Chapitre XII

Suites, séries d'intégrales et intégrales à paramètres

Table des matières

Partie A : Suites et séries d'intégrales **2**
1. Théorème de convergence dominée 2
2. Intégration terme à terme d'une série de fonctions 8

Partie B : Intégrale dépendant d'un paramètre **20**
1. Limite d'une intégrale à paramètre 20
2. Continuité d'une intégrale à paramètre 21
3. Dérivation d'une intégrale à paramètre 30

Annexe : Outils pour la résolution des problèmes **44**
1. Propriétés utiles des intégrales de Wallis 44
2. Formules de la moyenne 44

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; les intervalles considérés sont supposés d'intérieur non vide et a désigne un nombre réel.

Partie A

Suites et séries d'intégrales

Dans cette partie, I désigne un intervalle d'intérieur non vide.

1. Théorème de convergence dominée

Théorème 1. *Théorème de convergence dominée*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$. Si les propriétés suivantes sont vérifiées :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur I.
- la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f et f est continue par morceaux ;
- il existe une fonction g intégrable sur I qui domine tous les $|f_n|$, *i.e.* pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in I$,
$$|f_n(t)| \leq g(t) \qquad \textbf{hypothèse de domination}$$

alors, les f_n et f sont intégrables sur I et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_I \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right)\,\mathrm{d}t = \int_I f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 1.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x$ est bien définie et $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto \frac{\cos(nx)}{1+n^2x^2}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $[0, +\infty[$ comme quotient de fonctions continues sur $[0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{1+n^2x^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2x^2}$$

Or l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge car $2 > 1$, donc par comparaison f_n est intégrable sur $[1, +\infty[$ et donc sur $[0, +\infty[$ par continuité des f_n sur le segment $[0, 1]$.

Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{+\infty} \dfrac{\cos(nx)}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x$ converge et donc I_n est bien définie.

Déterminons cette limite grâce au théorème de convergence dominée :

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $[0, +\infty[$.
- <u>CVS sur $[0, +\infty[$:</u>
  Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a, si $x \neq 0$:

  $$|f_n(x)| \leq \frac{1}{1+n^2x^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

  et $f_n(0) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Ainsi, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers $f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ qui est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [0, +\infty[$,

  $$|f_n(x)|\frac{1}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{1+x^2} = g(t) \qquad \textbf{hypothèse de domination}$$

  et $g : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ car continue sur $[0, +\infty[$ et $g(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$.

Par suite, les f_n et f sont intégrables sur $[0, +\infty[$ (on le savait déjà !) et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Remarque 1.

Attention, l'hypothèse de domination est **essentielle** ! Par exemple, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{sur } [0, 1[, \quad f_n : t \mapsto n^2t^{n-1}.$$

converge simplement vers 0, mais la limite des intégrales n'est pas nulle !

Exercice 1.

Justifier l'existence des intégrales I_n et calculer la limite de la suite (I_n) pour :

1. $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}\,\mathrm{d}t.$
2. $I_n = \displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{(1-t^n)^{\frac{1}{n}}}\,\mathrm{d}t.$

Correction.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : t \mapsto \frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$.
   — Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}\,\mathrm{d}t$ converge.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f_n est continue sur $[0,+\infty[$ et on a, pour tout $t \in [0,+\infty[$, $|f_n(t)| \leq \frac{1}{1+t^2}$; donc f_n est intégrable sur $[0,+\infty[$ par comparaison à la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ intégrable sur $[0,+\infty[$ car continue sur $[0,+\infty[$ et $\frac{1}{1+t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ dont l'intégrale converge sur $[1,+\infty[$ (d'après le critère de Riemann en $+\infty$ - $2 > 1$).
   Par suite, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}\,\mathrm{d}t$ converge et donc I_n est bien définie.
   — Déterminons la limite potentielle de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On vérifie les hypothèses du théorème de convergence dominée :
   - pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0,+\infty[$.
   - la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers $f : t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{1+t^2} & \text{si } t \in [0,1[\\ \frac{1}{2+e^{-1}} & \text{si } t = 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$
     qui est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$;
   - pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [0,+\infty[$,
     $$|f_n(t)| \leq \frac{1}{1+t^2} = g(t) \qquad \textbf{hypothèse de domination}$$
     et $g : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

   Ainsi, d'après le théroème de convergence dominée les f_n et f sont intégrables sur $[0,+\infty[$ et on a :
   $$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = [\arctan(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : t \mapsto \frac{1}{(1-t^n)^{\frac{1}{n}}}$.
   — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminons la nature de $\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est continue sur $[0,1[$ et on a, pour tout $t \in [0,1[$,
   $$1 - t^n = (1-t)\sum_{k=0}^{n-1} t^k \underset{t\to1}{\sim} n(1-t)$$
   d'où :
   $$|f_n(t)| = \frac{1}{(1-t^n)^{\frac{1}{n}}} \underset{t\to1}{\sim} \frac{1}{\sqrt[n]{n}(1-t)^{\frac{1}{n}}}$$

Or, d'après le critère de Riemann en 1, $\int_0^1 \frac{1}{(1-t)^{\frac{1}{n}}}\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\frac{1}{n} < 1$ *i.e.* $n > 1$.
Par suite, par comparaison, f_n est intégrable sur $[0,1[$ si, et seulement si, $n \geq 2$.
La fonction f_n étant positive, son intégrale sur $[0,1[$ converge si, et seulement si, elle est intégrable sur $[0,1[$ et donc I_n est bien définie pour tout entier $n \geq 2$ (et $I_1 = +\infty$).

— Déterminons la limite potentielle de la suite $(I_n)_{n\geq 2}$. On vérifie les hypothèses du théorème de convergence dominée :
- pour tout entier $n \geq 2$, f_n est continue sur $[0,1[$.
- la suite $(f_n)_{n\geq 2}$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers $f : t \mapsto 1$ qui est continue sur $[0,1[$;
- pour tout entier $n \geq 2$, pour tout $t \in [0,1[$,

$$|f_n(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{1-t}} = g(t) \qquad \textbf{hypothèse de domination}$$

et $g : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ est intégrable sur $[0,+1[$ d'après le critère de Riemann en 1 ($\frac{1}{2} < 1$).

Ainsi, d'après le théroème de convergence dominée les f_n et f sont intégrables sur $[0,1[$ et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 1\,\mathrm{d}t = 1.$$

Problème 1. *Calcul de l'intégrale de Gauss*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie, pour $x \in \mathbb{R}_+$, par :

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n & \text{si } t \leq \sqrt{n} \\ 0 & \text{si } t > \sqrt{n}. \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction f qu'on explicitera.
2. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que :
$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$
3. pour $n \in \mathbb{N}$, on note $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.
   (a) En utilisant le changement de variable $x = \arccos\left(\dfrac{t}{\sqrt{n}}\right)$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$\int_0^{\sqrt{n}} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{n} W_{2n+1}$$
   (b) On rappelle le résultat *classique* $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. En déduire la limite de $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ quand n tend vers $+\infty$.
4. En déduire que la valeur de l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Correction.

1. CVS sur $\mathbb{R}_+$:
Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Alors, à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}^*$ (par exemple : $N = \lfloor t^2 \rfloor + 1$), pour tout entier $n \geq N$, $t \leq \sqrt{n}$ et donc, comme $\ln(1-x) = -x + o(x)$ quand $x \to 0$, on a :
$$f_n(t) = \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n = e^{n\ln(1-\frac{t^2}{n})} = e^{-t^2} e^{o(1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-t^2}$$
Par suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction $f : t \mapsto e^{-t^2}$.

2. On applique le théorème de convergence dominée :
   - pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ car continue sur $[0, \sqrt{n}[$ et $]\sqrt{n}, +\infty[$ et les limites à gauche et à droite de f_n en $\sqrt{n}$ valent toutes deux 0.
   - la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction $f : t \mapsto e^{-t^2}$ (question 1) et f est continue (composée de fonctions continues) ;
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,
   $$|f_n(t)| \leq f(t) \qquad \textbf{hypothèse de domination}$$
   Montrons cette inégalité. Comme f est positive, il suffit de la montrer sur $[0, \sqrt{n}]$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$ (par convexité de l'exponentielle). De plus, pour tout $t \in [0, \sqrt{n}]$, en prenant $x = -\frac{t^2}{n}$, on a $1 + x \geq 0$ et donc, par croissance de la fonction $u \mapsto u^n$ sur $\mathbb{R}_+$, on obtient $\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq (e^{-\frac{t^2}{n}})^n = f(t)$.
   La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f(t) = o(\frac{1}{x^2})$ en $+\infty$ donc, par comparaison à une intégrale de Riemann convergente ($2 > 1$), f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

   Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée, (les f_n et f sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$ - on le sait déjà !) et on a :
$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

3. (a) On applique le changement de variable annoncé - qui est bien valable car la fonction arcos est strictement monotone et C^1 sur $[0, 1]$ (et $\frac{t}{\sqrt{n}} \in [0, 1]$ pour $t \in [0, \sqrt{n}]$) ; ce qui donne :
$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{n}} f_n(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \left(1 - \cos^2(x)\right)^n \left(-\sqrt{n}\sin(x)\right)\mathrm{d}x \\
&= \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2(x)\right)^n \sin(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}\,\mathrm{d}x \\
\int_0^{\sqrt{n}} f_n(t)\,\mathrm{d}t &= \sqrt{n} W_{2n+1}.
\end{aligned}$$

   (b) On a :
$$\int_0^{\sqrt{n}} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{n} W_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{4n+2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

4. Il en résulte, d'après la question 2 et la question 3b, que :
$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Théorème 2. *Théorème de convergence dominée (cas continu)*

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$, $(f_\lambda)_{\lambda\in J}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ et $\lambda_0 \in \bar{J}$. Si les propriétés suivantes sont vérifiées :

- pour tout $\lambda \in J$, f_λ est continue par morceaux sur I.
- pour tout $t \in I$, $f_\lambda(t) \xrightarrow[\lambda\to\lambda_0]{} f(t)$ où $f : I \to \mathbb{K}$ est continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction g **intégrable** sur I qui **domine** tous les $|f_\lambda|$, *i.e.* pour tout $\lambda \in J$, pour tout $t \in I$,
$$|f_\lambda(t)| \leq g(t) \qquad \textbf{hypothèse de domination}$$

alors, les f_λ et f sont intégrables sur I et on a :

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \int_I f_\lambda(t)\,\mathrm{d}t = \int_I \left(\lim_{\lambda\to\lambda_0} f_\lambda(t)\right)\,\mathrm{d}t = \int_I f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 2.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Montrer que :
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$
converge. On note $I(\lambda)$ la valeur de cette intégrale.
2. Montrer que la fonction I admet une limite en $+\infty$ et la déterminer. *Remarque : on déterminera la valeur de deux façons ; en utilisant le théorème pour se faire la main ; puis en étant malin !*

Correction.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_\lambda : t \mapsto \frac{e^{-\lambda t}}{1+t^2}$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Alors f_λ est continue sur $[0,+\infty[$ et, pour tout $t \in [0,+\infty[$, $|f_\lambda(t)| \leq \frac{1}{1+t^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ donc f_λ est intégrable sur $[0,+\infty[$ par continuité sur le segment $[0,1]$ et par comparaison à une intégrale de Riemann convergente $(2>1)$ sur $[1,+\infty[$.
Par suite, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.
2. On remarque que par positivité des f_λ sur $[0,+\infty[$ et par croissance l'intégrale, $I(\lambda) \geq 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$. De plus, pour tous $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}_+$ avec $\lambda \leq \lambda'$, par croissance de l'exponentielle, on a $f_\lambda \geq f_{\lambda'}$ sur $[0,+\infty[$; donc, par croissance de l'intégrale, $I(\lambda) \geq I(\lambda')$.
La fonction $I : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est donc décroissante, minorée par 0, d'où, d'après le théorème de la limite monotone, I admet une limite finie en $+\infty$.

