Chapitre IX
Séries entières

Table des matières

Partie A : Définitions et généralités sur les séries entières **2**
1. Séries entières 2
2. Rayon de convergence 3
3. Calcul du rayon de convergence d'une série entière 6

Partie B : Propriétés des séries entières **16**
1. Opérations sur les séries entières 16
2. Régularité d'une série entière 20
3. Dérivée de la somme d'une série entière réelle 25
4. Primitive de la somme d'une série entière réelle 26

Partie C : Développements en série entière **27**
1. Développement en série entière d'une fonction d'une variable réelle 27
2. Développements en série entière usuels 29

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désignent, sauf mention contraire, des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Partie A

Définitions et généralités sur les séries entières

1. Séries entières

Définition 1. *Série entière*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. On appelle **série entière** associée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la série de fonction $\sum f_n$ où, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est définie par :

$$f_n : z \mapsto a_n z^n.$$

On notera (abusivement) $\sum a_n z^n$ la série entière associée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 1.

On connaît déjà plusieurs séries entières :

- la série géométrique $\sum z^n$;
- la série de somme exponentielle $\sum \dfrac{z^n}{n!}$.

Exercice 1.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Montrer que $\sum a_n z^{2n}$ est une série entière.

Correction.

Attention ! Il y a un piège ! $\sum a_n z^{2n}$ est bien une série entière : il s'agit de la série entière $\sum b_n z^n$ où, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} b_n = a_{n/2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ b_n = 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Définition 2. *Somme et domaine de convergence*

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On appelle **domaine de convergence** de la série entière $\sum a_n z^n$ l'ensemble

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid \sum a_n z^n \text{ converge } \}.$$

On appelle **somme de la série entière** $\sum a_n z^n$ la fonction somme $S : D \to \mathbb{C}$ de la série, i.e.

$$S : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Remarque 1.

— Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs réelles, on peut également considérer le domaine réelle de convergence $D_{\mathbb{R}} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sum a_n x^n \text{ converge }\}$ de la série entière et sa somme $S : D_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ où $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

— Le domaine de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$ est le plus grand ensemble sur lequel la série de fonctions $\sum a_n z^n$ converge simplement.

Question 1.

Que dire de la somme d'une série entière associée à une suite stationnaire en 0 ?

Réponse : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite stationnaire en 0 ; on note $N = \min_{n\in\mathbb{N}}(a_n = 0)$ et $P = \sum_{n=0}^{N-1} a_n X^n \in \mathbb{C}[X]$. Alors la série $\sum a_n z^n$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$. En effet, la suite des sommes partielles est stationnaire en $\sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n = P(z)$. De plus, pour la même raison, la somme S de la série entière est :

$$S : z \mapsto P(z).$$

On peut donc conclure que la somme d'une série entière associée à une suite stationnaire en 0 est une fonction polynomiale !

2. Rayon de convergence

a. Lemme d'Abel

Théorème 1. *Lemme d'Abel*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $z_0 \in \mathbb{C}^*$. Si la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Démonstration.

On suppose que suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Alors il existe $M > 0$ tel que $|a_n z_0^n| \leq M$.
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| . \left(\frac{z}{z_0}\right)^n \leq M \left(\frac{z}{z_0}\right)^n,$$

qui est le terme général d'une série géométrique de raison strictement inférieure à 1 car $|z| < |z_0|$.
Par suite, $\sum |a_n z^n|$ est convergente. □

b. Définition et propriétés du rayon de convergence

Lemme 1.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. L'ensemble $\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (|a_n|r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$ est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

Démonstration.

On note $I = \{r \in \mathbb{R}_+ \mid (|a_n|r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$. Alors I contient 0 car $(|a_n|0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
De plus, si $r \in I$, alors, pour tout $s \in [0, r]$, $s \in I$ car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n|s^n \leq |a_n|r^n$ donc $(|a_n|s^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Il en résulte que I est un intervalle de la forme $[0, a)$. □

Ce lemme justifie la définition suivante :

Définition 3. *Rayon de convergence*

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

i) On appelle **rayon de convergence** et on note R la borne supérieure de l'intervalle $I = \{r \in \mathbb{R}_+ \mid (|a_n|r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$ i.e.

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (|a_n|r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}.$$

on convient que $R = +\infty$ si l'intervalle I n'est pas majoré.

ii) On appelle **disque ouvert de convergence** de la série entière $\sum a_n z^n$ l'ensemble $\mathbb{D}(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$.

iii) Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$, On appelle **intervalle ouvert de convergence** de la série entière $\sum a_n x^n$ l'intervalle $]-R, R[$.

Proposition 1.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, R son rayon de convergence et $z \in \mathbb{C}$.

— Si $|z| < R$, alors la série numérique $\sum a_n z^n$ converge absolument.

— Si $|z| > R$, alors la série numérique $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

Démonstration.

— On suppose $|z| < R$. Comme $R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (|a_n|r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$, alors il existe $r_0 \in \{r \in \mathbb{R}_+ \mid (|a_n|r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$ tel que $|z| < r_0 < R$.
Par conséquent, la suite $(a_n r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, d'après le lemme d'Abel, la série $\sum a_n z^n$

est absolument convergente.

— On suppose $|z| > R$. Alors la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée et donc ne converge pas vers 0. Ainsi, la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

□

Remarque 2.

Si $|z| = R$, on ne peut, a priori, rien dire ! Il faut étudier la série dans ce cas.

Proposition 2.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, R son rayon de convergence et D son domaine de convergence. Alors on a :

$$\mathbb{D}(0,R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\} \subset D \subset \overline{\mathbb{D}}(0,R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}.$$

Démonstration.

- Si $z \in \mathbb{D}(0,R)$ alors $|z| < R$. Par suite, d'après la proposition précédente, $\sum a_n z^n$ converge absolument et donc converge. D'où $z \in D$.
  Il en résulte que $\mathbb{D}(0,R) \subset D$.
- Si $z \notin \overline{\mathbb{D}}(0,R)$ alors $|z| > R$. Par suite, d'après la proposition précédente, $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement. D'où $z \notin D$.
  Ainsi $\overline{D}(0,R)^c \subset D^c$ et donc $D \subset \overline{D}(0,R)$.

□

Exemple 2.

— Pour la série entière $\sum z^n$, le rayon de convergence est 1 et son domaine de convergence est $D = \mathbb{D}(0,1)$.

> On a
> $$\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\} = [0,1].$$
> Donc le rayon de convergence R de $\sum z^n$ est :
> $$R = \sup[0,1] = 1.$$
> De plus, si $|z| = 1$, $|z^n| = |z|^n = 1 \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$, donc $\sum z^n$ diverge grossièrement.
> Il en résulte que $D = \mathbb{D}(0,1)$.

— Pour la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} z^n$, le rayon de convergence est 1 et son domaine de convergence est $D = \overline{\mathbb{D}}(0,1)$.

On a

$$\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (\frac{1}{n^2} r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\} = [0,1].$$

Donc le rayon de convergence R de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} z^n$ est :

$$R = \sup[0,1] = 1.$$

De plus, si $|z| = 1$, $|\frac{1}{n^2} z^n| = \frac{1}{n^2}$ donc, d'après le critère de Riemann, $\sum \frac{z^n}{n^2}$ converge absolument.

