# Chapitre XI

# Fonctions vectorielles

## Table des matières

**Partie A : Dérivation des fonctions vectorielles** **2**
1. Dérivée en un point . . . . . 2
2. Opérations sur les fonctions dérivables . . . . . 4
3. Fonctions de classe $C^k$ . . . . . 6

**Partie B : Intégration des fonctions vectorielles sur un segment** **8**
1. Primitives et intégrales . . . . . 9

**Partie C : Formules de Taylor** **13**
1. Formule de Taylor avec reste intégrale . . . . . 13
2. Inégalité de Taylor-Lagrange . . . . . 13
3. Formule de Taylor-Young . . . . . 13

Dans ce chapitre, $I$ désigne un intervalle de $R$ ; $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$ et $(E, \|\cdot\|)$ désigne un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

# Partie A

# Dérivation des fonctions vectorielles

## 1. Dérivée en un point

### a. Définition et premières propriétés

**Définition 1.** *Dérivabilité et vecteur dérivé*

Soit $f : I \to E$ une fonction et $t_0 \in I$. On dit que $f$ est **dérivable** en $t_0$ si l'application $\tau_{t_0} : I \setminus \{t_0\} \to E$, appelée **taux d'accroissement de $f$ en $t_0$** et définie par :

$$t \mapsto \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0},$$

admet une limite $\ell \in E$ en $t_0$.

Cette limite est appelée **vecteur dérivé** de $f$ en $t_0$ et est notée usuellement

$$f'(t_0) \quad \text{ou} \quad \frac{df}{dt}(t_0).$$

**Proposition 1.** *Développement limité à l'ordre 1*

Soit $f : I \to E$ et $t_0 \in I$. La fonction $f$ est dérivable en $t_0$ si, et seulement si, elle admet une développement limité à l'ordre 1 en $t_0$ i.e. s'il existe un vecteur $\ell \in E$ et une fonction $\varepsilon : I \to E$ avec $\lim\limits_{t \to t_0} \varepsilon(t) = 0_E$ telle que, pour tout $t \in I$ :

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)\ell + (t - t_0)\varepsilon(t).$$

Dans ce cas, on a $f'(t_0) = \ell$.

**Proposition 2.**

Soit $f : I \to E$ et $t_0 \in I$. Si $f$ est dérivable en $t_0$, alors $f$ est continue en $t_0$.

On rappelle la définition suivante :

**Définition-Proposition 2.** *Fonctions composantes*

Soit $f : I \to E$ et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de $E$. Il existe un unique $n$-uplet $(f_1, ..., f_n)$ de fonctions de $I$ dans $\mathbb{R}$ appelées **fonctions composantes** de $f$, qui vérifie, pour tout $t \in I$ :

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t)e_i.$$

**Proposition 3.**

Soit $f : I \to E$, $t_0 \in I$ et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de $E$. La fonction $f$ est dérivable en $t_0$ si, et seulement si, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la fonction composante $f_i$ de $f$ est dérivable en $t_0$.

Dans ce cas, on a :

$$f'(t_0) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(t_0)e_i.$$

**Exemple 1.**

Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ définie par $f : t \mapsto (\arctan(t), \arcsin(t))$. Alors $f$ est dérivable en tout point de $]-1, 1[$ et on a, pour $t_0 \in ]-1, 1[$,

$$f'(t_0) = (\frac{1}{1+t^2}, \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}).$$

**Exercice 1.**

On considère la fonction $f : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t^2) & \sin(\frac{1}{1-t}) \\ 2^{t^3+1} & \frac{1}{\ln(t^2)^2+1} \end{pmatrix}$.

Quelle est le domaine de définition de $f$ ? En quels points cette fonction est-elle dérivable et quel est le vecteur dérivée dans ce cas ?

### b. Dérivée à gauche et à droite en un point

**Définition 3.** *Vecteur dérivée à gauche/à droite*

Soit $f : I \to E$, $t_0 \in I$. On dit que $f$ est **dérivable à gauche (resp. à droite) en** $t_0$ si le taux d'accroissement $\tau_{t_0}$ de $f$ admet une limite à gauche (resp. à droite) en $t_0$.