   Déterminons cette limite :
   1ère façon : avec le théorème de convergence dominée (cas continu).
   On vérifie les hypothèses du théorème :
   - pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$, f_λ est continue sur $[0,+\infty[$.
   - pour tout $t \in [0,+\infty[$, on a
   $$f_\lambda(t) = \frac{e^{-\lambda t}}{1+t^2} \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0$$
   et $f : t \mapsto 0$ est continue sur $[0,+\infty[$;

- On a, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$, pour tout $t \in [0, +\infty[$,

$$|f_\lambda(t)| \leq \frac{1}{1+t^2} = g(t) \qquad \textbf{hypothèse de domination}$$

et $g : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ car continue sur $[0, +\infty[$ et intégrable au voisinage de $+\infty$ par comparaison à une intégrable de Riemann convergente.

Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée (cas continu), les f_λ et f sont intégrables sur $[0, +\infty[$ (on le savait déjà !) et on a :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} I(\lambda) = \int_0^{+\infty} \lim_{\lambda \to +\infty} f_\lambda(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} 0\,\mathrm{d}t = 0.$$

2nde façon : par majoration de $I(\lambda)$ par une intégrale connue.
Pour tout $\lambda > 0$, on a, par croissance de l'intégrale :

$$I(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda} \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0.$$

Ainsi, comme $I(\lambda) \geq 0$, d'après le théorème des gendarmes, $I(\lambda) \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0$.

2. Intégration terme à terme d'une série de fonctions

Théorème 3. *Intégration terme à terme (cas à valeurs positives)*

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. Si les propriétés suivantes sont vérifiées :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et continue par morceaux sur I ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur I ;
- la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I et sa somme $S : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue par morceaux sur I,

alors, l'égalité suivante est valable dans $[0, +\infty]$:

$$\int_I S(t)\,\mathrm{d}t = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

En particulier, S est intégrable sur I si, et seulement si,

$$\sum \left(\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t\right) \text{ converge.}$$

Remarque 2.

Le théorème précédent nous dit donc que si (f_n) est une suite de fonctions **positives** sur I tel que $\sum f_n$ **converge simplement** sur I - dans les faits, on vérifiera succinctement et sans écrire toutes les justifications, les hypothèses de continuité par morceaux, alors on peut intervertir toujours la somme

et l'intégrale.

Et ce, même si un des deux termes vaut $+\infty$: en fait, dans ce cas, l'intégrale finale diverge si, et seulement si, la série finale diverge - c'est ce que dit le "en particulier" du théorème d'ailleurs !

Très souvent on utilisera ce théorème (et le suivant) pour calculer l'intégrale d'une fonction f que l'on peut, en partie, développer en série entière :

Exemple 2.

On a $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}\,\mathrm{d}t = \zeta(2)$.

On a remarque que, pour $t \in]0,1[$,

$$\frac{\ln(t)}{t-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-t^n \ln(t)).$$

Ainsi, on pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \mapsto -t^n \ln(t)$.

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est positive sur $]0,1[$ car $-\ln$ l'est ;
- On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in]0,1[$, $|f_n(t)| \leq |\ln(t)|$ donc f_n est intégrable sur $]0,1[$.
- $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,1[$ vers $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t-1}$ qui est continue sur $]0,1[$.

Les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme (cas positif) sont donc vérifiées, d'où, dans $[0,+\infty]$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}\,\mathrm{d}t &= -\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 t^n \ln(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2} \text{ via une IPP} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

Or la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge vers $\zeta(2)$ donc, d'après le théorème d'intégration terme à terme, $S : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t-1}$ est intégrable sur $]0,1[$ (*on aurait d'ailleurs pu le montrer dès le début !*) et on a :

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \zeta(2).$$

Exercice 3.

Calculer les intégrales suivantes en fonction de $\zeta(3)$:

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$;
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t-1}\,\mathrm{d}t$.

Correction.

1. On note $f : t \mapsto \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}$. On a remarque que, pour $t \in]-1,1[$,

$$\ln(1-t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-\frac{t^{n+1}}{n+1}).$$

d'où, pour tout $t \in]0,1[$:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-\frac{\ln(t)t^n}{n+1}).$$

Ainsi, on pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \mapsto -\frac{\ln(t)t^n}{n+1}$.

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est positive sur $]0,1[$ car $-\ln$ l'est ;
- On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in]0,1[$, $|f_n(t)| \leq \frac{|\ln(t)|}{n+1}$ donc f_n est intégrable sur $]0,1[$.
- $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,1[$ vers f qui est continue sur $]0,1[$.

Les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme (cas positif) sont donc vérifiées, d'où, dans $[0,+\infty]$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t &= -\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 \frac{t^n\ln(t)}{n+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^3} \quad \text{via une IPP} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}\end{aligned}$$

Or la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^3}$ converge vers $\zeta(3)$ donc, d'après le théorème d'intégration terme à terme, f est intégrable sur $]0,1[$ (*on aurait encore une fois pu le montrer dès le début !*) et on a :

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3} = \zeta(3).$$

2. On note $f : t \mapsto \dfrac{t^2}{e^t-1}$. Pour $t > 0$, on a $e^{-t} \in]0,1[$, d'où :

$$\begin{aligned} f(t) &= t^2 e^{-t} \frac{1}{1-e^{-t}} \\ &= t^2 e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-t}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} t^2 e^{-(n+1)t} \end{aligned}$$

On pose alors $f_n : x \mapsto t^2 e^{-(n+1)t}$.

- pour $n \in \mathbb{N}$, f_n est positive et continue sur $[0, +\infty[$;
- pour $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0, +\infty[$ et on a $f_n(t) = \underset{x \to +\infty}{o}(\frac{1}{t^2})$, donc f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$.
- $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers f qui est continue sur $]0, +\infty[$.

Ainsi, d'après le théorème d'intégration terme à terme sont donc vérifiées, d'où, dans $[0, +\infty]$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t - 1} \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} t^2 e^{-(n+1)t} \, \mathrm{d}t \right).$$

De plus, la série numérique $\sum \int_0^{+\infty} f_n(t) \, \mathrm{d}t$ converge car, en effectuant deux IPP, on obtient l'égalité, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-(n+1)t} \, \mathrm{d}t = \left[-\frac{t^2 e^{-(n+1)t}}{n+1} \right]_0^{+\infty} + \left[-\frac{2te^{-(n+1)t}}{(n+1)^2} \right]_0^{+\infty} + \left[-\frac{2e^{-(n+1)t}}{(n+1)^3} \right]_0^{+\infty} = \frac{2}{(n+1)^3}.$$

et $\sum \frac{2}{(n+1)^3}$ converge (série de Riemann convergente).

Il en résulte, d'après que le théorème d'intégration terme à terme, que f est intégrable sur $]0, +\infty[$ et on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t - 1} \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(n+1)^3} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} = 2\zeta(3).$$

Remarque : on aurait également pu effectuer au départ un changement de variable pour montrer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t - 1} \, \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\ln(u)^2}{1-u} \, \mathrm{d}u,$$

puis effectuer un raisonnement similaire à celui de l'exemple précédent pour trouver le résultat.

Problème 2. *Calcul de $\zeta(2)$*

1. (a) Rappeler (ou retrouver) le développement en série entière de arcsin sur $]-1, 1[$; ou plus précisément, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}.$$

(b) En déduire que, pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sin^{2n+1}(t) = t.$$

2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n W_{2n+1} = \frac{\pi^2}{8}.$$

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n W_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)^2}$.

4. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ puis de $\zeta(2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Correction.

1. (a) On rappelle (voire chapitre "Séries entières") que, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \ldots \times (2n)} \frac{1}{2n+1} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{1}{2n+1} = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \frac{1}{2n+1}.$$

(b) Soit $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$. On pose $x = \sin(t)$. Alors $x \in [0, 1[$, donc, d'après la question précédente :

$$t = \arcsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sin^{2n+1}(t).$$

2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \mapsto a_n \sin^{2n+1}(t)$.
   - pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est positive sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ car a_n et sin le sont ;
   - On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc f_n est intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.
   - D'après la question précédente, $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ vers $S : t \mapsto t$ qui est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ (*ça ne semble pas très satisfaisant de justifier la CVS de cette façon même si c'est tout à fait correct... mais on peut tout de même, pour être "sûr", montrer que $\sum f_n$ CVS sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ directement - cela revient quasiment au calcul du rayon de convergence de $\sum a_n x^n$!*).

   Par suite, d'après le théorème d'intégration terme à terme, S étant continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et donc intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, la série $\sum a_n (\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(t)\,\mathrm{d}t)$ converge et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n W_{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} S(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{8}.$$

Remarque : On pouvait se passer de l'utilisation du théorème d'intégration terme à terme ici :

En effet, supposons que $\sum a_n$ converge et posons $g_n : x \mapsto a_n x^n$.

— Comme (a_n) est à valeurs positives, on a, sur $[-1,1]$, $\|g_n\|_\infty = a_n$ donc $\sum \|g_n\|_\infty$ converge ; d'où la convergence normale sur $[-1,1]$.

  Les g_n sont continues sur $[-1,1]$ car polynomiaux et $\sum g_n$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers sa somme g donc g est continue. Par suite, comme arcsin est continue sur $[-1,1]$ et $\arcsin_{|]-1,1[} = g_{|]-1,1[}$, on a $g = \arcsin$ sur $[-1,1]$.

  On aurait pu avoir directement cette conclusion grâce au théorème d'Abel radial.

  Il en résulte que la formule de la question 1.b) est valable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

— Par des raisonnement et calcul similaires à ceux effectués pour $\sum g_n$, $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ vers $S : t \mapsto t$ et de plus, les f_n étant continues sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a, par le théorème d'interversion somme/intégrale :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} S(t)\,\mathrm{d}t$$

Il nous reste à démontrer que notre hypothèse "$\sum a_n$ converge" est bien vérifiée !

— *1ère façon : rapide mais pas très économique.*

  D'après la formule de Stirling $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, on a :

$$a_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}\frac{1}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{4^n \times 2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}\frac{1}{2n} = \frac{1}{2\sqrt{\pi} n^{\frac{3}{2}}}$$

  d'où, par comparaison avec le terme général d'une série de Riemann convergente ($\frac{3}{2} > 1$), $\sum a_n$ converge.

— *2nde façon : plus astucieuse mais bien moins chère.*

  On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sqrt{2n+1} = \sqrt{\prod_{i=1}^{n} \frac{2i+1}{2i-1}} \text{ et } \forall\, i \in \mathbb{N}^*, \sqrt{\frac{2i+1}{2i-1}} \times \frac{2i-1}{2i} = \frac{\sqrt{(2i)^2-1}}{2i} \leq 1.$$

  Par suite, on a :

$$(2n+1)\sqrt{2n+1}a_n = \prod_{i=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{2i+1}{2i-1}} \times \frac{2i-1}{2i}\right) \leq 1.$$

  D'où $0 \leq a_n \leq \dfrac{1}{(2n+1)\sqrt{2n+1}} = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$; et donc $\sum a_n$ converge par comparaison avec le terme général d'une série de Riemann convergente.

3. On rappelle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{2n+1} = \frac{4^n}{\binom{2n}{n}} \cdot \frac{1}{2n+1}$ (voire problème 5) ; donc :

$$W_{2n+1} = \frac{1}{a_n} \times \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

4. Par suite, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n W_{2n+1} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Passons à la valeur de $\zeta(2)$. On a besoin des résultats suivants sur les familles sommables :

— une suite à valeurs numériques est une famille sommable si, et seulement si, la série associée est absolument convergente ; et dans ce cas, la somme de la famille et la somme de la série sont égales.