Il en résulte que $D = \overline{\mathbb{D}}(0,1)$.

Exercice 2.

Déterminer le rayon de convergence et le domaine de convergence des séries entières $\sum \frac{z^n}{n!}$ et $\sum n! z^n$.

Correction.

1. On a

$$\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (\frac{1}{n!} r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\} = [0, +\infty[.$$

car, pour tout $r \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{n!} r^n$ est le terme général d'une série convergente - donc converge vers 0 et donc est une suite bornée.

Ainsi le rayon de convergence R de $\sum \frac{1}{n!} z^n$ est :

$$R = +\infty.$$

Il en résulte que $D = \mathbb{C}$.

2. On a

$$\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (n! r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\} = \{0\}.$$

En effet, pour $0 < r < 1$, à partir du rang $N = E(r) + 1$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $n \geq N$, $n! r^n \geq Cn \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ (on peut prendre $C = (N-1)! r^N$)) donc pour tout $r > 0$, la suite $(n! r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée (le cas $r \geq 1$ est immédiat - *le faire quand même pour vérifier que c'est bien immédiat !*).

Donc le rayon de convergence R de $\sum n! z^n$ est :

$$R = \sup\{0\} = 0.$$

Il en résulte que $D = \{0\}$.

3. Calcul du rayon de convergence d'une série entière

a. Caractérisation du rayon de convergence

Proposition 3.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et R son rayon de convergence. Alors on a les égalités suivantes :

- $R = \sup\{\, |z| \mid (a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$;
- $R = \sup\{\, |z| \mid (a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}\}$;
- $R = \sup\left\{\, |z| \mid \sum a_n z^n \text{ converge}\right\}$;
- $R = \sup\left\{\, |z| \mid \sum a_n z^n \text{ converge absolument}\right\}$.

Démonstration.

On considère les ensembles suivants :

- $I_1 = \{\, |z| \mid (a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$;
- $I_2 = \{\, |z| \mid (a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}\}$;
- $I_3 = \left\{\, |z| \mid \sum a_n z^n \text{ converge}\right\}$;
- $I_4 = \left\{\, |z| \mid \sum a_n z^n \text{ converge absolument}\right\}$.

Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^n$, on a :

$$\sum u_n \text{ converge absolument} \Rightarrow \sum u_n \text{ converge} \Rightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} \Rightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée.}$$

Par suite, on a la chaîne d'inclusion :

$$I_4 \subset I_3 \subset I_2 \subset I_1.$$

De plus, on remarque que $I_1 = \{r \in \mathbb{R}_+ \mid (|a_n| r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$, donc, d'après le lemme 1, I_1 est un intervalle non vide de $\mathbb{R}_+$ qui contient 0 et par définition du rayon de convergence, $R = \sup I_1$ (potentiellement $= +\infty$). Ainsi, on a $I_1 = [0, R[$ ou $I_1 = [0, R]$.
Comme $0 \in I_4$, I_4 est une partie non vide de $\mathbb{R}_+$ et donc il possède une borne supérieure R' (potentiellement $+\infty$ si I_4 n'est pas majorée). Ainsi, comme $I_4 \subset I_1$, on a $R' \leq R$.

Réciproquement : soit $r \in [0, R[$. Alors, d'après la proposition 1, la série $\sum a_n r^n$ converge absolument, donc r appartient à I_4 et donc $r \leq R'$. Par suite, R' est un majorant de $[0, R[$ d'où $R \leq R'$. Il en résulte que $R' = R$.
Remarque : les inégalités précédentes ne pas rigoureuses dans le cas $R = +\infty$, mais la preuve reste analogue dans ce cas.
Ainsi, en utilisant la chaîne d'inclusion précédente, on obtient :

$$R = \sup I_4 \leq \sup I_3 \leq \sup I_2 \leq \sup I_1 = R.$$

d'où les égalités annoncées. □

Méthode : Minoration et majoration du rayon de convergence

Étant donné une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R et $z_0 \in \mathbb{C}$, on a :

- la minoration $R \geq |z_0|$, si on est dans l'un des cas suivants :

i) la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ;
ii) la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ;
iii) la série $\sum a_n z_0^n$ converge ;
iv) la série $\sum a_n z_0^n$ converge absolument ;

- la majoration $R \leq |z_0|$, si on est dans l'un des cas suivants :
  i) la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée ;
  ii) la série $\sum a_n z_0^n$ diverge ;
  iii) la série $\sum |a_n z_0^n|$ diverge.

Exercice 3.

1. Déterminer le rayon de convergence de $\sum nz^n$.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^{2n}$ en fonction de celui de $\sum a_n z^n$.

Correction.

1. On remarque tout d'abord que la suite $(n1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée. Donc, comme $R = \sup\{\, |z| \mid (nz^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$, on a $R \leq 1$.
   Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Si $|z| < 1$, la suite $(n|z|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 par croissances comparées donc comme $R = \sup\{\, |z'| \mid (nz'^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}\}$, on a $R \geq |z|$.
   Ceci étant vrai pour tout z tel que $|z| < 1$, on peut faire tendre $|z|$ vers 1 dans l'inégalité précédente, ce qui donne $R \geq 1$.
   Il en résulte que $R = 1$.

2. Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^{2n}$ et R' celui de $\sum a_n z^n$.
   Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On suppose $|z| < R$. Alors la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et donc la suite $(|a_n|(\sqrt{|z|})^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi. Or, on a $R' = \sup\{\, |z'| \mid (a_n z'^{2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$, donc $R' \geq \sqrt{|z|}$. Ceci étant vrai pour tout z tel que $|z| < R$, on fait tendre $|z|$ vers R et ainsi, par continuité de la fonction racine :
   $$R' \geq \sqrt{R}.$$
   Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On suppose $|z| < R'$. Alors la suite $(a_n z^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et donc la suite $(a_n(z^2)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi. Or, on a $R = \sup\{\, |z'| \mid (a_n z'^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$, donc $R \geq |z^2| = |z|^2$. Ceci étant vrai pour tout z tel que $|z| < R'$, on fait tendre $|z|$ vers R' et ainsi, par continuité de la fonction carrée :
   $$R \geq R'^2.$$
   Il en résulte que $R' = \sqrt{R}$.

b. Comparaison

Proposition 4. *Comparaison des rayons de convergence*

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières et R_a, R_b leurs rayons de convergence respectifs. Alors si, à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$, on a, pour tout $n \geq N$:

i) $|a_n| \leq |b_n|$, alors $R_a \geq R_b$;
ii) $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$;
iii) $a_n = o(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$;
iv) $|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |b_n|$ alors $R_a = R_b$.