Dans cette limite est appelée **vecteur dérivé à gauche (resp. à droite)** de $f$ en $t_0$ et est notée

$$f_g'(t_0) \quad (\text{resp. } f_d'(t_0))$$

### c. Fonction dérivée

**Définition 4.** *Fonction dérivée*

Soit $f : I \to E$. On dit que $f$ est **dérivable sur** $I$ si elle est dérivable en tout point de $I$. On note alors $f'$ (ou encore $\frac{df}{dt}$) la fonction de $I$ dans $E$ définie par :

$$f' : t \mapsto f'(t).$$

**Exercice 2.**

1. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer qu'une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ est constante si, et seulement si, elle est dérivable sur $\mathring{I}$ et sa fonction dérivée $f'$ est nulle sur $\mathring{I}$.
2. En déduire qu'une fonction $f : I \to E$ est constante si, et seulement si, elle est dérivable sur $\mathring{I}$ et sa fonction dérivée $f'$ est nulle sur $\mathring{I}$.

## 2. Opérations sur les fonctions dérivables

### a. Combinaisons linéaires

**Proposition 4.**

Soit $f, g : I \to E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $t_0 \in I$. Si $f$ et $g$ sont dérivables en $t_0$, alors $\lambda f + \mu g$ est dérivable en $t_0$ et on a :

$$(\lambda f + \mu g)'(t_0) = \lambda f'(t_0) + \mu g'(t_0).$$

De plus, si $f$ et $g$ sont dérivables sur $I$, on a $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.

**Remarque 1.**

On en déduit que l'ensemble des fonctions de $I$ dans $E$ dérivables sur $I$ est un espace vectoriel sur $K$ et que l'application $f \mapsto f'$ est une application linéaire de l'ensemble des fonctions de $I$ dans $E$ dérivables sur $I$ vers l'ensemble des fonctions de $I$ dans $E$.

### b. Compositions

**Proposition 5.** *Composition de fonctions*

Soit $f : I \to E$, $\varphi : J \to \mathbb{R}$ et $t_0 \in J$ avec $\varphi(t_0) \in I$. Si $\varphi$ est dérivable en $t_0$ et $f$ est dérivable en $\varphi(t_0)$, alors $f \circ \varphi$ est dérivable en $t_0$ et on a :

$$(f \circ \varphi)'(t_0) = \varphi'(t_0).f'(\varphi(t_0)).$$

De plus, si $\varphi$ est dérivable sur $J$ avec $\varphi(J) \subset I$ et $f$ est dérivable sur $I$, alors on a $(f \circ \varphi)' = \varphi'.f' \circ \varphi$.

**Proposition 6.** *Composition par une application linéaire*

Soit $F$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$, $f : I \to E$, $L : E \to F$ une application linéaire et $t_0 \in I$. Si $f$ est dérivable en $t_0$, alors $L \circ f$ est dérivable en $t_0$ et on a :

$$(L \circ f)'(t_0) = L(f'(t_0)).$$

De plus, si $f$ est dérivable sur $I$, alors on a $(L \circ f)' = L \circ f'$.

Démonstration.

On suppose $f$ dérivable en $t_0$. Comme $E$ est de dimension finie, $L$ est continue sur $E$. Notons $\tau_{t_0}$ le taux d'accroissement de $f$. On a, pour tout $t \in I$ avec $t \neq t_0$, par linéarité et continuité de $L$ :

$$\frac{L \circ f(t) - L \circ f(t_0)}{t - t_0} = L(\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}) \xrightarrow[t \to t_0]{} L(f'(t_0)).$$

D'où le résultat. □

### c. Produit de fonctions

**Proposition 7.**

Soit $E, F$ des espaces vectoriels normés de dimension finie, $G$ un espace vectoriel normé, $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire, $f : I \to E$, $g : I \to F$ des fonctions et $t_0 \in I$. Si $f$ et $g$ sont dérivables en $t_0$, alors $B(f, g) : t \mapsto B(f(t), g(t))$ est dérivable en $t_0$ et on a :

$$(B(f, g))'(t_0) = B(f'(t_0), g(t_0)) + B(f(t_0), g'(t_0)).$$

De plus, si $f$ et $g$ sont dérivables sur $I$, alors on a $(B(f, g))' = B(f', g) + B(f, g')$.

Démonstration.