— pour I, J des ensembles, si $(a_i)_{i \in I}$ est une famille sommable et $\sigma : J \to I$ est en bijection, alors $(a_{\sigma(j)})_{j \in J}$ est sommable et les sommes de ces deux familles sont égales (c'est ce qu'on appelle le *changement d'indice*).

— le théorème de sommation par paquets - dans notre cas, il y aura seulement deux paquets.

La suite $(\frac{1}{n^2})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est le terme générale d'une série absolument convergente, donc c'est une famille sommable et les sommes famille/série coïncident. Par sommation par paquets sur la partition $\mathbb{N}^* = 2\mathbb{N}^* \sqcup 2\mathbb{N} + 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\zeta(2) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} \\
&= \sum_{n \in 2\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} + \sum_{n \in 2\mathbb{N}+1} \frac{1}{n^2} \\
&= \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{1}{(2p+1)^2} \\
&= \frac{1}{4} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \\
\zeta(2) &= \frac{1}{4}\zeta(2) + \frac{\pi^2}{8}
\end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) = \frac{4}{3}\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Théorème 4. *Intégration terme à terme (cas à valeurs dans $\mathbb{K}$)*

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans $\mathbb{K}$. Si les propriétés suivantes sont vérifiées :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur I ;

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n <u>est intégrable sur I</u> ;
- la série de fonctions $\sum f_n$ <u>converge simplement sur I</u> et sa somme $S : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue par morceaux sur I ;
- La série numérique :

$$\sum \left(\int_I |f_n(t)| \, \mathrm{d}t \right) \text{ converge,}$$

alors, S est intégrable sur I et :

$$\int_I S(t) \, \mathrm{d}t = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n(t) \, \mathrm{d}t \right).$$

Exemple 3.

On a $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t} \, \mathrm{d}t = \frac{-\pi^2}{12}$.

En effet, cette intégrale existe car, $f : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1+t}$ est continue sur $]0,1]$ et pour tout $t \in]0,1]$,

$$|\frac{\ln(t)}{1+t}| \leq |\ln(t)|.$$

Or ln est intégrable sur $]0,1]$; donc f l'est aussi.
On a, pour $t \in]0,1[$,

$$\frac{\ln(t)}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n \ln(t).$$

Ainsi, on pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \mapsto (-1)^n t^n \ln(t)$.

- On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in]0,1]$, $|f_n(t)| \leq |\ln(t)|$ donc f_n est intégrable sur $]0,1]$.
- $\sum f_n$ converge simplement sur I vers $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1+t}$ qui est continue sur $]0,1]$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t &= -\int_0^1 t^n \ln(t)\,\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{IPP}}{=} -\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln(t)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{t^n}{n+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{(n+1)^2}.
\end{aligned}$$

  Donc, $\sum \int_0^1 |f_n| = \sum \dfrac{1}{(n+1)^2}$ est une série numérique convergente (série de Riemann avec $2 > 1$).

Les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont donc vérifiées, d'où

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n t^n \ln(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \\
&= -\frac{\pi^2}{12}.
\end{aligned}$$

Cette dernière égalité peut être obtenue en effectuant une sommation par paquets sur les nombres pairs et impairs pour faire apparaître une relation avec la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Exercice 4.

Dans chaque question, on s'assurera de la convergence des intégrales en jeu.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 0$ et déterminer une expression de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ sous forme de somme de série.

Correction.

1. On applique la même technique que pour l'exemple précédent en developpant en série entière $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ et on trouve :
$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$
les intégrale et somme en jeu étant bien convergentes.
2. On a, via le changement de variable *licite* (à vérifier !) $u = \frac{1}{t}$:
$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_1^{+\infty} \frac{\ln(u)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \quad (*)$$
donc, comme somme d'intégrales convergente, $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et on a, d'après $(*)$:
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 0$$
et de plus, toujours d'après $(*)$:
$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

Remarque 3.

Parfois, les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme ne sont pas satisfaites (plus précisément, le dernier point) mais on peut montrer que sa conclusion est tout de même valide en appliquant le théorème de convergence dominée à la suite des sommes partielles de la série $\sum f_n$.
Voici un exemple typique d'un tel cas dans l'exercice suivant :

Exercice 5.

1. Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha n+1}.$$

2. En déduire la valeur de chacune des sommes suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}$$

Correction.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On remarque que, pour tout $t \in [0,1[$, $y = t^\alpha \in [0,1[\subset -1,1[$, donc :

$$\frac{1}{1+t^\alpha} = \frac{1}{1+y} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1^n)y^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{\alpha n}.$$

On pose donc, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \mapsto (-1)^n t^{\alpha n}$.
Les f_n sont intégrables sur $[0,1[$ car continues sur $[0,1]$ et on a $\int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha n+1}$ qui est le terme général d'une série divergente. Donc le théorème d'intégration terme à terme est inutilisable ! Mais sans la valeur absolue, on obtiendrait $\frac{(-1)^n}{\alpha n+1}$ qui est cette fois le terme général d'une série convergente (d'après le critère des séries alternées) ; on se dit alors qu'on peut peut-être contourner le problème en revenant au théorème de convergence dominée sur la suite des sommes partielles de la série $\sum f_n$.
C'est le même principe que dans le cas de certaines séries alternées de fonctions, lorsqu'il n'y a pas convergence normale, mais qu'on a tout de même convergence uniforme !
En parlant de convergence uniforme, on pourra vérifier que le théorème d'interversion somme/intégrale est inutilisable ici !.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$.

- Comme les f_k sont continues sur $[0,1[$, les S_n le sont ;
- D'après la remarque initiale, on a $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sum f_n$ converge simplement sur $[0,1[$ vers $f : t \mapsto \frac{1}{1+t^\alpha}$ qui est bien continue sur $[0,1[$;
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [0,1[$, on a, d'après le critère des séries alternées :

$$|S_n(t)| = |\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{\alpha n}| \leq |(-1)^0 t^{\alpha 0}| = 1 = g(t)$$

  Et $g : t \mapsto 1$ est bien intégrable sur $[0,1]$ et donc sur $[0,1[$ car continue sur le segment $[0,1]$.

Par suite, d'après le théorème de convergence dominée, les S_n et f sont intégrables sur $[0,1[$

(mais on le savait déjà !), et on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{N\to+\infty} \int_0^1 S_N(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \int_0^1 t^{\alpha n}\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{\alpha n+1} \\
\int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha n+1}.
\end{aligned}$$

2. D'après la question précédente appliquée à $\alpha = 2, 3$ et 4, on obtient :
   — pour $\alpha = 2$:
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = [\arctan(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$
   — pour $\alpha = 3$ et 4, après une décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $1/(1+X^\alpha)$ pour déterminer une primitive de $t \mapsto \frac{1}{1+t^\alpha}$, on obtient - après beaucoup de calculs ! - les valeurs suivantes :
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\pi + \ln(2)\right) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\pi + 2\ln(1+\sqrt{2})\right).$$

Partie B

Intégrale dépendant d'un paramètre

Dans cette partie, A désigne une partie d'un espace vectoriel normé E de dimension finie et I désigne un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$.

1. Limite d'une intégrale à paramètre

On suppose que A est un intervalle de $\mathbb{R}$. Le théorème suivant n'est qu'une reformulation de la version continue du théorème de convergence dominée :

Théorème 5. *Limite d'une intégrale à paramètre*

Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$ une fonction et a une extrémité de l'intervalle A. Si f vérifie les propriétés suivantes :

- pour tout $x \in A$, $f(x, \cdot) : t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- pour tout $t \in I$, $f(\cdot, t) : x \mapsto f(x,t)$ admet une limite en a et l'application $h : t \mapsto \lim\limits_{x \to a} f(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction $g : I \to \mathbb{R}$ positive et **intégrable** sur I telle que, pour tout $(x,t) \in A \times I$:
$$|f(x,t)| \leq g(t), \qquad \textbf{hypothèse de domination}$$

alors la fonction h est intégrable sur I et on a :

$$\lim_{x \to a} \left(\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \right) = \int_I \left(\lim_{x \to a} f(x,t) \right) \mathrm{d}t.$$

Exercice 6.

Justifier, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, l'existence de

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+tx)}\,\mathrm{d}t$$

et calculer $\lim_{x \to +\infty} I(x)$.

Correction.

On pose, pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $t \in [0, +\infty[$, $f(x,t) = \frac{1}{(1+t^2)(1+tx)}$.

— Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrons la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+tx)}\,\mathrm{d}t$.

La fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $[0, +\infty[$ et on a :

$$|f(x,t)| \leq \frac{1}{1+t^2}$$

Or, $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ donc, par comparaison, $t \mapsto f(x,t)$ l'est aussi. Par suite, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+tx)}\,\mathrm{d}t$ converge.
Il en résulte que la fonction I est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.

— On vérifie les hypothèses du théorème de la limite d'une intégrale à paramètres :
- pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x,\cdot) : t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $[0, +\infty[$;
- pour tout $t \in [0, +\infty[$, on a :

$$\frac{1}{(1+t^2)(1+tx)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 = h(t)$$

  et $h : t \mapsto 0$ est continue sur $[0, +\infty[$;
- Soit $t \in [0, +\infty[$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$|f(x,t)| \leq \frac{1}{1+t^2} = g(t), \qquad \textbf{hypothèse de domination}$$

  et $g : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ *(comme d'habitude !)*.

Par suite, la fonction $h : t \mapsto 0$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ *(mais on ne le savait que trop bien !)* et on a :

$$\lim_{x \to +\infty} I(x) = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+tx)} \right) \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} 0 \,\mathrm{d}t = 0.$$

2. Continuité d'une intégrale à paramètre

Théorème 6. *Théorème de continuité d'une intégrale à paramètre*

Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$ une fonction. Si f vérifie les propriétés suivantes :
- pour tout $t \in I$, $f(\cdot, t) : x \mapsto f(x,t)$ est **continue** sur A ;
- pour tout $x \in A$, $f(x, \cdot) : t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction $g : I \to \mathbb{R}$ positive et **intégrable** sur I telle que, pour tout $(x,t) \in A \times I$:

$$|f(x,t)| \leq g(t), \qquad \textbf{hypothèse de domination}$$

alors la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.

Exemple 4. *Transformée de Fourier*

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$. On appelle **transformée de Fourier de** φ et on note $\mathcal{F}(\varphi)$ la fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$:

$$\mathcal{F}(\varphi) : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{-ixt}\,\mathrm{d}t.$$

La transformée de Fourier de φ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Pour $x, t \in \mathbb{R}$, on pose $f(x,t) = \varphi(t)e^{-ixt}$. Montrons que $F(\varphi)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $]-\infty, +\infty[$. En effet, φ est continue par morceaux sur $]-\infty, +\infty[$ par hypothèse et la fonction $t \mapsto e^{-ixt}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée des applications continues $t \mapsto -ixt$ (continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale) et $z \mapsto \exp(z)$ (continue sur $\mathbb{C}$ car somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$) ; donc $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $]-\infty, +\infty[$ comme produit de fonctions continues par morceaux sur $]-\infty, +\infty[$.
De plus, on a, pour tout $t \in]-\infty, +\infty[$,

$$|f(x,t)| \leq |f(t)|$$

donc, φ étant intégrable sur $]-\infty, +\infty[$, $t \mapsto f(x,t)$ l'est aussi.
Par suite, l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)e^{-ixt}\,\mathrm{d}t$ converge et donc $F(\varphi)(x)$ est bien définie.
Il en résulte que la fonction $F(\varphi)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Montrons la continuité sur $\mathbb{R}$ de $F(\varphi)$.