Démonstration.

i) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On suppose $|z| < R_b$. Alors la suite $(b_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Comme pour tout $n \geq N$, $|a_n| \leq |b_n|$, on a $|a_n z^n| \leq |b_n z^n|$ donc la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Or, on a $R_a = \sup\{\, |z'| \mid (a_n z'^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$, donc $R_a \geq |z|$. Ceci étant vrai pour tout z tel que $|z| < R_b$, on fait tendre $|z|$ vers R_b et ainsi :

$$R_a \geq R_b.$$

ii) On suppose $a_n = O(b_n)$. Alors il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq M|b_n|$. On adpate alors la preuve précédente en remarquant que, pour un certain $z \in \mathbb{C}$, si $(b_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors $(Mb_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi.

iii) Si $a_n = o(b_n)$, alors $a_n = O(b_n)$ d'où $R_a \geq R_b$;

iv) On remarque que $|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |b_n|$ implique $a_n = O(b_n)$ et $b_n = O(a_n)$. En effet, par définition, $|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |b_n| \Leftrightarrow a_n = b_n + o(b_n) = O(b_n) + O(b_n) = O(b_n)$.

□

Exercice 4.

1. Déterminer les rayons de convergence de $\displaystyle\sum \frac{2^n(1+5^n n^2)}{10^n(n+\sqrt{3n+1})} z^n$ et de $\displaystyle\sum \frac{\sin(\frac{n}{3^n})}{n+1} z^n$.
2. Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1} d(n) z^n$ où, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $d(n) = \#\{d \in [\![1, n]\!] \mid d|n\}$.

Correction.

1. On a :
$$\frac{2^n(1+5^n n^2)}{10^n(n+\sqrt{3n+1})} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$$
Or on a prouvé précédemment que $\sum nz^n$ a pour rayon de convergence 1 donc, par comparaison, le rayon de convergence de $\displaystyle\sum \frac{2^n(1+5^n n^2)}{10^n(n+\sqrt{3n+1})} z^n$ est égal à 1.

Comme $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, on a :

$$\frac{\sin(\frac{n}{3^n})}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3^n}$$

Or le rayon de convergence de $\sum \frac{1}{3^n} z^n$ est égal à 3 : en effet, pour $z \in \mathbb{C}$, la suite $((\frac{z}{3})^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si, et seulement si $|z| \leq 3$. Ainsi, par comparaison, le rayon de convergence de $\sum \frac{\sin(\frac{n}{3^n})}{n+1} z^n$ est égal à 3.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on remarque que $1 \leq d(n) \leq n$. Or les rayons de convergence de $\sum z^n$ et de $\sum nz^n$ sont tous deux égaux à 1, d'où, si on note R le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1} d(n)z^n$, on obtient $1 \geq R \geq 1$ et ainsi $R = 1$

c. Utilisation de la règle de D'Alembert

Théorème 2. *Règle de D'Alembert pour les séries entières*

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R telle que, à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$, pour tout $n \geq N$, $a_n \neq 0$. S'il existe $\ell \in [0, +\infty[\cup\{+\infty\}$ tel que :

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell,$$

alors on a :

$$R = \frac{1}{\ell} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \ell = 0; \\ \frac{1}{\ell} & \text{si } \ell \in]0, +\infty[; \\ 0 & \text{si } \ell = +\infty. \end{cases}$$

Démonstration.

Soit $z \in \mathbb{C}$. On applique le critère de D'Alembert à la série de terme général $u_n = |a_n z^n|$. Alors on a, pour tout $n \geq N$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| . |z|.$$

Par suite, si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ où :

- $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell|z|$. Ainsi, d'après le critère de D'Alembert, si $|z| < \frac{1}{\ell}$, $\sum u_n$ converge et si $|z| > \frac{1}{\ell}$, $\sum u_n$ diverge. Par suite, $R = \frac{1}{\ell}$.
- $\ell = +\infty$, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Ainsi, d'après le critère de D'Alembert, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\sum u_n$ diverge donc $R = 0$.
- $\ell = 0$, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ainsi, d'après le critère de D'Alembert, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\sum u_n$ converge. Par suite, $R = +\infty$.

□

Remarque 3.

Attention le critère précédent n'est valable que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est différente de 0 à partir d'un certain rang !

Ainsi, pour une série entière du type $\sum a_n z^{\varphi(n)}$ avec $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, on appliquera directement la règle de D'Alembert sur la série (tout court) $\sum a_n z^{\varphi(n)}$ i.e. on étudie la limite de

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{\varphi(n+1)}}{a_n z^{\varphi(n)}}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| . |z^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}|,$$

en fonction des valeurs de $z \in \mathbb{C}^*$ afin de majorer et minorer le rayon de convergence de la série entière.

Exercice 5.

1. Déterminer les rayons de convergence des séries entières

$$\sum_{n\geq 1} n^\alpha z^n \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}; \quad \sum \frac{n^n}{n!} z^n; \quad \sum \binom{4n}{2n+1} z^n;$$

$$\sum_{n\geq n_0} \frac{P(n)}{Q(n)} z^n \text{ où } P, Q \in \mathbb{K}[X].$$

2. Déterminer les rayons de convergence des séries entières :

$$\sum n! z^{2n} \qquad \sum n! z^{n^2} \qquad \sum n^n z^{\binom{3n}{n}}.$$

Correction.

1. Pour cette question, on remarque que les séries entières ne sont pas lacunaires et que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associées sont non nuls (à partir d'un certain rang). On peut donc appliquer le critère de D'Alembert pour les séries entières :
   — Ici, $a_n = n^\alpha$ pour $n \geq 1$ et $a_0 = 0$. Ainsi, à partir du rang 1, on a, par continuité de la fonction $x \mapsto x^\alpha$ en 1 :
   $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1^\alpha = 1$$
   Ainsi, le rayon de convergence R de $\sum_{n\geq 1} n^\alpha z^n$ est $R = \frac{1}{1} = 1$.
   — Ici, $a_n = \frac{n^n}{n!}$ pour $n \geq 0$. Ainsi, comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(1 + \frac{x}{n})^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^x$, on a :
   $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^1 = e$$
   Ainsi, le rayon de convergence R de $\sum \frac{n^n}{n!} z^n$ est $R = \frac{1}{e}$.
   — Ici, $a_n = \binom{4n}{2n+1}$ pour $n \geq 0$. Ainsi, on a :
   $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)(2n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4^4 n^4 n^4}{2^4 n^4} = 2^4 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2^4 = 16$$

Ainsi, le rayon de convergence R de $\sum \binom{4n}{2n+1} z^n$ est $R = \frac{1}{16}$.

— On suppose que P, Q sont des polynômes non nuls. Ici, $a_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$ pour $n \geq n_0$ où $n_0 = E(\max\{x \in \mathbb{R}_+ \mid Q(x) = 0\}) + 1$ si Q admet des racines réelles positives et $n_0 = 0$ sinon *(pour s'assurer qu'on ne divise par par 0 ; dans le cas où Q possède des racines positives, ce "max" existe bien car Q étant un polynôme non nul, l'ensemble de ses racines est fini)* et $a_n = 0$ pour tout $n < n_0$.
On va cette fois utiliser une comparaison avec la première série entière de la question pour déterminer le rayon de convergence :

Comme P, Q sont non nuls, il existe $p, q \in \mathbb{N}$ et des coefficients $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{K}$ tels que $P = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i X^i$ et $Q = \sum_{i=0}^{p} \beta_i X^i$ avec $\alpha_p \neq 0$ et $\beta_q \neq 0$. Par suite, on a, pour tout $n \geq n_0$:

$$\frac{P(n)}{Q(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha_p n^p}{\beta_q n^q} = \frac{\alpha_p}{\beta_q} n^{p-q}$$

Or, pour $\alpha = p - q \in \mathbb{R}$, la série entière $\sum_{n\geq 1} n^\alpha z^n$ possède un rayon de convergence égal à 1, donc, par comparaison, le rayon de convergence de $\sum_{n\geq n_0} \frac{P(n)}{Q(n)} z^n$ est égal à 1.

