right)^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)^k}{n^x}.$$

Partie C

Approximation uniforme

Dans cette partie, les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et sont à valeurs dans un espace vectoriel F sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de dimension finie. De plus, a, b désignent deux réels de I tels que $a < b$.

1. Définitions

Définition 8. *Subdivision d'un segment*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma = (a_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ une famille finie à valeurs dans $[a, b]$. On dit que σ est une **subdivision du segment** $[a, b]$ si

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b.$$

Définition 9. *Fonctions en escalier*

Soit $\varphi : [a, b] \to \mathbb{F}$. On dit que φ est une **fonction en escalier sur** $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ de $[a, b]$ telle que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $\varphi_{|]a_i, a_{i+1}[}$ est constante.

On note $\mathrm{Esc}([a, b], F)$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$.

Définition 10. *Fonctions continues par morceaux*

Soit $f : I \to F$. On dit que f est **continue par morceaux sur le segment** $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ de $[a, b]$ telle que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $f_{|]a_i, a_{i+1}[}$ est continue et prolongeable par continuité sur $[a_i, a_{i+1}]$.

On dit que f est **continue par morceaux sur l'intervalle** I si f est continue par morceaux sur tout segment de I.

On note $C_{\mathrm{pm}}(I, F)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I.

Exercice 20.

1. Dessiner quelques graphes de fonctions en escalier et continues par morceaux sur un segment.
2. Montrer que $C_{\mathrm{pm}}(I, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}_b(I, F)$.

2. Approximation uniforme par des fonctions en escalier

Théorème 11.

Soit $f \in C_{pm}([a,b],F)$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in \mathrm{Esc}([a,b],F)$ telle que $\|f-\varphi\|_\infty \leq \varepsilon$.

Autrement dit, toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier sur $[a,b]$.
Autrement dit, l'ensemble $\mathrm{Esc}([a,b],F)$ est dense dans $(C_{pm}([a,b],F), \|\cdot\|_\infty)$.

Démonstration.

- On traite tout d'abord le cas f continue sur $[a,b]$. Alors, d'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[a,b]$.
  Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x, y \in [a,b]$ avec $|x-y| \leq \delta$, $\|f(x) - f(y)\|_F \leq \varepsilon$. On construit alors une subdivision de $[a,b]$ de la façon suivante :
  — comme la suite $(\dfrac{b-a}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{b-a}{n} \leq \delta$.
  — pour $i \in [\![0,n]\!]$, on pose $a_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$.
  Ainsi, $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ est une subdivision de $[a,b]$. On définit alors la fonction en escalier $\varphi : [a,b] \to F$, pour $x \in [a,b]$, par :
  $$\varphi(x) = \begin{cases} f(a) & \text{si } x = a \\ f(a_{i+1}) & \text{si } a_i < x \leq a_{i+1}, i \in [\![0,n-1]\!]. \end{cases}$$
  Pour $x \in [a,b]$, on a l'alternative :
  — $x = a$. Alors $\|f(a) - \varphi(a)\|_F = 0 \leq \varepsilon$.
  — il existe $i \in i \in [\![0,n-1]\!]$ tel que $x \in]a_i, a_{i+1}]$. Alors $|x - a_{i+1}| \leq \delta$, donc :
  $$\|f(x) - \varphi(x)\|_F = \|f(x) - f(a_i)\|_F \leq \varepsilon.$$
  Dans tous les cas, $\|f(x) - \varphi(x)\|_F \leq \varepsilon$. Par suite, $\|f - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$.
- Traitons maintenant le cas général $f \in C_{pm}([a,b],F)$. On considère une subdivision $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ adaptée à f et on note, pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$, f_i le prolongement par continuité de $f_{|]a_i,a_{i+1}[}$ sur $[a_i, a_{i+1}]$.
  Soit $\varepsilon > 0$. Comme pour chaque $i \in [\![0,n-1]\!]$, f_i est continue sur $[a_i, a_{i+1}]$, en appliquant le point précédent à f_i, on construit $\varphi_i \in \mathrm{Esc}([a,b],F)$ telle que $\|f_i - \varphi_i\|_\infty \leq \varepsilon$.
  On définit alors la fonction en escalier $\varphi : [a,b] \to F$, pour $x \in [a,b]$, par :
  $$\varphi(x) = \begin{cases} f(a_i) & \text{si } x = a_i,\ i \in [\![0,n]\!] \\ \varphi_i(x) & \text{si } a_i < x < a_{i+1},\ i \in [\![0,n-1]\!]. \end{cases}$$
  Pour $x \in [a,b]$, on a l'alternative :
  — il existe $i \in i \in [\![0,n]\!]$ tel que $x = a_i$. Alors $\|f(a_i) - \varphi(a_i)\|_F = 0 \leq \varepsilon$.
  — il existe $i \in i \in [\![0,n-1]\!]$ tel que $x \in]a_i, a_{i+1}[$. Alors, on a :
  $$\|f(x) - \varphi(x)\|_F = \|f_i(x) - \varphi_i(x)\|_F \leq \|f_i - \varphi_i\|_\infty \leq \varepsilon.$$
  Dans tous les cas, $\|f(x) - \varphi(x)\|_F \leq \varepsilon$. Par suite, $\|f - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$.
  Pour démontrer ce point, on pouvait également remarquer que tout fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est la somme d'une fonction continue et d'une fonction en escalier. On conclut alors en approximant, grâce au premier point, cette fonction continue par une fonction en escalier.

□

Exercice 21.

Montrer que toute fonction continue sur le segment $[a, b]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions affines par morceaux.

Exercice 22. *Cas particulier du Lemme intégrale de Riemann-Lebesgue*

Soit $f \in \mathbb{C}_{pm}([a, b], \mathbb{C})$. Montrer que $\int_a^b f(t)e^{int}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

3. Approximation uniforme par des fonctions polynomiales

Notation 3. *Fonctions polynomiales*

On note $\mathcal{P}([a, b], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ restreintes au segment $[a, b]$ i.e. si $p \in \mathcal{P}([a, b], \mathbb{K})$, il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que, pour tout $x \in [a, b]$, $p(x) = P(x)$.

Théorème 12. *Théorème de Weierstrass*

Soit $f \in C([a, b], \mathbb{K})$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathcal{P}([a, b], \mathbb{K})$ telle que $\|f - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$.
Autrement dit, toute fonction continue sur $[a, b]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.
Autrement dit, l'ensemble $\mathcal{P}([a, b], \mathbb{K})$ est dense dans $(C([a, b], \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 23.

Soit $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$. Montrer que si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors f est la fonction nulle sur $[0, 1]$.