- pour tout $t \in]-\infty, +\infty[$, $f(\cdot, t) : x \mapsto \varphi(t)e^{-ixt}$ est continue sur $\mathbb{R}$ car la fonction $x \mapsto e^{-ixt}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (même raisonnement que précédemment) ;
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x, \cdot) : t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $]-\infty, +\infty[$ (déjà fait) ;
- On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $t \in]-\infty, +\infty[$:

$$|f(x,t)| \leq |\varphi(t)| = g(t), \qquad \textbf{hypothèse de domination}$$

  Et comme φ est intégrable sur $]-\infty, +\infty[$, g l'est aussi.

Ainsi, d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, $F(\varphi)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7.

On pose $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition de F.
2. Montrer que F est continue sur son domaine de définition.
3. Établir le tableau des variations de F en précisant les valeurs/limites aux bornes de son domaine. *Indication : on justifiera la monotonie de F en utilisant la définition et pas par la dérivation !*

Correction.

On pose $f : (x,t) \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[0, +\infty[$ et on a :
   — si $x \geq 0$, $t^2|f(x,t)| \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ ou 1, donc $f(x,t) = \underset{t \to +\infty}{O}(\frac{1}{t^2})$; d'où, par comparaison à

une fonction intégrable sur $[1, +\infty$ (critère de Riemann en $+\infty$ avec $2 > 1$), $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. La fonction $t \mapsto f(x,t)$ étant de plus continue sur $[0, +\infty[$, elle est donc intégrable sur $[0, +\infty[$.
Par suite, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et donc $F(x)$ est bien défini.

— si $x < 0$, on a $f(x,t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$ donc il existe un $t_0 \in [0, +\infty[$ tel que, pour tout $t \geq t_0$, $f(x,t) \geq 1$. Or $\int_0^{+\infty} 1\,\mathrm{d}t$ diverge, donc $\int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ diverge.
Par suite, $F(x) = +\infty$!

Ainsi, $F(x)$ est défini si, et seulement si, $x \in \mathbb{R}_+$. Donc $\mathcal{D}_F = \mathbb{R}_+$.

2. On vérifie les hypothèses du théorème de continuité des intégrales à paramètres :
   - pour tout $t \in [0, +\infty[$, $f(\cdot, t) : x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$;
   - pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x, \cdot) : t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $[0, +\infty[$;
   - Soit $t \in [0, +\infty[$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$|f(x,t)| \leq \frac{1}{1+t^2} = g(t), \qquad \textbf{hypothèse de domination}$$

   et $g : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

   Ainsi, la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

3. Pour tout $x, x' \in \mathbb{R}_+$ avec $x < x'$ et $t \in]0, +\infty[$, on a $f(x,t) > f(x',t)$ par stricte croissance de la fonction exponentielle, donc, par croissance de l'intégrale, F est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
   De plus, on a :

$$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} = [\arctan(t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

   et, d'après l'exercice 2 ou en appliquant le théorème de limite d'une intégrale à paramètres, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^{-xt}}{1+t^2} \right) \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} 0\,\mathrm{d}t = 0.$$

   d'où le tableau de variations de F :

x	0	$+\infty$
F	$\frac{\pi}{2}$ ↘	0

Corollaire 1. *Extension du théorème de continuité*

On suppose ici que A est un intervalle de $\mathbb{R}$. Si on a les mêmes hypothèses que le théorème précédent en modifiant l'hypothèse de domination par :

- **Pour tout segment** $[a, b]$ **de** A, il existe une fonction $g : I \to \mathbb{R}$ positive et **intégrable**

sur I telle que, pour tout $(x,t) \in [a,b] \times I$:

$$|f(x,t)| \leq g(t), \qquad \textbf{hypothèse de domination sur tout segment}$$

alors la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.

Exercice 8.

Déterminer le domaine de définition de F et montrer que F est continue sur ce domaine pour :

1. $F : x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t}\,\mathrm{d}t$.
2. $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{1} \frac{\cos(xt)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Correction.

1. On pose $f(x,t) = \frac{e^{-xt}}{t}$.
   — Déterminons le domaine de F.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $[1,+\infty[$ et on a :
   - si $x > 0$: par croissances comparées,

   $$t^2|f(x,t)| = te^{-xt} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \text{ d'où } |f(x,t)| = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

   Par comparaison à une fonction intégrable sur $[1,+\infty[$ (critère de Riemann en $+\infty$ avec $2>1$), $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
   Par suite, $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.
   - si $x \leq 0$:

   $$f(x,t) = \frac{e^{-xt}}{t} \geq \frac{1}{t}$$

   Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann divergente ($1 \leq 1$) donc, par comparaison, $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge.
   Il en résulte que $F(x)$ existe si, et seulement si, $x \in \mathbb{R}_+^*$ donc $\mathcal{D}_F = \mathbb{R}_+^*$.
   — Montrons la continuité de F sur $\mathbb{R}_+^*$. On vérifie les hypothèses du théorème de continuité des intégrales à paramètres.
   - pour tout $t \in [1,+\infty[$, $f(\cdot,t) : x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$;
   - pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x,\cdot) : t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $[1,+\infty[$;
   - Soit $a > 0$. Soit $t \in [1,+\infty[$. Pour tout $x \in [a,+\infty[$:

   $$|f(x,t)| \leq \frac{e^{-at}}{t} = g(t), \qquad \textbf{hypothèse de domination}$$

   et $g : t \mapsto \frac{e^{-at}}{t}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (même raisonnement que précédemment).

Ainsi, la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t}\,\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. On pose $f(x,t) = \frac{\cos(xt)}{x^2+t^2}$.
   — Déterminons le domaine de F.
   Soit $x \in \mathbb{R}$.
   - <u>si $x \neq 0$:</u> la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur le segment $[0,1]$, donc elle est intégrable sur $[0,1]$.
     Par suite, $\int_0^1 \frac{\cos(xt)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.
   - <u>si $x = 0$:</u> la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $]0,1]$ et

$$f(x,t) = \frac{1}{t^2}$$

     Or $\int_0^1 \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann divergente ($2 \geq 1$) donc, par comparaison, $\int_0^1 f(0,t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

   Il en résulte que $F(x)$ existe si, et seulement si, $x \in \mathbb{R}^*$ donc $\mathcal{D}_F = \mathbb{R}^*$.
   — Montrons la continuité de F sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. On remarque que F est paire, donc il suffit de le montrer sur $\mathbb{R}_+^*$. On vérifie les hypothèses du théorème de continuité des intégrales à paramètres.
   - pour tout $t \in [0,1]$, $f(\cdot,t) : x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$;
   - pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x,\cdot) : t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $[0,1]$;
   - Soit $a > 0$. Soit $t \in [0,1]$. Pour tout $x \in [a,+\infty[$:

$$|f(x,t)| \leq \frac{1}{x^2+t^2} \leq \frac{1}{a^2+x^2}, \qquad \textbf{hypothèse de domination}$$

     et $g : t \mapsto \frac{1}{a^2+x^2}$ est intégrable sur $[0,1]$ car continue sur le segment $[0,1]$.

   Ainsi, la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(xt)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc également sur $\mathbb{R}_-^*$ par parité.

Problème 3. *Transformée de Laplace*

Dans ce problème, $I = \mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{R}_+^*$.
Pour $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux sur I, on appelle transformée de Laplace de f et on note $\mathcal{L}(f)$ la fonction de la variable p réelle :

$$\mathcal{L}(f) : p \mapsto \int_0^{+\infty} f(x)e^{-px}\,\mathrm{d}x.$$

1. *Premiers exemples.*
   Déterminer le domaine et une expression explicite de $\mathcal{L}(f)$ pour :

$$f \text{ constante}; \quad f : x \mapsto x^n \text{ où } n \in \mathbb{N}; \quad f : x \mapsto e^{ax} \text{ où } a \in \mathbb{R}.$$

2. *Domaine de définition de $\mathcal{L}(f)$ pour une famille de fonctions spécifiques.*
   Soit $f \in C_{pm}(I,\mathbb{C})$ intégrable sur $]0,1]$ vérifiant qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que

$f(x) = \underset{x\to+\infty}{O}(x^n e^{ax})$.
Montrer que $\mathcal{L}(f)$ est bien définie et continue sur $]a, +\infty[$.

3. Déterminer le domaine et une expression de la transformée de Laplace de :
   (a) $x \mapsto e^{iax}$ puis en déduire les transformées de Laplace de $x \mapsto \sin(ax)$ et $x \mapsto \cos(ax)$ pour $a \in \mathbb{R}$.
   (b) $x \mapsto \sqrt{x}$ puis $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$.

4. *Continuité en* 0 *de la transformée de Laplace.*
   Soit f une fonction continue par morceaux sur I.
   (a) Montrer que si f est intégrable sur I, alors $\mathcal{L}(f)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) *(Difficile)* Montrer que si f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge, alors $\mathcal{L}(f)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   En particulier, sous ces hypothèses, on a donc :
   $$\mathcal{L}(f)(p) \xrightarrow[p\to 0^+]{} \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$
   Indications :
   i) Commencer par montrer, en utilisant la deuxième formule de la moyenne, que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a_\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $p \in \mathbb{R}_+$ et tout $a \geq a_\varepsilon$, $|\int_a^{+\infty} f(x)e^{-px}\,dx| \leq \varepsilon$.
   ii) Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Montrer la continuité de la fonction $H : p \mapsto \int_0^a f(x)e^{-px}\,dx$.
   iii) Déduire de i) et ii) la continuité de $\mathcal{L}(f)$ avec la définition de la continuité et en s'inspirant de la démonstration de "convergence uniforme implique continuité" pour les limites de suites et séries de fonctions continues.

Correction.

Dans la suite, on note $\varphi(p, x) = f(x)e^{-px}$.

1. *Premiers exemples.*
   - On suppose qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f :\mapsto c$. Alors, pour $p \in \mathbb{R}$:
   $$\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} ce^{-px}\,\mathrm{d}x.$$
   Or, $\int_0^{+\infty} e^{-px}\,\mathrm{d}x$ converge si, et seulement si, $p \in \mathbb{R}_+^*$ (en utilisant par exemple une primitive de $p \mapsto e^{-px}$), d'où :
   — si $c \neq 0$, le domaine de $\mathcal{L}(f)$ est $\mathbb{R}_+^*$ et on a :
   $$\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} ce^{-px}\,\mathrm{d}x = c\int_0^{+\infty} e^{-px}\,\mathrm{d}x = c\left[\frac{e^{-px}}{x}\right]_0^{+\infty} = \frac{c}{x}.$$
   — si $c = 0$, le domaine de $\mathcal{L}(f)$ est $\mathbb{R}$ et $\mathcal{L}(f) : p \mapsto 0$.
   - On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f : x \mapsto x^n$.
   — Si $p \leq 0$, on a, pour tout $x \in [0, +\infty[$, $x^n e^{-px} \geq x^n = \frac{1}{x^{-n}}$ qui est d'intégrale divergente sur $[0, +\infty[$ d'après le critère de Riemann en $+\infty$ avec $-n \leq 1$ (ou on

aurait pu remarquer également que $x^n \geq 1$ pour tout $x \geq 1$), donc $\int_0^{+\infty} x^n e^{-px}\,\mathrm{d}x$ diverge.

— Soit $p \in \mathbb{R}_+^*$. On effectue le changement de variable *licite* $t = px$:

$$\mathcal{L}(f)(p) = \frac{1}{p^{n+1}} \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t \quad (*)$$

Ainsi, les intégrales $\mathcal{L}(f)(p)$ et $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. La fonction $t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $t^n e^{-t} = \underset{t\to+\infty}{o}(\frac{1}{t^2})$ donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.
Par suite, $\int_0^{+\infty} x^n e^{-px}\,\mathrm{d}x$ converge.