2. Les séries entières de cette question sont lacunaires, on ne peut donc pas appliquer le critère de D'Alembert pour les séries entières. On se rabat donc sur le critère de D'Alembert... tout court !

— Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = |n! z^{2n}| = n!|z|^{2n} > 0$. On peut donc appliquer la règle de D'Alembert à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = (n+1)|z|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty\text{"} > 1\text{"}$$

Ainsi, d'après la règle de D'Alembert, $\sum u_n$ diverge.
Par suite, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\sum n! z^n$ ne converge pas absolument. Or le rayon R de la série entière vérifie $R = \sup\{|z| \mid \sum n! z^n \text{ converge absolument}\}$, donc $R = 0$.

— Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = |n! z^{n^2}| = n!|z|^{n^2} > 0$. On peut donc appliquer la règle de D'Alembert à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = (n+1)|z|^{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} +\infty\text{"} > 1\text{"} & \text{si } |z| \geq 1 \\ 0 < 1 & \text{si } |z| < 1 \end{cases}$$

Donc, d'après la règle de D'Alembert, la série numérique $\sum n! z^{n^2}$ converge absolument si, et seulement si, $|z| < 1$.
Il en résulte que $R = 1$ car $R = \sup\{|z| \mid \sum n! z^{n^2} \text{ converge absolument}\}$.

— Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = |n^n z^{\binom{3n}{n}}| = n^n |z|^{\binom{3n}{n}} > 0$. On peut donc appliquer la règle de D'Alembert à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On remarque que, comme $n \leq E(\frac{3n}{2})$, on a $\binom{3n}{1} \leq \binom{3n}{n}$ et donc :

$$\binom{3n+3}{n+1} - \binom{3n}{n} = \binom{3n}{n} \left(3 \underbrace{\frac{(3n+2)(3n+1)}{(2n+2)(2n+1)}}_{\geq 1} - 1 \right) \geq \binom{3n}{1} \times 2 = 6n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

et ainsi,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = (n+1)\left(\frac{n+1}{n}\right)^n |z|^{\binom{3n+3}{n+1}-\binom{3n}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} +\infty \text{"} > 1\text{"} & \text{si } |z| \geq 1 \\ 0 < 1 & \text{si } |z| < 1 \end{cases}$$

Donc, d'après la règle de D'Alembert, la série numérique $\sum n^n z^{\binom{3n}{n}}$ converge absolument si, et seulement si, $|z| < 1$.
Il en résulte que $R = 1$ car $R = \sup\{|z| \mid \sum n^n z^{\binom{3n}{n}} \text{ converge absolument}\}$.

Exercice 6. *Apparté : Transformée d'Abel*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. On considère les séries $\sum a_n b_n$ et $\sum a_n$. On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de ses sommes partielles de $\sum a_n b_n$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ celle de $\sum a_n$.

1. Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$S_N = A_N b_N - \sum_{n=0}^{N-1} A_n(b_{n+1} - b_n).$$

   Cette identité est appelée *transformée d'Abel* des sommes partielles de la série $\sum a_n b_n$.

2. En déduire le *critère d'Abel* : si
   - $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ;
   - $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et
   - $\sum(b_{n+1} - b_n)$ est absolument convergente,

   alors la série $\sum a_n b_n$ converge.

3. Montrer le critère des séries alternées en utilisant le critère d'Abel.

Correction.

1. On pose $S_{-1} = 0$ et $A_{-1} = 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$ On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n =$

$A_n - A_{n-1}$, d'où on obtient :

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=0}^{N} a_n b_n \\ &= \sum_{n=0}^{N} A_n b_n - \sum_{n=0}^{N} A_{n-1} b_n \\ &= \sum_{n=0}^{N} A_n b_n - \sum_{n=-1}^{N-1} A_n b_{n+1} \\ &= A_N b_N + \sum_{n=0}^{N-1} A_n (b_n - b_{n+1}) - A_{-1} b_0 \\ &= A_N b_N - \sum_{n=0}^{N-1} A_n (b_{n+1} - b_n). \end{aligned}$$

Remarque : la transformation d'Abel est l'analogue pour les suites de l'intégration par parties pour les fonctions de la variable réelle ; en effet,
- *prendre la somme partielle de la série associée à une suite est l'analogue de la primitivation pour une fonction,*
- *prendre la différence de deux termes successifs d'une suite est l'analogue de la dérivation pour une fonction.*

2. Supposons les hypothèses vérifiées. Comme $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|A_n| \leq M$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   - $|A_n b_n| \leq M|b_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$; donc la suite $(A_N b_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge (vers 0) ;
   - $|A_n(b_{n+1} - b_n)| \leq M|b_{n+1} - b_n|$ qui est le terme général d'une série convergente donc, par comparaison, $\sum A_n(b_{n+1} - b_n)$ converge absolument et donc converge. Ainsi, la suite $(\sum_{n=0}^{N-1} A_n(b_{n+1} - b_n))_{N\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de cette série converge.

   Par suite, par transformation d'Abel des sommes partielles S_N pour $N \in \mathbb{N}$ (question 1), la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ s'écrit comme combinaison linéaire de suites convergentes et donc converge. Il en résulte que la série $\sum a_n b_n = (S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs qui converge vers 0. Montrons que la série $\sum(-1)^n u_n$ converge.

   On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-1)^n$, $b_n = u_n$ et $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Alors :
   - On a, pour $n \in \mathbb{N}$,
   $$A_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \frac{1 - (-1)^{n+1}}{2} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$
   donc $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par 1.
   - $b_n = u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   - Pour $n \in \mathbb{N}$, $|b_{n+1} - b_n| = u_n - u_{n+1}$ car la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Par suite, la série $\sum |b_{n+1} - b_n| = \sum(u_n - u_{n+1})$ est télescopique et donc convergente car de même nature que la suite convergente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ainsi, $\sum(b_{n+1} - b_n)$ converge absolument.

   Par suite, d'après le critère d'Abel, la série $\sum(-1)^n u_n = \sum a_n b_n$ converge.
   Nous avons donc (re)démontré le critère des séries alternées.

Exercice 7. *Étude d'une série entière sur la frontière du disque*

On considère la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$.

1. Montrer que son rayon de convergence est 1. Que dire de la convergence en $z = 1$?
2. Soit $z_0 \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$. En utilisant le critère d'Abel (exercice 6), montrer que $\sum_{n\geq 1} \frac{z_0^n}{n}$ converge.
3. En déduire le domaine de convergence de $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$.

Correction.

1. On note R le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \frac{1}{n} > 0$. Alors

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1,$$

donc $R = \frac{1}{1} = 1$ d'après la règle de D'Alembert pour les séries entières.