On suppose que $f$ et $g$ sont dérivables en $t_0$. Alors on a, par bilinéarité de $B$, pour tout $t \in I$ avec $t \neq t_0$ :

$$\begin{aligned} B(f, g)(t) - B(f, g)(t_0) &= B(f(t), g(t)) - B(f(t_0), g(t)) + B(f(t_0), g(t)) - B(f(t_0), g(t_0)) \\ &= B(f(t) - f(t_0), g(t)) + B(f(t_0), g(t) - g(t_0)). \end{aligned}$$

Comme $E$ et $F$ sont de dimension finie, l'application bilinéaire $B$ est continue. Par suite, on a :

$$\begin{aligned} \frac{B(f, g)(t) - B(f, g)(t_0)}{t - t_0} &= \underbrace{B(\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}, g(t))}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} B(f'(t_0), g(t_0))} + \underbrace{B(f(t_0), \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0})}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} B(f(t_0), g'(t_0))} \\ &\xrightarrow[n \to +\infty]{} B(f'(t_0), g(t_0)) + B(f(t_0), g'(t_0)). \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

**Exemple 2.** *Produit scalaire de fonctions*

Soit $E$ un espace euclidien sur $\mathbb{K}$ de produit scalaire noté $(\cdot|\cdot)$ et $f, g : I \to E$ des fonctions dérivables sur $I$.

Alors l'application $(f|g) : t \mapsto (f(t)|g(t))$ est dérivable sur $I$ et

$$(f|g)' = (f'|g) + (f|g').$$

**Exercice 3.**

Soit $E$ un espace euclidien de produit scalaire noté $(\cdot|\cdot)$, de norme associée notée $\|\cdot\|$ et $f : I \to E$ une fonction dérivable sur $I$.

1. Discuter de la dérivabilité de la fonction $\|f\| : t \mapsto \|f(t)\|$ et déterminer sa dérivée aux points de dérivabilité.
2. On suppose que pour tout $t \in I$, $f(t) \in S(0,1)$. Montrer que, pour tout $t \in I$, $f(t)$ et $f'(t)$ sont orthogonaux.

## 3. Fonctions de classe $C^k$

### a. Définitions

**Définition 5.** *Fonctions de classe $C^1$*

Soit $f : I \to E$. On dit que $f$ est de **classe** $C^1$ sur $I$ si $f$ est dérivable sur $I$ et sa fonction dérivée $f'$ est continue sur $I$. On note $C^1(I, E)$ l'ensemble des fonctions de classe $C^1$ sur $I$.

On peut généraliser cette notion par récurrence :

**Définition 6.** *Fonctions de classe $C^k$*

Soit $f : I \to E$. On dit que $f$ est :

- **de classe** $C^0$ **sur** $I$ si $f$ est continue sur $I$ ;
- **de classe** $C^k$ **sur** $I$, pour $k \in \mathbb{N}^*$, si $f$ est dérivable sur $I$ et que $f'$ est de classe $C^{k-1}$ sur $I$ ;
- **de classe** $C^\infty$ si $f$ est de classe $C^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On note $C^k(I, E)$ l'ensemble des fonctions de classe $C^k$ sur $I$.

**Proposition 8.**

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. L'ensemble $C^k(I, E)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. De plus, si $k \geq 1$, l'application $D : C^k(I, E) \to C^{k-1}(I, E)$ telle que $D : f \mapsto f'$ est une application linéaire.

**Remarque 2.**

On a $C^\infty(I,E) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C^k(I,E)$.

### b. Opérations sur les fonctions de classe $C^k$

**Proposition 9.** *Opérations usuelles*

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
Soit $F$ un espace vectoriel normé de dimension finie.
Soit $f, g : I \to E$ et $\varphi : J \to \mathbb{R}$ avec $\varphi(J) \subset I$.
Soit $L : E \to F$ une application linéaire.

- Si $f, g$ sont de classe $C^k$ sur $I$, alors, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda f + \mu g$ est de classe $C^k$ sur $I$ ;
- Si $f, \varphi$ sont de classe $C^k$ sur $I, J$ respectivement, alors, $f \circ \varphi$ est de classe $C^k$ sur $J$ ;
- Si $f$ est de classe $C^k$ sur $I$, alors, $L \circ f$ est de classe $C^k$ sur $I$.