Il en résulte que le domaine de $\mathcal{L}(f)$ est $\mathbb{R}_+^*$.

Notons, pour $k \in \mathbb{N}$, $I_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\,\mathrm{d}t$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_k > 0$ car $t \mapsto t^k e^{-t}$ est continue et strictement positive sur $]0, +\infty[$ et par une intégration par partie *licite*, on obtient $I_{k+1} = (k+1)I_k$. Par suite, comme $I_0 = 1$, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_k = k!$.
Ainsi, pour $p \in \mathbb{R}_+^*$, d'après l'égalité $(*)$, on a :

$$\mathcal{L}(f)(p) = \frac{1}{p^{n+1}} I_n = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Par continuité de $p \mapsto \frac{1}{p^{n+1}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, $\mathcal{L}(f)$ est donc continue sur son domaine de définition.

- On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f : x \mapsto e^{ax}$.
  On a alors, pour $p \in \mathbb{R}$:

$$. \int_0^{+\infty} e^{-(p-a)x}\,\mathrm{d}x$$

Or $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x$ converge si, et seulement si, $\alpha > 0$ (on le prouve, par exemple, en déterminant une primitive de $x \mapsto e^{-\alpha x}$).
Par suite, le domaine de définition de $\mathcal{L}(f)$ est $]a, +\infty[$.
De plus, on a, pour tout $p > a$:

$$\mathcal{L}(f)(p) = \left[-\frac{e^{-(p-a)x}}{p-a}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p-a}.$$

Par continuité de $p \mapsto \frac{1}{p-a}$ sur $]a, +\infty[$, $\mathcal{L}(f)$ est donc continue sur son domaine de définition.

2. On suppose que f est une fonction continue par morceaux sur I, intégrable sur $]0, 1]$ et telle que $f(x) = \underset{x\to+\infty}{O}(x^n e^{ax})$.
Alors il existe $M \geq 0$ et $x_0 > 0$ tel que pour tout $x \geq x_0$, $|f(x)| \leq M x^n e^{ax}$.
De plus, on remarque pour tout $y \in I$, f est intégrable sur $]0, y]$: en effet, f est intégrable sur $]0, 1]$ par hypothèse et :
— si $y \leq 1$, $]0, y] \subset]0, 1]$ donc f est intégrable sur $]0, y]$;
— si $y > 1$, f est continue par morceaux sur I et donc sur le segment $[1, y]$ d'où f est intégrable sur $[1, y]$; par suite, d'après la relation de Chasles, f est intégrable sur $]0, y]$.
En particulier, f est donc intégrable sur $]0, x_0]$.

On vérifie les hypothèses du théorème de continuité des intégrales à paramètres.

- pour tout $x \in I$, $\varphi(\cdot, x) : p \mapsto \varphi(p, x)$ est continue sur $]a, +\infty[$;
- pour tout $p \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(p, \cdot) : x \mapsto \varphi(p, x)$ est continue par morceaux sur I ;
- Soit $b > a$. Soit $x \in I$. Pour tout $p \in [b, +\infty[$:

$$|\varphi(p,x)| \leq \begin{cases} |f(x)| & \text{si } x \leq x_0 \\ Mx^n e^{-(b-a)x} & \text{si } x > x_0 \end{cases}, \qquad \textbf{hypothèse de domination}$$

et $g : x \mapsto \begin{cases} |f(x)| & \text{si } x \leq x_0 \\ Mx^n e^{-(b-a)x} & \text{si } x > x_0 \end{cases}$ est intégrable sur I.

En effet, g est continue par morceaux sur I ; d'après la remarque initiale, g est intégrable sur $]0, x_0]$ et on a, par croissances comparées, $x^2 g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ d'où $g(x) = \underset{x \to +\infty}{o}(\frac{1}{x^2})$ et ainsi g est intégrable sur $[x_0, +\infty[$. D'où, par la relation de Chasles, g est intégrable sur I.

Par suite, d'après le théorème de continuité d'une intégrale à paramètres, $\mathcal{L}(f)$ est définie et continue sur $]a, +\infty[$.

3. *Autres exemples :*
   (a) Soit $a \in \mathbb{R}$.
   — On pose $f : x \mapsto e^{iax}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|f(x)| \leq 1$ donc f est continue sur $\mathbb{R}_+$, intégrable sur $[0, 1]$ et $f(x) = \underset{x \to +\infty}{O}(x^0 e^{0x})$. Ainsi, d'après la question précédente, $\mathcal{L}(f)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, on a, pour tout $p \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\mathcal{L}(f)(p) = \left[-\frac{e^{-(p-ia)x}}{p - ia} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p - ia}.$$

   — On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(ax) = \mathrm{Re}(e^{iax})$ et $\sin(ax) = \mathrm{Im}(e^{iax})$. Or, pour $g : J \to C$ une fonction intégrable sur J, $\mathrm{Re}(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont intégrables sur J et :

$$\mathrm{Re}\left(\int_J g(t)\,\mathrm{d}t \right) = \int_J \mathrm{Re}(g(t))\,\mathrm{d}t \text{ et } \mathrm{Im}\left(\int_J g(t)\,\mathrm{d}t \right) = \int_J \mathrm{Im}(g(t))\,\mathrm{d}t,$$

   donc, en posant $s_a : x \mapsto \sin(ax)$ et $c_a : x \mapsto \cos(ax)$, on obtient, pour $p \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\mathcal{L}(s_a)(p) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{p - ia} \right) = \frac{a}{p^2 + a^2} \text{ et } \mathcal{L}(c_a)(p) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{p - ia} \right) = \frac{p}{p^2 + a^2}.$$

   et $\mathcal{L}(s_a)$ et $\mathcal{L}(c_a)$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (b) Comme les fonctions $x \mapsto x^{\pm\frac{1}{2}}$ sont continues sur I, intégrables sur $]0, 1]$ (critère de Riemann en 0) et $\underset{x \to +\infty}{o}(x)$, d'après la question 2., leur transformées de Laplace sont définies et continues sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, en posant $f : x \mapsto \sqrt{x}$, on a, par des changement de variable et intégration par parties *licites*, pour tout $p \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f)(p) &\underbrace{=}_{t=\sqrt{px}} \frac{1}{p^{\frac{3}{2}}} \int_0^{+\infty} t \times 2te^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\ &\underbrace{=}_{\text{IPP}} \frac{1}{p^{\frac{3}{2}}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\ \mathcal{L}(f)(p) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2p^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

et pour $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$, en effectuant une intégration par partie encore une fois licite, on obtient, pour tout $p \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\mathcal{L}(g)(p) = 2p\mathcal{L}(f)(p) = \sqrt{\frac{\pi}{p}}.$$

4. *Continuité en* 0

(a) On suppose f intégrable sur I.

- pour tout $x \in I$, $\varphi(\cdot, x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ par continuité de la fonction exponentielle ;
- pour tout $p \in \mathbb{R}$, $\varphi(p, \cdot) : x \mapsto \varphi(p, x)$ est continue par morceaux sur I comme produit de fonctions continues par morceaux sur I ;
- On a, pour tout $p \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in I$:

$$|\varphi(p, x)| \leq |f(x)| = g(x), \qquad \textbf{hypothèse de domination}$$

Et comme f est intégrable sur I, g l'est aussi.

Ainsi, d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, $\mathcal{L}(f)$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

(b) On suppose f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

Remarque : Comme f n'est pas forcément intégrable sur $\mathbb{R}_+$, la majoration $|\varphi(p, x)| \leq |f(x)|$ de la question précédente ne permet plus d'appliquer directement le théorème de continuité des intégrales à paramètres !

Procédons comme indiqué dans les indications :

i) Soit $p \in \mathbb{R}_+$ et $a, b \in \mathbb{R}_+$ tels que $a \leq b$. On pose $g : x \mapsto e^{-px}$. Alors f est continue sur $[a, b]$ et g est de classe C^1 et décroissante sur $[a, b]$ donc, d'après la deuxième formule de la moyenne, il existe $c_p \in [a, b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)e^{-px}\,\mathrm{d}x = e^{-pa}\int_a^{c_p} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a_\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $A \geq a_\varepsilon$, $|\int_A^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Par suite, pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+$ tels que $a_\varepsilon \leq a \leq b$, on obtient, comme $c_p \geq a \geq a_\varepsilon$:

$$\left|\int_a^b f(x)e^{-px}\,\mathrm{d}x\right| = \underbrace{e^{-pa}}_{\leq 1}\left|\int_a^{c_p} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \left|\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{c_p}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \varepsilon;$$

puis en passant à la limite quand $b \to +\infty$, on obtient alors :

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x)e^{-px}\,\mathrm{d}x\right| \leq \varepsilon.$$

ii) On note $H : p \mapsto \int_0^{a_\varepsilon} f(x)e^{-px}\,\mathrm{d}x$. On applique le théorème de continuité des intégrales à paramètres. Les hypothèses de continuité sont bien satisfaites, et on a, pour tout $p \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in [0, a_\varepsilon]$:

$$|f(x)e^{-px}| \leq |f(x)| = g(x), \qquad \textbf{hypothèse de domination}$$

et g est bien intégrable sur $[0, a_\varepsilon]$ car continue sur un segment.
Par suite, d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, H est continue sur $\mathbb{R}_+$.

iii) Montrons que $\mathcal{L}(f)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
Soit $\varepsilon > 0$ et $p_0 \in \mathbb{R}_+$. Alors, d'après i) il existe a_ε tel que, pour tous $p, a \in \mathbb{R}_+$ avec $a \geq a_\varepsilon$, on a :

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x) e^{-px} \, \mathrm{d}x \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

De plus, comme H est continue sur $\mathbb{R}_+$, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $p \in \mathbb{R}_+$, $|p - p_0| \leq \delta_\varepsilon$ implique $|H(p) - H(p_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.
Concluons : pour tout $p \in \mathbb{R}_+$ tel que $|p - p_0| \leq \delta_\varepsilon$, on a :

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}(f)(p) - \mathcal{L}(f)(p_0)| &\leq |\mathcal{L}(f)(p) - H(p)| + |H(p) - H(p_0)| + |H(p_0) - \mathcal{L}(f)(p_0)| \\
&\leq |\mathcal{L}(f)(p) - H(p)| + |H(p) - H(p_0)| + |H(p_0) - \mathcal{L}(f)(p_0)| \\
&= \left| \int_{a_\varepsilon}^{+\infty} f(x) e^{-px} \, \mathrm{d}x \right| + \frac{\varepsilon}{3} + \left| \int_{a_\varepsilon}^{+\infty} f(x) e^{-p_0 x} \, \mathrm{d}x \right| \\
|\mathcal{L}(f)(p) - \mathcal{L}(f)(p_0)| &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{L}(f)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

3. Dérivation d'une intégrale à paramètre

On suppose que A est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Théorème 7. *Théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre*

Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$ une fonction. Si f vérifie les propriétés suivantes :

- pour tout $t \in I$, $f(\cdot, t) : x \mapsto f(x, t)$ est C^1 sur A ;
- pour tout $x \in A$, $f(x, \cdot) : t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur I ;
- pour tout $x \in A$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot) : t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction $g : I \to \mathbb{R}$ positive et **intégrable** sur I telle que, pour tout $(x, t) \in A \times I$ *(ou $\in [a, b] \times I$ pour tout segment $[a, b]$ de A si $A \subset \mathbb{R}$)* :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq g(t), \qquad \textbf{hypothèse de domination } \textit{(sur tout segment)}$$

alors la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x, t) \, \mathrm{d}t$ est définie et C^1 sur A. De plus, on a, pour tout $x \in A$:

$$F'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_I f(x, t) \, \mathrm{d}t = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \, \mathrm{d}t.$$

Théorème 8. *Théorème de dérivation C^∞ d'une intégrale à paramètre*

Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$ une fonction. Si f vérifie les propriétés suivantes :

- pour tout $t \in I$, $f(\cdot, t) : x \mapsto f(x,t)$ est C^∞ sur A ;
- pour tout $x \in A$, $f(x, \cdot) : t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I ;
- pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in A$, $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, \cdot) : t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe une fonction $g_k : I \to \mathbb{R}$ positive et **intégrable** sur I telle que, pour tout $(x,t) \in A \times I$ *(ou sur tout segment si $A \subset \mathbb{R}$)* :

$$\left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) \right| \leq g_k(t), \qquad \textbf{hypothèse de domination } \textit{(sur tout segment)}$$

alors la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et C^∞ sur A. De plus, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in A$:

$$F^{(k)}(x) = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque 4.