Évaluer en $z = 1$, on obtient la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ qui est divergente.

2. On reprend les notations de l'exercice 6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = z_0^n$, $b_n = \frac{1}{n}$ et $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$. Alors :
   - Comme $|z_0| = 1$, on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$|A_n| = \left|\sum_{k=0}^n z_0^k\right| = \frac{|1 - z_0^{n+1}|}{|1 - z_0|} \leq \frac{1 + |z_0|^{n+1}}{|1 - z_0|} = \frac{2}{|1 - z_0|}$$
   donc $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par $\frac{2}{|1-z_0|}$.
   - $b_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   - Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $|b_{n+1} - b_n| = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Par suite, la série $\sum_{n\geq 1} |b_{n+1} - b_n| = \sum_{n\geq 1}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$ est télescopique et donc convergente car de même nature que la suite convergente $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$. Ainsi, $\sum_{n\geq 1}(b_{n+1} - b_n)$ converge absolument.

   Par suite, d'après le critère d'Abel (exercice 6 question 2.), la série $\sum_{n\geq 1} \frac{z_0^n}{n}$ converge.
3. On note D le domaine de convergence de la série entière. Comme $R = 1$, on a

$$\mathbb{D}(0,1) \subset D \subset \overline{\mathbb{D}(0,1)}$$

De plus, pour $z \in \mathbb{U}$, on a, d'après les questions 1 et 2, $z \in D$ si, et seulement si, $z \neq 1$.
Par suite, $D = \overline{\mathbb{D}(0,1)} \setminus \{1\}$.

Partie B

Propriétés des séries entières

1. Opérations sur les séries entières

a. Combinaisons linéaires

Proposition 5. *Produit par un scalaire*

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Alors $\sum \lambda a_n z^n$ et $\sum a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

Démonstration.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Comme $\lambda \neq 0$, la suite $(\lambda a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si, et seulement si, $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Il en résulte que $\sum \lambda a_n z^n$ et $\sum a_n z^n$ ont même rayon de convergence. □

Proposition 6. *Somme*

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières et R_a, R_b leurs rayons de convergence respectifs. Alors le rayon de convergence R de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie :

- si $R_a \neq R_b$, $R = \min(R_a, R_b)$
- si $R_a = R_b$, $R \geq R_a (= R_b)$.

Démonstration.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites bornées, alors la suite $((a_n + b_n) z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc $|z| \leq R$. Ceci étant vrai pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$, on obtient :

$$R \geq \min(R_a, R_b).$$

Supposons que $R_a \neq R_b$. Quitte à échanger R_a et R_b, on suppose que $R_a < R_b$.
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $R_a < |z| < R_b$. Alors la suite $((a_n + b_n) z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée car $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée et $(b_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

> *Remarque :* pour démontrer le fait précédent, on peut utiliser la contraposée de l'assertion : "si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées, alors $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Ainsi, on a $|z| \geq R$. Ceci étant vrai pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $\mathbf{R_a} < |\mathbf{z}| < R_b$, on obtient $\min(R_a, R_b) = R_a \geq R$.

Il en résulte que, si $R_a \neq R_b$,

$$R = \min(R_a, R_b).$$

□

Proposition 7. *Somme d'une combinaison linéaire de séries entières*

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières de rayon de convergence respectifs R_a, R_b et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. On pose $R = \min(R_a, R_b)$. Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

Démonstration.

Les séries entières $\sum \lambda a_n z^n$ et $\sum \mu b_n z^n$ sont de rayons de convergences supérieurs à respectivement R_a et R_b (égaux si $\lambda, \mu \neq 0$ (proposition 5) et $+\infty$ sinon) donc, d'après la proposition 6, la série entière $\sum (\lambda a_n + \mu b_n) z^n$ est de rayon de convergence supérieur à $R = \min(R_a, R_b)$. Par suite, pour tout $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $|\omega| < R$, ω appartient au disque ouvert de convergence de la série entière $\sum (\lambda a_n + \mu b_n) z^n$ et donc, d'après la proposition 1, $\sum (\lambda a_n + \mu b_n) \omega^n$ converge absolument et donc converge ; de plus, comme $|\omega| < R \leq R_a$, et $|\omega| < R \leq R_b$, par un raisonnement similaire, les séries numériques $\sum a_n \omega^n$ et $\sum b_n \omega^n$ convergent.

Ainsi, par linéarité de la somme d'une série, on obtient, pour tout $\omega \in \mathbb{C}$ avec $|\omega| < R$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) \omega^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \omega^n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \omega^n.$$

□

Exercice 8.

Déterminer les rayons de convergence et la somme dans le disque ouvert de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum \mathrm{ch}(n) z^n \qquad \sum \sin(n\theta) z^n \quad (\text{où } \theta \in \mathbb{R}).$$

Correction.

1. On a, par définition, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
   La série entière $\sum e^n z^n$ a pour rayon de convergence $\frac{1}{e}$ et la série entière $\sum e^{-n} z^n$ a pour rayon de convergence e donc la série entière $\sum \mathrm{ch}(n) z^n$ a pour rayon de convergence $R = \min(\frac{1}{e}, e) = \frac{1}{e}$ et on a, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \frac{1}{e}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{ch}(n) z^n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} e^n z^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} z^n = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - ez} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{z}{e}}.$$

2. On a, par définition, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$.
Les séries entières $\sum e^{in\theta}z^n$ et $\sum e^{-in\theta}z^n$ ont pour rayons de convergence 1 donc la série entière $\sum \sin(n\theta)z^n$ a pour rayon de convergence $R \geq 1$ et on a, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(n\theta)z^n &= \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{in\theta}z^n - \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-in\theta}z^n \\ &= \frac{1}{2i}\frac{1}{1-e^{i\theta}z} - \frac{1}{2i}\frac{1}{1-e^{-i\theta}z} \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(n\theta)z^n &= \frac{\sin(\theta)z}{1-2\cos(\theta)z+z^2}.\end{aligned}$$

Maintenant, déterminons exactement le rayon de convergence R de $\sum \sin(n\theta)z^n$.
Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors $\sin(n\theta) = 0$ pout tout $n \in \mathbb{N}$. Donc dans ce cas, $R = +\infty$.

Supposons $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Comme la suite $(\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 alors la suite $(\sin(n\theta)1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas le terme général d'une série convergente et donc $R \leq 1$.
Il en résulte que $R = 1$.

b. Produit de Cauchy

On rappelle ici la notion de produit de Cauchy dans le cas de séries entières :

Définition 4. *Produit de Cauchy de deux séries entières*

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières. On appelle **produit de Cauchy** des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$, la série entière $\sum c_n z^n$ où, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Proposition 8. *Produit de Cauchy*

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières et R_a, R_b leurs rayons de convergence respectifs. Alors le rayon de convergence R du produit de Cauchy $\sum c_n z^n$ des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ vérifie $R \geq \min(R_a, R_b)$ et on a, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right).$$

Démonstration.