**Proposition 10.** *Formule de Leibniz*

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
Soit $E, F$ des espaces vectoriels normés de dimension finie, $G$ un espace vectoriel normé, $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire et $f : I \to E$, $g : I \to F$. Si $f$ et $g$ sont de classe $C^k$ sur $I$, alors $B(f,g)$ est de classe $C^k$ sur $I$ et on a, pour tout $p \leq k$ :

$$(B(f,g))^{(p)} = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} B(f^{(i)}, g^{(p-i)}).$$

# Partie B

## Intégration des fonctions vectorielles sur un segment

Dans cette partie, $a, b$ désignent des réels tels que $a < b$.

### a. Définition

**Lemme 1.**

Soit $f \in C_{pm}([a,b], E)$, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de $E$ et $(f_1, ..., f_n)$ les fonctions composantes de $f$ dans $\mathcal{B}$. Le vecteur $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left( \int_a^b f_i(t)dt \right) e_i$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$.

Grâce au lemme précédent, on peut donner le sens suivant à l'intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux à valeurs vectorielles :

**Définition 7.** *Intégrale d'une fonction continue par morceaux*

Soit $f \in C_{pm}([a,b], E)$, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de $E$ et $(f_1, ..., f_n)$ les fonctions composantes de $f$ dans $\mathcal{B}$. On note $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$, $\displaystyle\int_a^b f$ ou encore $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ le vecteur :

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=1}^{n} \left( \int_a^b f_i(t)dt \right) e_i.$$

### b. Propriétés de l'intégrale

**Proposition 11.**

On a les propriétés suivantes :

- $f \mapsto \displaystyle\int_a^b f$ est linéaire (de quel espace dans quel espace ?). Soit $f \in C_{pm}([a,b], E)$.
- pour $u : E \to F$ une application linéaire, $u(\displaystyle\int_a^b f) = \int_a^b u(f)$.
- pour $a < b < c$, $\displaystyle\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$.

**Proposition 12.**

Soit $f \in C_{pm}([a,b],E)$. On a :

$$\|\int_a^b f(t)dt\| \leq \int_a^b \|f(t)\|dt \leq (b-a)\|f\|_\infty.$$

### c. Sommes de Riemann

On rappelle et on généralise les résultats sur les sommes de Riemann (ici dans le cas particulier d'une subdivision régulière)

**Définition 8.** *Somme de Riemann*

Soit $f \in C_{pm}([a,b],E)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **somme de Riemann d'ordre** $n$ **de** $f$ le vecteur

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n})$$

**Théorème 1.**

Soit $f \in C_{pm}([a,b],E)$. Alors les sommes de Riemann d'ordre $n$ convergent vers $\int_a^b f$ quand $n$ tend vers l'infini i.e.

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f.$$

**Exercice 4.**

Rappels de sup. Déterminer les limites des suite de termes généraux suivants :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2} \qquad v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2+k^2} \qquad w_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}.$$

## 1. Primitives et intégrales

### a. Extension de la définition de l'intégrale

On rappelle qu'une fonction est continue par morceaux sur $I$ (autrement dit, $f \in C_{pm}(I,E)$) si elle est continue par morceaux sur tout segment de $I$.

**Définition 9.** *Extension de l'intégrale*

Soit $f \in C_{pm}(I, E)$ et $a, b \in I$. On pose

$$\int_a^b f(t)dt = \begin{cases} \int_a^b f(t)dt & \text{si } a < b \\ 0 & \text{si } a = b \\ -\int_b^a f(t)dt & \text{si } a > b. \end{cases}$$

**Proposition 13.** *Relation de Chasles*

Soit $f \in C_{pm}(I, E)$ et $a, b, c \in I$ avec $a \leq b \leq c$. Alors on a :

$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt.$$

### b. Primitives des fonctions continues

**Définition 10.** *Primitive*

Soit $f : I \to E$ une fonction continue. On dit qu'une fonction $g : I \to E$ est **une primitive** de $f$ sur $I$ si $g$ est dérivable sur $I$ et $g' = f$.

**Proposition 14.**

Soit $f, g, h \in C(I, E)$. Si $g$ et  sont des primitives de $f$ sur $I$, alors $g - h$ est une fonction constante sur $I$.