Pour montrer qu'une intégrale à paramètre est de classe C^n sur A pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, on vérifiera les mêmes hypothèses que le théorème précédent en remplaçant les "pour tout $k \in \mathbb{N}^*$" par "pour tout $k \in [\![1, n]\!]$".

Exemple 5.

La fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t$ est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie l'équation différentielle $y' = \dfrac{1}{2x} y$. On obtient alors l'expression explicite de F : pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$F(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}.$$

En effet, on a, en posant $f(x,t) = e^{-xt^2}$:

- pour tout $t \in [0,+\infty[$, $f(\cdot,t) : x \mapsto e^{-xt^2}$ est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ (et même C^∞) ;
- pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x,\cdot) : t \mapsto e^{-xt^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ car $t \mapsto e^{-xt^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et en $+\infty$, comme $x > 0$, $e^{-xt^2} = o(\frac{1}{t^2})$.
- pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot) : t \mapsto -t^2 e^{-xt^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$;
- *(Domination sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$)* Soit $a > 0$. Soit $t \in [0,+\infty[$. Pour tout $x \in [a,+\infty[$, on a :
$$|-t^2 e^{-xt^2}| \leq t^2 e^{-at^2} = g(t).$$
Or la fonction $g : t \mapsto t^2 e^{-at^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ car elle est continue sur cet intervalle et en $+\infty$, comme $a > 0$, $t^2 e^{-at^2} = o(\frac{1}{t^2})$ (car $t^2 g(t) \to 0$).

Ainsi, d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, pour tout $a > 0$, F est C^1 sur $[a,+\infty[$. Il en résulte que F est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \underbrace{-t^2 e^{-xt^2}}_{=(-\frac{1}{2}t).(2t)e^{-xt^2}} \,\mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} \left[\frac{-te^{-xt^2}}{2x}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{-e^{-xt^2}}{2x} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2x}F(x).$$

Ainsi, F est solution de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{2x}y$ qui admet pour solutions $y = Ce^{\frac{1}{2}\ln(x)} = C\frac{1}{\sqrt{x}}$ pour $C \in \mathbb{R}$.
Or on a :
$$C = F(1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$
donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:
$$F(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}.$$

Exercice 9.

Montrer que les fonctions suivantes sont de classe C^n sur leur domaine de définition :

1. $F : t \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-x^2} cos(xt)\,\mathrm{d}x$ avec $n = 1$. En exprimant F' en fonction de F, déterminer une expression explicite de F.
2. $G : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ avec $n = 2$.
3. $H : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$ avec $n = 1$ puis déterminer un équivalent simple de H en $+\infty$.
4. pour $k \in \mathbb{N}$, $I_k : t \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{x^k}\,\mathrm{d}x$ avec $n = \infty$ puis déterminer une expression explicite

de $I_k^{(k)}$.

Correction.

1. On pose $f(t,x) = e^{-x^2}\cos(xt)$.
   — Déterminons le domaine $\mathcal{D}_F$ de F.
   Soit $t \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto f(t,x)$ est continue sur $[0,+\infty[$ et on a $|f(t,x)| \leq e^{-x^2}$, donc par comparaison à la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ qui intégrable sur $[0,+\infty[$, $x \mapsto f(t,x)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et ainsi $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}x$ converge.
   Par suite, $F(t)$ existe et est fini pour pour tout $t \in \mathbb{R}$. Donc $\mathcal{D}_F = \mathbb{R}$.
   — Montrons que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On vérifie les hypothèses du théorème de dérivation des intégrales à paramètres.
   - pour tout $x \in [0,+\infty[$, $f(\cdot,x) : t \mapsto e^{-x^2}\cos(xt)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (et même C^∞) et on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$:
   $$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = -xe^{-x^2}\sin(xt).$$
   - pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t,\cdot) : x \mapsto e^{-x^2}\cos(xt)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ (voire l'étude du domaine).
   - pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,\cdot)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$ car continue sur $[0,+\infty[$;
   - *(Domination)* Soit $x \in [0,+\infty[$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :
   $$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq xe^{-x^2} = g(x),$$
   Or la fonction $g : x \mapsto xe^{-x^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ car elle est continue sur cet intervalle et en $+\infty$, $xe^{-x^2} = o(\dfrac{1}{x^2})$ (car $x^2 g(x) \to 0$).

   Ainsi, d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$:
   $$F'(t) = \int_0^{+\infty} -xe^{-x^2}\sin(xt)\,\mathrm{d}x \overset{\text{IPP}}{=} \left[\frac{e^{-x^2}}{2}.\sin(xt)\right]_0^{+\infty} - \frac{t}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}x = -\frac{t}{2}F(t).$$
   Ainsi, F est solution de l'équation différentielle $y' + \dfrac{t}{2}y = 0$ qui admet pour solutions $y = Ce^{-\int \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t} = Ce^{-\frac{t^2}{4}}$ pour $C \in \mathbb{R}$.
   Or on a :
   $$C = F(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$
   donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$:
   $$F(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{t^2}{4}}.$$

2. On pose $g(x,t) = \frac{e^{-ixt}}{1+t^4}$.
   — Déterminons le domaine $\mathcal{D}_G$ de G.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$ et pour tout $t \in [0,+\infty[$, $|g(x,t)| \leq \frac{1}{1+t^4}$, donc, par comparaison à la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^4}$ qui est intégrable sur $[0,+\infty[$, $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et ainsi $\int_0^{+\infty} g(x,t)\,\mathrm{d}t$ converge.
   Par suite, $G(x)$ existe et est fini pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc $\mathcal{D}_G = \mathbb{R}$.
   — Montrons que G est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On vérifie les hypothèses du théorème de dérivation des intégrales à paramètres.
   - pour tout $t \in [0,+\infty[$, $g(\cdot,t) : x \mapsto g(x,t)$ est C^2 sur $\mathbb{R}$ (et même C^∞) et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \frac{ite^{ixt}}{1+t^4} \text{ et } \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) = \frac{-t^2 e^{ixt}}{1+t^4}.$$
   - pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x,\cdot) : t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ (fait avec le domaine de G).
   - pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,\cdot)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$ car continue sur $[0,+\infty[$;
   - *(Domination)* Soit $t \in [0,+\infty[$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
   $$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{t}{1+t^4} = g_1(t)$$
   et
   $$\left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq \frac{t^2}{1+t^4} = g_2(t).$$
   Or les fonctions g_1, g_2 sont intégrables sur $[0,+\infty[$ car elles sont continues sur cet intervalle et en $+\infty$, $g_1(t)$ et $g_2(t)$ sont des $O(\dfrac{1}{t^2})$ (car $t \to t^2 g_i(t)$ sont bornées sur $[0,+\infty[$).

   Ainsi, d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, G est C^2 sur $\mathbb{R}$.
3. On pose $h(x,t) = \frac{sin(t)}{x^2+t^2}$.
   — Déterminons le domaine $\mathcal{D}_H$ de H.

   Soit $x \in \mathbb{R}$.
   * Si $x = 0$, $\varphi : t \mapsto h(x,t) = \frac{sin(t)}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$. La fonction φ est positive sur $]0,\pi]$ et $\varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t}$, donc, par comparaison $\int_0^\pi \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ diverge car l'intégrale de Riemann $\int_0^\pi \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge.
     Par suite, $\int_0^\pi h(0,t)\,\mathrm{d}t$ diverge, donc H n'est pas défine en 0.
   * Si $x \neq 0$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$ et pour tout $t \in [0,+\infty[$, $|h(x,t)| \leq \frac{1}{x^2+t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$, donc, par comparaison à la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ qui est intégrable sur $[1,+\infty[$, $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et donc sur $[0,+\infty[$. Ainsi $\int_0^{+\infty} h(x,t)\,\mathrm{d}t$ converge.

   Par suite, $H(x)$ existe et est fini si, et seulement si, $x \in \mathbb{R}^*$. Donc $\mathcal{D}_H = \mathbb{R}^*$.
   — La fonction H est paire, donc on restreint l'étude à $\mathbb{R}_+^*$. Montrons que H est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. On vérifie les hypothèses du théorème de dérivation des intégrales à paramètres.

- pour tout $t \in [0,+\infty[$, $h(\cdot,t) : x \mapsto h(x,t)$ est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ (et même C^∞) et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:
$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \frac{-2x\sin(t)}{(x^2+t^2)^2}$$
- pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $h(x,\cdot) : t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ (fait avec le domaine de H).
- pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,\cdot)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$ car continue sur $[0,+\infty[$;
- *(Domination sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$)* Soit $a,b \in \mathbb{R}_+^*$ avec $a<b$. Soit $t \in [0,+\infty[$. Pour tout $x \in [a,b]$, on a :
$$\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{2b}{(a^2+t^2)^2} = g(t)$$
Or la fonction g est intégrable sur $[0,+\infty[$ car elle est continue sur cet intervalle et en $+\infty$, $g(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{2b}{t^4}$.

Ainsi, d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, H est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc également sur $\mathbb{R}_-^*$ par parité.