On rappelle le résultat de Sup' suivant sur le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes :

Soit $\sum A_n$, $\sum B_n$ des séries numériques et on pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $C_n = \sum_{k=0}^{n} A_k B_{n-k}$. Si $\sum A_n$ et $\sum B_n$ convergent absolument, alors $\sum C_n$ converge absolument et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} C_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} A_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} B_n\right).$$

Preuve succincte : Comme $\sum A_n$, $\sum B_n$ converge absolument, les familles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont sommables et donc, d'après le théorème de sommation par paquets appliqués aux partitions $\mathbb{N}^2 = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n$ où $\Delta_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid p+q = n\}$ et $\mathbb{N}^2 = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$ où $H_n = \{(n,m) \in \mathbb{N}^2\}$, la famille $(A_n B_m)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} C_n = \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} A_n B_m = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} A_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} B_n\right).$$

Le résultat précédent reste valable en supposant qu'une des deux séries converge et l'autre converge absolument : il s'agit du théorème de Mertens.

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$, d'après la proposition 1, les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergent absolument. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $A_n = a_n z^n$, $B_n = b_n z_n$ et $C_n = \sum_{k=0}^{n} A_k B_{n-k}$. On remarque alors que, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k b_{n-k} z^{n-k} = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n = c_n z^n.$$

D'après le résultat précédent, la série $\sum C_n = \sum c_n z^n$ converge absolument et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} A_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$$

De plus, comme $\sum c_n z^n$ converge absolument, on a $R \geq |z|$. Ceci étant vrai pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < \min(R_a, R_b)$, on obtient $R \geq \min(R_a, R_b)$. □

Exercice 9.

Déterminer le rayon de convergence et la somme du produit de Cauchy de $\sum z^n$ et $1 - z$. Qu'en conclure ?

Correction.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = 1$; $b_n = 0$ si $n \geq 2$; $b_0 = 1$ et $b_1 = -1$. Alors $\sum a_n z^n = \sum z^n$ et $\sum b_n z^n = 1 - z$. Le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est $R_a = 1$ et celui de $\sum b_n z^n$ est $R_b = +\infty$ donc, d'après la proposition 8, le rayon de convergence R du produit de Cauchy $\sum c_n z^n$ des séries

entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ vérifie $R \geq \min(1, +\infty) = 1$ et on a, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right) = \frac{1}{1-z}.(1-z) = 1.$$

De plus, on remarque que $c_0 = a_0 b_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_n.b_0 + a_{n-1} b_1 = 1.1 + 1.(-1) = 0.$$

La suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant stationnaire en 0, le rayon de convergence de $\sum c_n z^n$ est donc $R = +\infty$.
On rmarque alors que dans ce cas $R > \min(R_a, R_b)$: le rayon de convergence du produit de Cauchy peut donc "augmenter" par rapport au minimum des rayons des séries entières dont il est issu.

2. Régularité d'une série entière

a. Convergence normale

Théorème 3.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors :

- la série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{D}(0, R)$ $(= \mathbb{C}$ si $R = +\infty)$;
- la série entière $\sum a_n x^n$ converge normalement sur tout segment de $]-R, R[$ $(= \mathbb{R}$ si $R = +\infty)$.

Démonstration.

- Soit $a > 0$ avec $a < R$. Montrons la série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement $\overline{\mathbb{D}}(0, a)$.
  On note $f_n : z \mapsto a_n z^n$.
  On a, pour $n \in \mathbb{N}$:
  $$\|f_n\|_\infty = \sup_{z \in \overline{\mathbb{D}}(0,a)} (|a_n||z|^n) \leq |a_n| a^n.$$
  Or $R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \mid \sum |a_n| r^n \text{ converge}\}$, donc comme $a < R$, $|a_n| a^n$ est le terme général d'une série convergente.
  Par suite, pour tout $0 < a < R$, la série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{\mathbb{D}}(0, a)$.

  Ainsi, comme tout compact de $\mathbb{D}(0, R)$ est inclus dans un disque $\overline{\mathbb{D}}(0, a)$ avec $a < R$, on a convergence normale de $\sum a_n z^n$ sur tout compact de $\mathbb{D}(0, R)$.
- Soit $a > 0$ avec $a < R$. Montrons la série entière $\sum a_n x^n$ converge normalement $[-a, a]$.
  On note $f_n : x \mapsto a_n x^n$.
  On a, pour $n \in \mathbb{N}$:
  $$\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in [-a,a]} (|a_n||x|^n) \leq |a_n| a^n.$$

Or $R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \mid \sum |a_n| r^n \text{ converge}\}$, donc comme $a < R$, $|a_n|a^n$ est le terme général d'une série convergente.
Par suite, pour tout $0 < a < R$, la série entière $\sum a_n x^n$ converge normalement sur $[-a, a]$.

Ainsi, comme tout segment de $]-R, R[$ est inclus dans un intervalle $[-a, a]$ avec $0 < a < R$, on a convergence normale de $\sum a_n x^n$ sur tout segment $[-R, R]$.

Remarque : on aurait bien-sur pu utiliser le point précédent pour démontrer le cas réel.

□

Remarque 4.

Sur le disque $\mathbb{D}(0, R)$, la convergence n'est pas normale en général : par exemple, les séries entières $\sum z^n$ ou $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$ ne convergent pas normalement sur $\mathbb{D}(0, 1)$.

b. Continuité

Théorème 4.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors sa somme

$$S : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

est continue sur le disque ouvert de convergence $\mathbb{D}(0, R)$.
En particulier, S est continue sur l'intervalle $]-R, R[$.

Démonstration.

— D'après le théorème précédent, la série de fonctions $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{D}(0, R)$ et les fonctions $z \mapsto a_n z^n$ sont continues sur $\mathbb{C}$ et donc sur $\mathbb{D}(0, R)$ car polynomiales.
Ainsi, d'après le théorème de continuité des séries de fonctions, $S : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur $\mathbb{D}(0, \mathbb{R})$.

— *Cas réel :* D'après le théorème précédent, la série de fonctions $\sum a_n x^n$ converge normalement sur tout segment de $]-R, R[$ et les fonctions $z \mapsto a_n x^n$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et donc sur $]-R, R[$ car polynomiales.
Ainsi, d'après le théorème de continuité des séries de fonctions, $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur $]-R, R[$.
Remarque : on aurait bien-sur pu utiliser le point précédent pour démontrer le cas réel.

□

On se pose alors la question de la continuité de la somme d'une série entière de rayon de convergence R aux bornes de l'intervalle $]-R, R[$. Le théorème suivant nous fournit la réponse :

Théorème 5. *Théorème d'Abel radial*

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S. Si $\sum a_n R^n$ converge, alors

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow[x \to R^-]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n,$$

i.e. S est définie et continue à gauche en R.

Démonstration Hors programme.

Quitte à changer la variable x en x/R, on peut supposer que la rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est $R = 1$.
On suppose que $\sum a_n$ converge vers un certain $S \in \mathbb{R}$. Montrons que $S(x) \xrightarrow[x \to 1^-]{} S$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note S_n la somme partielle d'ordre n et R_n le reste d'ordre n de la série (convergente) $\sum a_n$. Rappelons que $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Soit $x \in]-1, 1[$ et $N \in \mathbb{N}$. On note $S_N(x)$ la somme partielle d'ordre N de la série $\sum a_n x^n$.