**Théorème 2.** *Théorème fondamental de l'Analyse*

Soit $f \in C(I, E)$ et $t_0 \in I$.

i) L'application $g : I \to E$ définie par :

$$g : t \mapsto \int_{t_0}^t g(x)dx$$

est l'unique primitive de $f$ qui s'annule en $t_0$.

ii) Pour toute primitive $F$ de $f$ sur $I$, on a, pour $a, b \in I$ :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

### c. Inégalité des accroissements finis

**Théorème 3.** *Inégalités des accroissements finis*

Soit $f \in C(I, E)$ une fonction de classe $C^1$ sur $\mathring{I}$. S'il existe $M \geq 0$ tel que, pour tout $t \in \mathring{I}$,

$$\|f'(t)\| \leq M$$

alors, pour tout $a, b \in I$, on a :

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M(b - a).$$

Démonstration.

On suppose qu'il existe $M \geq 0$ tel que, pour tout $t \in \mathring{I}$, $\|f'(t)\| \leq M$.

— *Cas particulier :* $a, b \in \mathring{I}$. Alors $f \in C^1([a, b], E)$ donc, d'après le théorème fondamental de l'Analyse

$$\|f(b) - f(a)\| = \|\int_a^b f'(t)dt\| \leq \int_a^b \|f'(t)\|dt \leq M(b - a).$$

— *Cas général :* $a, b \in I$. Soit $x, y \in \mathring{I}$. D'après le cas précédent, on a :

$$\|f(y) - f(x)\| =\leq M(y - x).$$

Et donc en passant à la limite quand $x \to a$ puis quand $y \to b$, on obtient le résultat. □

## d. Exercices de révision

**Exercice 5.**

Déterminer une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

$$t \mapsto \frac{t^3 + t^2 - 1}{t^2 + 2t + 2} \quad t \mapsto \frac{1}{1 + t^3} \quad t \mapsto \left(\frac{2t}{\sqrt{1 - t^4}}, e^t \cos(t)\right).$$

Correction.

1. La fonction $t \mapsto t^2 + 2t + 2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et on a, par division euclidienne :

$$t^3 + t^2 - 1 = (t^2 + 2t + 2)(t - 1) + 1$$

donc

$$\frac{t^3 + t^2 - 1}{t^2 + 2t + 2} = \frac{(t^2 + 2t + 2)(t - 1) + 1}{t^2 + 2t + 2} = t - 1 + \frac{1}{t^2 + 2t + 2}$$

et de plus, $t^2 + 2t + 2 = 1 + (t + 1)^2$, donc :

$$\int \frac{1}{t^2 + 2t + 2} dt = \int \frac{1}{1 + (t + 1)^2} dt = \arctan(t + 1)$$

Par suite,

$$\int \frac{t^3+t^2-1}{t^2+2t+2}dt = \frac{t^2}{2} - t + \arctan(t+1) + \text{ constante.}$$

# Partie C

## Formules de Taylor

Dans cette partie, $n$ désigne un entier naturel.

### 1. Formule de Taylor avec reste intégrale

**Théorème 4.** *Formule de Taylor avec reste intégrale*

Soit $f \in C^{n+1}(I, E)$. Pour $a, b \in I$, on a :

$$f(b) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(b-a)^i + R_n,$$

où

$$R_n = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n dt.$$

**Exercice 6.**

Montrer que le reste $R_n$ peut s'écrire :

$$R_n = (b-a)^{n+1} \int_0^1 \frac{f^{(n+1)}(a + t(b-a))}{n!}(1-t)^n dt.$$

### 2. Inégalité de Taylor-Lagrange

**Théorème 5.** *Inégalité de Taylor-Lagrange*

Soit $f \in C^{n+1}(I, E)$. S'il existe $M \geq 0$ tel que, pour tout $t \in I$, $\|f^{(n+1)}(t)\| \leq M$, alors, pour tous $a, b \in I$, on a :

$$\|f(b) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(b-a)^i\| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

### 3. Formule de Taylor-Young

**Théorème 6.** *Formule de Taylor-Young*

Soit $f \in C^n(I, E)$ et $x_0 \in I$. Alors on a :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i + o((x - x_0)^n).$$