Déterminons un équivalent de H en $+\infty$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On effectue le changement de variable *licite* $t = ux$ dans l'intégrale convergente $H(x)$ et on obtient :
$$H(x) = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ux)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$
puis, par des Intégrations Par Parties *licites*, on a :
$$\begin{aligned}
H(x) &= \frac{1}{x}\left(\left[-\frac{\cos(ux)}{x}.\frac{1}{1+u^2}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -\frac{\cos(ux)}{x}.\frac{-2u}{(1+u^2)^2}\,\mathrm{d}u\right)\\
&= \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^2}\int_0^{+\infty}\frac{u\cos(ux)}{(1+u^2)^2}\,\mathrm{d}u\\
&= \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^2}\left(\left[\frac{\sin(ux)}{x}.\frac{u}{(1+u^2)^2}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{\sin(ux)}{x}.\frac{1-3u^2}{(1+u^2)^3}\,\mathrm{d}u\right)\\
&= \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\int_0^{+\infty}\underbrace{\frac{\sin(ux)(1-3u^2)}{(1+u^2)^3}}_{=f(x,u)}\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

La fonction $u \mapsto f(x,u)$ est continue sur $[0,+\infty[$ et $|f(x,u)| \leq \frac{1+3u^2}{(1+u^2)^3} \underset{u\to+\infty}{\sim} \frac{3}{u^4}$; donc $u \mapsto f(x,u)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. Par suite, par inégalité triangulaire, on a :
$$\left|\int_0^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}u\right| \leq \int_0^{+\infty}\frac{1+3u^2}{(1+u^2)^3}\,\mathrm{d}u = C$$

Ainsi, la fonction $x \mapsto \int_0^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}u$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$ par C, donc on a :

$$\begin{aligned} H(x) &= \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\int_0^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{x^2} + \underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^3}\right) \\ &= \frac{1}{x^2} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ H(x) &\underset{u\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

4. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $f_k(t,x) = \frac{e^{-xt}}{x^k}$.
   — Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminons le domaine $\mathcal{D}_{I_k}$ de I_k.
   Soit $t \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto f_k(t,x)$ est continue sur $[1,+\infty[$.
   (∗) Si $t < 0$, par croissances comparées, $\frac{e^{-xt}}{x^k} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, donc $\int_0^{+\infty} f_k(t,x)\,\mathrm{d}x$ diverge (car, par exemple, à partir d'un certain $x_0 \geq 1$, pour tout $x \geq x_0$, $|f_k(t,x)| \geq 1$).
   (∗) Si $t = 0$, on a $\int_0^{+\infty} f_k(0,x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^k}\,\mathrm{d}x$ converge si, et seulement si, $k \geq 2$. Donc $I_k(0)$ existe et est fini si, et seulement si, $k \geq 2$.
   (∗) Si $t > 0$, on a $|f_k(t,x)| \leq e^{-xt}$ et $x \mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc, par comparaison, $x \mapsto f_k(t,x)$ l'est aussi et donc $\int_0^{+\infty} f_k(t,x)\,\mathrm{d}x$ converge.
   Il en résulte que, pour $k = 0,1$, $\mathcal{D}_{I_k} = \mathbb{R}_+^*$ et pour $k \geq 2$, $\mathcal{D}_{I_k} = \mathbb{R}_+$.
   — Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrons que I_k est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ *(on pourrait même montrer que pour $k \geq 2$, I_k est de classe C^{k-2} sur $\mathbb{R}_+$)*. On vérifie les hypothèses du théorème de dérivation des intégrales à paramètres.
   - pour tout $x \in [1,+\infty[$, $f_k(\cdot,x)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et donc sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$:
   $$\frac{\partial^n f_k}{\partial t^n}(t,x) = (-1)^n \frac{e^{-xt}}{x^{k-n}}.$$
   - pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f_k(t,\cdot)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (voire l'étude du domaine).
   - pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\partial^n f_k}{\partial t^n}(t,\cdot)$ est continue par morceaux sur $[1,+\infty[$ car continue sur $[1,+\infty[$;
   - *(Domination sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$)* Soit $a > 0$. Soit $x \in [1,+\infty[$. Pour tout $t \in [a,+\infty[$, on a :
   $$\left|\frac{\partial^n f_k}{\partial t^n}(t,x)\right| = \frac{e^{-xt}}{x^{k-n}} \leq \frac{e^{-ax}}{x^{k-n}} = g(x),$$
   Or la fonction $g : x \mapsto \frac{e^{-ax}}{x^{k-n}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ car elle est continue sur cet intervalle et en $+\infty$, $g(x) = o(\frac{1}{x^2})$ (car $x^2 g(x) \to 0$ par croissances comparées).

   Ainsi, d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, I_k est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:
   $$I_k^{(n)}(t) = (-1)^n \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{x^{k-n}}\,\mathrm{d}x;$$

En particulier, on a, pour $n = k$:

$$I_k^{(k)}(t) = (-1)^k I_0(t) = (-1)^k \left[-\frac{e^{-xt}}{t} \right]_1^{+\infty} = (-1)^k \frac{e^{-t}}{t}.$$

Exercice 10. *Fonction Gamma*

On appelle *fonction Gamma* et on note Γ la fonction de la variable réelle :

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t.$$

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_\Gamma$ de Γ.
2. Pour $x \in \mathcal{D}_\Gamma$, trouver une relation entre $\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x)$. En déduire la valeur de $\Gamma(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer la valeur de $\Gamma(\frac{3}{2})$.
4. Montrer que la transformée de Laplace de $f : t \mapsto t^\alpha$ ($\alpha \in]-1, +\infty[$) est $\mathcal{L}(f) : p \mapsto \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$.
5. Montrer que Γ est de classe C^∞ sur $\mathcal{D}_\Gamma$.

Correction.

1. Déterminons le domaine de définition $\mathcal{D}_\Gamma$ de Γ. On pose $f(x,t) = t^{x-1}e^{-t}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   - ⋆ La fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est positive et continue sur $]0, +\infty[$.
   - ⋆ en 0 :
   $$f(x,t) \underset{t \to 0^+}{\sim} t^{x-1}$$
   Or, d'après le critère de Riemann en 0, $t \mapsto t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$ est d'intégrale convergente sur $]0, 1]$ si, et seulement si, $1 - x < 1$ i.e. $x > 0$. Donc $t \mapsto f(x,t)$ est d'intégrale convergente sur $]0, 1]$ si, et seulement si, $x > 0$.
   - ⋆ en $+\infty$:
   On a $t^2 t^{x-1} e^{-t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$, donc
   $$f(x,t) = t^{x-1}e^{-t} = t^{x+1}e^{-t} = \underset{t \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$
   et, d'après le critère de Riemann en $+\infty$, $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est d'intégrale convergente sur $[1, +\infty[$. Ainsi, par comparaison, $t \mapsto f(x,t)$ est d'intégrale convergente sur $[1, +\infty[$.

   Il en résulte que $t \mapsto f(x,t)$ est d'intégrale convergente sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, $x > 0$.

   Par suite, $\mathcal{D}_\Gamma = \mathbb{R}_+^*$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par une intégration par parties licite, on a :
$$\Gamma(x+1) = \left[-t^x e^{-t}\right]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t = x\Gamma(x).$$

Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$, on obtient (par récurrence),

$$\Gamma(n+1) = n!\,\Gamma(0) = n!.$$

3. On a :

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \sqrt{t}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

En effectuant le changement de variable $t = u^2$ puis une intégration par parties (tous deux licites), on obtient :

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) &= -\int_0^{+\infty} u \times (-2ue^{-u^2})\,\mathrm{d}u \\
&= -\left[ue^{-u^2}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \\
\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}.
\end{aligned}$$

4. Soit $\alpha \in]-1, +\infty[$. Comme $f : t \mapsto t^\alpha$ est continue sur $]0, +\infty[$, intégrable sur $]0, 1]$ (critère de Riemann en 0) et $O(t^{\lfloor\alpha\rfloor+1})$ en $+\infty$, d'après le problème 3 question 2., $\mathcal{L}(f)$ est définie (et continue) sur $\mathbb{R}_+^*$.
Soit $p \in \mathbb{R}_+^*$. On effectue le changement de variable licite $u = pt$ et on obtient :

$$\mathcal{L}(f)(p) = \frac{1}{p^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} u^\alpha e^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}.$$

5. Montrons que Γ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
   - pour tout $t \in]0, +\infty[$, $x \mapsto f(x,t)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:
   $$\frac{\partial^k}{\partial x^k} f(x,t) = \ln(t)^k t^{x-1} e^{-t}.$$
   - Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ (on l'a montré lors de la détermination du domaine de définition).
   - Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \dfrac{\partial^k}{\partial x^k} f(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$ car continue sur cet intervalle.
   - Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $a < b$.
   <u>Domination sur le segment $[a, b]$.</u>
   Soit $t \in]0, +\infty[$. On effectue des dominations différentes selon que t soit dans $]0, 1]$ ou dans $]1, +\infty[$.
   Pour tout $x \in [a, b]$, on a :
   * <u>si $t \in]0, 1]$,</u> comme $x - 1 \geq a - 1$, on a $t^{x-1} \leq t^{a-1}$ d'où :
   $$\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k} f(x,t)\right| \leq |\ln(t)|^k t^{a-1} e^{-t} \quad (1)$$
   * <u>si $t \geq 1$,</u> comme $x - 1 \leq b - 1$, $t^{x-1} \leq t^{b-1}$ d'où :
   $$\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k} f(x,t)\right| \leq |\ln(t)|^k t^{b-1} e^{-t} \quad (2)$$

Soit $u \in \mathbb{R}_+^*$. On vérifie que la fonction $\varphi_u : t \mapsto |\ln(t)|^k t^{u-1} e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. En effet, elle est continue sur $]0, +\infty[$ et :

- ⋆ en 0 :
  On a :
  $$\varphi_u(t) \underset{t \to 0^+}{\sim} |\ln(t)|^k t^{u-1}$$
  Comme $u > 0$, on a $\frac{u}{2} > 0$ et donc, par croissances comparées :
  $$t^{1-\frac{u}{2}} \varphi_u(t) = t^{\frac{u}{2}} |\ln(t)|^k \xrightarrow[t \to 0^+]{} 0.$$
  Par suite, $\varphi_u(t) = \underset{t \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{t^{1-\frac{u}{2}}}\right)$ et $t \mapsto \frac{1}{t^{1-\frac{u}{2}}}$ est intégrable sur $]0, 1]$ d'après le critère de Riemann en 0 car $1 - \frac{u}{2} < 1$.
  Donc, par comparaison, φ_u est intégrable sur $]0, 1]$.
- ⋆ en $+\infty$: On a, par croissances comparées :
  $$t^2 \varphi_u(t) = t^{u+1} |\ln(t)|^k e^{-t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0.$$
  Par suite, $\varphi_u(t) = \underset{t \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ d'après le critère de Riemann en $+\infty$ car $2 > 1$.
  Donc, par comparaison, φ_u est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Il en résulte que, pour tout $u > 0$, φ_u est intégrable sur $]0, +\infty[$ et donc en particulier, φ_a et φ_b sont intégrables sur $]0, +\infty[$.

On pose $g_k = \varphi_a + \varphi_b$. Alors g_k est intégrable sur $]0, +\infty[$ comme somme de fonctions intégrables sur $]0, +\infty[$ et on a, pour tout $t \in]0, +\infty[$, d'après (1) et (2) :

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} f(x, t) \right| \leq g_k(t).$$

Remarque : on aurait également pu prendre pour fonction de domination

$$g_k : t \mapsto \begin{cases} \varphi_a(t) & \text{si } t \in]0, 1] \\ \varphi_b(t) & \text{si } t \in]1, +\infty[\end{cases}$$

Par suite, d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, Γ est de classe C^∞ sur tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}_+^*$ et donc Γ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.
De plus, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t.$$

Problème 4. *Calcul de l'intégrale du sinus cardinal*

Le but de ce problème est de calculer la valeur de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \, \mathrm{d}x.$$

On rappelle que cette intégrale est convergente mais pas absolument convergente. *On pourra retrouver des démonstrations de ces deux résultats dans le chapitre "Intégration généralisée" ; la convergence est à savoir refaire !*

On reprend ici les notations et résultats du problème 3.

1. Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in]-1, +\infty[$ tels que $f(x) = \underset{x\to+\infty}{O}(x^\alpha)$ et $f(x) = \underset{x\to 0^+}{O}(x^\beta)$.

   (a) Montrer que $\mathcal{L}(f)$ admet une limite en $+\infty$ et la déterminer.

   (b) Montrer que la transformée de Laplace $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner une expression de la dérivée k-ième de $\mathcal{L}(f)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

   (c) On suppose $\beta > 0$. En déduire que, pour $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$, $\mathcal{L}(g)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $p \in \mathbb{R}_+^*$:
$$\mathcal{L}(g)(p) = \int_p^{+\infty} \mathcal{L}(f)(q)\,\mathrm{d}q.$$

2. (a) Déterminer une expression explicite de la transformée de Laplace de sinc : $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$.

   (b) Justifier la continuité de $\mathcal{L}(\mathrm{sinc})$ sur $\mathbb{R}_+$ et donc en 0 (voire problème 3) puis déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{sinc}(x)\,\mathrm{d}x$.

Correction.