On s'inspire de la technique utilisée dans l'exercice 6 pour obtenir la transformation d'Abel, en se basant sur l'égalité $a_n = R_{n-1} - R_n$:

$$\begin{aligned}
S_N(x) - S_N &= \sum_{n=1}^{N} \underbrace{a_n}_{=R_{n-1}-R_n} (x^n - 1) \\
&= \sum_{n=1}^{N} R_{n-1}(x^n - 1) - \sum_{n=1}^{N} R_n(x^n - 1) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} R_n(x^{n+1} - 1) - \sum_{n=0}^{N} R_n(x^n - 1) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} R_n(x^{n+1} - x^n) - (x^N - 1)R_N \\
S_N(x) - S_N &= (x-1)\sum_{n=0}^{N-1} R_n x^n + (1 - x^N)R_N
\end{aligned}$$

En passant à la limite quand N tend vers l'infini dans l'égalité précédente, on déduit que $\sum R_n x^n$ converge et on obtient :

$$S(x) - S = (x-1)\sum_{n=0}^{+\infty} R_n x^n.$$

De plus, cela implique que le rayon de convergence de la série entière la série entière $\sum R_n z^n$ est supérieur ou égal à 1 et donc, en particulier, pour tout $x \in]-1, 1[$, $\sum R_n x^n$ converge absolument.

Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|R_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et donc, pour $x \in [0,1[$,

$$\begin{aligned}
|S(x) - S| &\leq |x-1| \sum_{n=0}^{+\infty} |R_n| x^n \\
&\leq (1-x) \left(\sum_{n=0}^{N-1} |R_n| x^n + \frac{\varepsilon}{2} \underbrace{\sum_{n=N}^{+\infty} x^n}_{= \frac{x^N}{1-x}} \right) \\
&\leq (1-x) \sum_{n=0}^{N-1} |R_n| x^n + \frac{\varepsilon}{2} x^N \\
|S(x) - S| &\leq (1-x) \sum_{n=0}^{N-1} |R_n| x^n + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Or, on a $(1-x) \sum_{n=0}^{N-1} |R_n| x^n \xrightarrow[x \to 1^-]{} 0$, donc il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in [0,1[$ vérifiant $|x-1| \leq \delta$, on a :

$$(1-x) \sum_{n=0}^{N-1} |R_n| x^n \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par suite, pour tout $x \in [0,1[$ tel que $|x-1| \leq \delta$, on a :

$$|S(x) - S| \leq (1-x) \sum_{n=0}^{N-1} |R_n| x^n + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Il en résulte que $|S(x) - S| \xrightarrow[x \to 1^-]{} 0$. □

Corollaire 1.

Si $\sum a_n x^n$ est une série entière de la variable réelle, alors sa somme est continue sur l'intervalle de convergence de la série entière.

Exercice 10.

1. Montrer que $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ est continue sur $[-1,1]$.
2. Montrer que $g : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{\ln(n)}$ est continue sur $[-1,1[$

c. Série entière dérivée

Définition 5. *Série entière dérivée*

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On appelle **série entière dérivée** de $\sum a_n z^n$, la série entière

$$\sum (n+1)a_{n+1}z^n.$$

Lemme 2.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sum a_n z^n$ et la série entière $\sum a_{n+k} z^n$ ont même rayon de convergence.

Démonstration.

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+k}z^n = a_{n+k}z^{n+k}.\frac{1}{z^k}$$

Donc la suite $(a_{n+k}z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si, et seulement si, la suite $(a_{n+k}z^{n+k})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Or cette dernière est bornée si, et seulement si, la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ (car il s'agit de la "même" suite à laquelle on a "ajouté" un nombre fini de terme).
Par suite, $\sum a_n z^n$ et $\sum a_{n+k} z^n$ ont même rayon de convergence. □

Proposition 9.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Alors $\sum a_n z^n$ et sa série entière dérivée $\sum (n+1)a_{n+1}z^n$ ont même rayon de convergence.

Démonstration.

On note R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ et R' celui de $\sum (n+1)a_{n+1}z^n$. D'après le lemme précédent, $\sum (n+1)a_{n+1}z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence R'.
Soit $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $|z| < R'$. Alors la suite $(na_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et donc $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi ; d'où $|z| \leq R$. Ceci étant vrai pour tout z tel que $|z| < R'$, on a $R' \leq R$. Montrons l'inégalité dans l'autre sens :

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $|z| < R$ et $\rho \in \mathbb{R}$ tel que $|z| < \rho < R$. Alors la suite $(a_n\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, disons par une constante $M \geq 0$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a, comme $0 \leq \frac{|z|}{\rho} < 1$, par croissances comparées :

$$|na_n z^n| = n\left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n \underbrace{|a_n\rho^n|}_{\leq M} \leq Mn\left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Il en résulte que $|z| \leq R'$. Ceci étant vrai pour tout z tel que $|z| < R$, on a $R \leq R'$.
Ainsi, $R' = R$. □

Corollaire 2.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ ont même rayon de convergence.

Corollaire 3.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et $k \in \mathbb{Z}$. Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n^k a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Exercice 11.

Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, Les séries entières $\sum a_n z^n$ et la série entière $\sum n^\alpha a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

3. Dérivée de la somme d'une série entière réelle

Théorème 6. *Dérivation d'une série entière réelle*

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle de rayon de convergence $R > 0$. Alors sa somme f est de classe C^1 sur $]-R, R[$ et on a, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Démonstration.

D'après la proposition 9, $\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} = \sum (n+1) a_{n+1} x^n$ a pour rayon de convergence R. Par suite, les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ convergent normalement sur tout segment de $]-R, R[$. On peut alors vérifier les hypothèses du théorème d'interversion dérivation/somme :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto a_n x^n$ est une fonction polynomiale et donc est de classe C^1 sur $]-R, R[$ et on a, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$f_n'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n a_n x^{n-1} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

- $\sum f_n$ converge simplement sur $]-R, R[$ car $\sum f_n$ converge normalement sur tout segment de $]-R, R[$.
- $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de $]-R, R[$ car $\sum f_n' = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ converge normalement sur tout segment de $]-R, R[$.

Ainsi, d'après le théorème d'interversion dérivation/somme, $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^1 sur $]-R, R[$ et, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

□

On obtient alors, par récurrence :

Corollaire 4.

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle de rayon de convergence $R > 0$. Alors sa somme f est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

4. Primitive de la somme d'une série entière réelle

Théorème 7. *Primitive d'une série entière réelle*

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle de rayon de convergence $R > 0$, F une primitive sur $]-R, R[$ de sa somme f. Alors, pour tout $t \in]-R, R[$, on a :

$$F(x) = F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Exemple 3.

On a, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

En effet, $\ln(1-x) = -\int_0^x \frac{dt}{1-t}$, d'où

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Exercice 12.

Déterminer une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Partie C

Développements en série entière

Dans cette partie, U désigne un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$.

1. Développement en série entière d'une fonction d'une variable réelle

a. Définition et premier exemple

Définition 6. *Fonction développable en série entière*

Soit $r > 0$ et $f :]-r, r[\to \mathbb{C}$. On dit que f est **développable en série entière sur** $]-r, r[$ s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ telle que, pour tout $x \in]-r, r[$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Soit $f : U \to \mathbb{C}$. On dit que f est **développable en série entière** s'il existe $r > 0$ tel que f est développable en série entière sur $]-r, r[$.

Remarque 5.

Attention, le développement en série entière d'une fonction n'est pas, en général, valable sur tout l'ensemble de définition de la fonction !

Exemple 4.

Les fonctions suivantes sont développables en série entière :

- $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$
- $x \mapsto \ln(1-x)$

- On a pour tout $x \in]-1, 1[$,
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$
donc $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ est développable en série entière sur $]-1, 1[$.
- On remarque tout d'abord, que pour tout $x \in]-1, +\infty[$,
$$\ln(1-x) = -\int_0^x \frac{1}{1-t} dt.$$

Considérons alors la série entière $\sum x^n$ de rayon de convergence égal à 1 et notons f sa somme.

Alors f admet une primitive sur $]-1,1[$. On considère la primitive F de f qui s'annule en 0. Par le théorème d'interversion intégrale/somme, on a, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^x t^n dt\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Or, pour $t \in]-1,1[$, $f(t) = \dfrac{1}{1-t}$, donc pour $x \in]-1,1[$

$$\ln(1-x) = -\int_0^x \frac{1}{1-t}dt = -F(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Par suite, $x \mapsto \ln(1-x)$ est développable en série entière sur $]-1,1[$.

Exercice 13.

Montrer que $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$.

Proposition 10. *Unicité du développement en série entière*

Soit $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ des séries entière de la variable réelle. S'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in]-r,r[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n,$$

alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.

b. Séries de Taylor

Définition 7. *Série de Taylor*

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞. On appelle **série de Taylor** (ou plus précisément, série de Taylor-MacLaurin) de f, la série entière :

$$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Théorème 8.

Soit $r > 0$ et $f :]-r,r[\to \mathbb{C}$. Si f est développable en série entière, alors f est C^∞ sur $]-r,r[$

et f coïncide avec sa série de Taylor-MacLaurin sur $]-r,r[$ i.e., pour tout $x \in]-r,r[$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Remarque 6.

Attention ! La réciproque du théorème précédent est fausse ! Par exemple, la fonction $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ (prolongée par continuité en 0 par $f(0) = 0$) est C^∞ sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas égale à sa série de Taylor-MacLaurin au voisinage de 0.

2. Développements en série entière usuels

a. L'exponentielle, les fonctions trigonométriques et hyperboliques

Définition 8. *Exponentielle complexe*

Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose :

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Théorème 9.

La fonction $x \mapsto e^x$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \exp(x)$.

Exercice 14.

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$\exp(z + z') = \exp(z)\exp(z').$$
2. En déduire que :
   a) $\exp(z) \neq 0$
   b) $\exp(-z) = \dfrac{1}{\exp(z)}$;
   c) $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$;
   d) $|\exp(z)| = e^{\mathrm{Re}(z)}$;
   e) $|\exp(z)| = 1 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$.

Définition 9. *Les fonctions cosinus et sinus*

On définit les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ notées cos et sin, pour $x \in \mathbb{R}$, par :

$$\cos(x) = \mathrm{Re}(\exp(ix)) \qquad \text{et} \qquad \sin(x) = \mathrm{Im}(\exp(ix)).$$

Exercice 15.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos(x) = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2}, \quad \sin(x) = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i} \quad \text{et} \quad \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

2. Montrer que pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $\exp(z) = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$.

À toujours savoir retrouver ! Les développements en série entières sur $\mathbb{R}$ des fonctions trigonométriques et hyperboliques :

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \qquad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Correction.

Montrons que sin est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et déterminons ce développement.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sin(x) = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i}.$$

Or, les fonctions $x \mapsto e^{\pm ix}$ sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$, et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$e^{\pm ix} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\pm ix)^n}{n!}$$

La série entière $\sum a_n x^n$ avec $a_n = \dfrac{(ix)^n - (-ix)^n}{n!}$ est de rayon de convergence égal à $+\infty$ car il s'agit de la somme des séries entières $\sum \frac{(ix)^n}{n!}$ et $\sum -\frac{(-ix)^n}{n!}$ qui ont un rayon de convergence égal à $+\infty$. Et de plus, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{(-ix)^n}{n!} = \exp(ix) - \exp(-ix) = 2i\sin(x).$$

Ainsi, sin est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
2i\sin(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n - (-ix)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} i^n(1-(-1)^n)\frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n \text{ impair}} 2i^n \frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} 2 \underbrace{i^{2k+1}}_{=i((i)^2)^k=i(-1)^k} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} 2i(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},
\end{aligned}$$

d'où

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

b. Les fonctions $x \mapsto (1+x)^\alpha$

Théorème 10.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et on a, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

À toujours savoir retrouver ! Les développements en série entières sur $]-1,1[$ de :

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} x^n \qquad \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$$

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \qquad \arcsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Correction Pour le arcsinus !.

On se rappelle que pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

> *Remarque :* il se serait bien de savoir démontrer ce résultat... donc : Exercice, montrer l'égalité précédente !
> Indication : on sait que arcsin est la fonction réciproque de sin restreinte à $[-\pi/2, \pi/2]$ (la fonction sin est bien une bijection de $[-\pi/2, \pi/2]$ dans $[-1,1]$ car elle est strictement croissante sur $[-\pi/2, \pi/2]$). De plus, on connaît (ou on sait retrouver) la formule qui relie la dérivée de la réciproque d'une fonction et la dérivée de la fonction. Et on conclut grâce à la formule de trigonométrie la plus connue du monde qui relie le cosinus et le sinus !

La fonction $y \mapsto (1+y)^{-\frac{1}{2}}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et on a, pour tout $y \in]-1,1[$:

$$\begin{aligned}
(1+y)^{-\frac{1}{2}} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)...(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} y^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \times 1 \times 3 \times 5 \times ... \times (2n-1)}{2^n n!} y^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(2 \times 4 \times ... \times 2n) 2^n n!} y^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2} y^n
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in]-1,1[$, on a $y = -x^2 \in]-1,0[\subset]-1,1[$, donc :

$$\begin{aligned}
(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2} (-x^2)^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} x^{2n}
\end{aligned}$$

Il en résulte que $x \mapsto (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$. De plus, le rayon de convergence R de la série entière associée à ce développement est $R = 1$ (on peut obtenir ce résultat en utilisant la règle de D'Alembert pour les séries **tout court** puisqu'il s'agit d'une série entière lacunaire).

Ainsi, on peut primitiver sur $]-1,1[$ la somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} x^{2n}$, et on a, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\begin{aligned}
\int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} t^{2n} dt &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \int_0^x t^{2n} dt \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}
\end{aligned}$$

Ainsi, en remarquant que deux primitives sont égales à une constante près et que la primitive précédente s'annule en 0 tout comme $\arcsin(0)$, on obtient, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\arcsin = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

et donc que arcsin est développable en série entière sur $]-1,1[$.