1. Pour $p \in \mathbb{R}_+$ et $x \in]0, +\infty[$, on pose $\varphi(p, x) = f(x)e^{-px}$.
   Commençons par traduire les hypothèses sur la fonction f :
   — comme $f(x) = \underset{x\to+\infty}{O}(x^\alpha)$, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ et $x_0 \in]0, +\infty[$ tel que, pour tout $x \geq x_0$:
$$|f(x)| \leq Mx^\alpha$$
   — comme $f(x) = \underset{x\to 0^+}{O}(x^\beta)$, il existe $M' \in \mathbb{R}_+$ et $x_0' \in]0, +\infty[$ tel que, pour tout $0 < x \leq x_0'$:
$$|f(x)| \leq M'x^\beta.$$
   De plus, comme f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$, pour $\gamma \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto x^{-\gamma}f(x)$ l'est aussi ; ainsi, elle est continue par morceaux sur le segment $[x_0, x_0']$ (ou $[x_0', x_0]$), et donc bornée sur ce segment par disons $M''(\gamma)$. Ainsi, quitte à prendre le maximum de $M, M', M''(\alpha)$ et $M''(\beta)$, on peut supposer que $M = M'$ et $x_0' = x_0$.

   (a) Vérifions les hypothèses du théorème de la limite d'une intégrale à paramètre. Comme on veut déterminer la limite en $+\infty$, on peut placer la variable p sur le voisinage de $+\infty$ de notre choix : prendre $\mathbb{R}_+^*$ n'est pas un bon choix car, lors de la domination, l'exponentielle bien pratique en $+\infty$ "disparaitra" par la proximité de 0 dans $\mathbb{R}_+^*$. On se placera alors, par exemple, sur $[33, +\infty[$ qui a l'avantage de laisser 0 loin de l'affaire !

   - pour tout $p \in [33, +\infty[$, $\varphi(p, \cdot) : x \mapsto \varphi(p, x)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$;

- pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$\varphi(p,x) = f(x)e^{-px} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0 = h(x)$$

et $h : x \mapsto 0$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$ car continue sur $]0,+\infty[$;
- Soit $x \in]0,+\infty[$. Pour tout $p \in [33,+\infty[$, on a :

$$|\varphi(p,x)| = |f(x)|e^{-px} \leq |f(x)|e^{-33x} = g(x), \qquad \textbf{hypothèse de domination}$$

et $g : x \mapsto |f(x)|e^{-33x}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ car, g est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$ et :
  - ⋆ sur $]0,x_0]$, $g(x) \leq Mx^\beta$ et $x \mapsto x^\beta = \frac{1}{x^{-\beta}}$ est intégrable sur $]0,x_0]$ d'après le critère de Riemann en 0 car $-\beta < 1$, donc par comparaison g est intégrable sur $]0,x_0]$;
  - ⋆ sur $[x_0,+\infty[$, $g(x) \leq Mx^\alpha e^{-33x} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[x_0,+\infty[$ d'après le critère de Riemann en $+\infty$ car $2 > 1$, donc par comparaison g est intégrable sur $[x_0,+\infty[$.

Ainsi, d'après le théorème de la limite d'une intégrale à paramètre, on a :

$$\lim_{p\to+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f(x)e^{-px}\,\mathrm{d}x\right) = \int_0^{+\infty}\left(\lim_{x\to+\infty} f(x)e^{-px}\right)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} 0\,\mathrm{d}x = 0.$$

(b) Vérifions les hypothèses du théorème de dérivation des intégrales à paramètre :
- pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\varphi(\cdot,x)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ car exp est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{\partial^k \varphi}{\partial p^k}(p,x) = (-1)^k x^k f(x)e^{-px};$$

- pour tout $p \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(p,\cdot)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ (même démonstration que pour la fonction g de la question précédente en remplaçant 33 par $p > 0$) ;
- pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $p \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{\partial^k \varphi}{\partial p^k}(p,\cdot)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$ car f l'est et $x \mapsto x^k e^{-px}$ est continue sur $]0,+\infty[$;
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $a > 0$. Pour tout $p \in [a,+\infty[$, on a :

$$\left|\frac{\partial^k \varphi}{\partial p^k}(x,t)\right| \leq x^k|f(x)|e^{-ax} = g_k(x), \quad \textbf{hypothèse de domination sur tout segment}$$

et $g_k : x \mapsto x^k|f(x)|e^{-ax}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ car, g_k est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$ et :
  - ⋆ sur $]0,x_0]$, $g_k(x) \leq Mx^{\beta+k}$ et $x \mapsto x^{\beta+k} = \frac{1}{x^{-\beta-k}}$ est intégrable sur $]0,x_0]$ d'après le critère de Riemann en 0 car $-\beta-k < 1-k < 1$, donc par comparaison g_k est intégrable sur $]0,x_0]$;
  - ⋆ sur $[x_0,+\infty[$, $g_k(x) \leq Mx^{\alpha+k}e^{-ax} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[x_0,+\infty[$ d'après le critère de Riemann en $+\infty$ car $2 > 1$, donc par comparaison g_k est intégrable sur $[x_0,+\infty[$.

Ainsi, d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\mathcal{L}(f)^{(k)}(p) = (-1)^k \int_0^{+\infty} x^k f(x) e^{-px} \, \mathrm{d}x.$$

(c) D'après les hypothèses sur f, la fonction g est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$; $g(x) = \underset{x \to +\infty}{O}(x^{\alpha-1})$ et $g(x) = \underset{x \to 0^+}{O}(x^{\beta-1})$. Comme $\alpha + 1 \in \mathbb{R}$ et $\beta - 1 > -1$, d'après les deux questions précédentes, $\mathcal{L}(g)$ admet pour limite 0 en $+\infty$, $\mathcal{L}(g)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc en particulier dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a, pour tout $p \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\mathcal{L}(g)'(p) = -\int_0^{+\infty} \underbrace{xg(x)}_{=f(x)} e^{-px} \, \mathrm{d}x = -\mathcal{L}(f).$$

Ainsi, $-\mathcal{L}(g)$ est une primitive de $\mathcal{L}(f)$ et donc on a, $\mathcal{L}(g)$ admettant pour limite 0 en $+\infty$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(g)(p) &= -\lim_{q \to +\infty} \mathcal{L}(g)(q) - (-\mathcal{L}(g)(p)) \\
&= [-\mathcal{L}(g)(q)]_p^{+\infty} \\
\mathcal{L}(g)(p) &= \int_p^{+\infty} \mathcal{L}(f)(q) \, \mathrm{d}q.
\end{aligned}$$

2. (a) D'après la question 3.(a) du problème 3, on a $\mathcal{L}(\sin) : p \mapsto \frac{1}{p^2+1}$. De plus sin est continue sur $\mathbb{R}$ donc continue par morceaux sur $]0, +\infty[$ et vérifie $\sin(x) = \underset{x \to +\infty}{O}(1)$ et $\sin(x) = \underset{x \to 0^+}{O}(x)$, d'où, d'après la question précédente, $\mathcal{L}(\mathrm{sinc})$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a, pour tout $p \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\mathrm{sinc})(p) &= \int_p^{+\infty} \mathcal{L}(\sin)(q) \, \mathrm{d}q \\
&= \int_p^{+\infty} \frac{1}{q^2+1} \, \mathrm{d}q \\
&= [\arctan(q)]_p^{+\infty} \\
\mathcal{L}(\mathrm{sinc})(p) &= \frac{\pi}{2} - \arctan(p).
\end{aligned}$$

(b) La fonction sinc est continue sur $\mathbb{R}_+$ (en la prolongeant par continuité en 0 par $\mathrm{sinc}(0) = 1$) et l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{sinc}(x) \, \mathrm{d}x$ converge (voire Chapitre Intégration généralisée). Par suite, d'après la question 4.(b) du problème 3, la fonction $\mathcal{L}(\mathrm{sinc})$ est

continue sur $\mathbb{R}_+$ et donc en particulier en 0. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \operatorname{sinc}(x)\,\mathrm{d}x &= \mathcal{L}(\operatorname{sinc})(0) \\
&= \lim_{p\to 0^+} \mathcal{L}(\operatorname{sinc})(p) \\
&= \lim_{p\to 0^+} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(p)\right) \\
\int_0^{+\infty} \operatorname{sinc}(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Annexe

Outils pour la résolution des problèmes

1. Propriétés utiles des intégrales de Wallis

Problème 5. *Intégrales de Wallis*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$. On note W la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que W est une suite à valeurs strictement positives, strictement décroissante. En déduire que W est convergente et montrer que sa limite est 0.
   Indication pour ce dernier point : on pourra utiliser le théorème de convergence dominé si on est pressé ; sinon, on pourra fixer $\varepsilon > 0$ et couper intelligemment l'intégrale en deux parties chacune inférieure à $\varepsilon/2$ à partir d'un certain rang.
2. Déterminer une relation de récurrence $(*)$ entre W_{n+2} et W_n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. (a) Utiliser $(*)$ pour montrer que $W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n$ et que la suite $((n+1)W_nW_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante en $\frac{\pi}{2}$.

   (b) En déduire que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ -' *on peut donc prouver que la limite de W est nulle d'une troisième façon !*
4. Calculer W_0 et W_1 puis déterminer à l'aide de la relation de récurrence $(*)$ que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ W_{2n} = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}.\frac{\pi}{2} \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ W_{2n+1} = \frac{4^n}{\binom{2n}{n}}.\frac{1}{2n+1}.$$

2. Formules de la moyenne

Proposition Annexe 1. Première formule de la moyenne

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Si f, g sont continues et g positive, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que :

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(c).\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration.

Comme f est continue sur le segment $[a, b]$, d'après le théorème des bornes atteintes, elle est bornée et atteint ses bornes. Ainsi, comme g est positive et par croissance de l'intégrale, on a :

$$\min(f)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \le \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \le \max(f)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Par suite, $\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ est compris entre deux valeurs de la fonction continue $x \mapsto f(x)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$; ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(c)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

□

Proposition Annexe 2. Deuxième formule de la moyenne

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si f est continue, g est de classe C^1, positive et décroissante, et f est continue, alors il existe $c \in [a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = g(a)\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration.

On note F la primitive de f qui s'annule en a. On obtient, par intégration par parties :

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = F(b)g(b) - \int_a^b F(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme $-g', F$ sont continues et $-g'$ positive, d'après la première formule de la moyenne, il existe $c_0 \in [a,b]$ tel que :

$$-\int_a^b F(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b F(t)(-g'(t))\,\mathrm{d}t = F(c_0)\int_a^b (-g'(t))\,\mathrm{d}t = F(c_0)(g(a) - g(b)).$$

Donc,

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = g(a)\int_a^{c_0} f(t)\,\mathrm{d}t + g(b)\int_{c_0}^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Si $\int_{c_0}^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$, comme g est décroissante, on a :

$$g(a)\int_{c_0}^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq g(b)\int_{c_0}^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0 = g(a)\int_{c_0}^{c_0} f(t)\,\mathrm{d}t$$

et on a, par le même raisonnement, l'inégalité dans l'autre sens si $\int_{c_0}^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq 0$. La valeur $g(b)\int_{c_0}^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est donc comprise entre deux valeurs de la fonction continue $x \mapsto g(a)\int_{c_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [c_0, b] \subset [a,b]$ tel que $g(b)\int_{c_0}^b f(t)\,\mathrm{d}t = g(a)\int_{c_0}^c f(t)\,\mathrm{d}t$, d'où, par la relation de Chasles :

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = g(a)\int_a^{c_0} f(t)\,\mathrm{d}t + \underbrace{g(b)\int_{c_0}^b f(t)\,\mathrm{d}t}_{=g(a)\int_{c_0}^c f(t)\,\mathrm{d}t} = g(a)\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t.$$

□