Chapitre XV
Calcul différentiel

Table des matières

Partie A : Introduction et rappels **2**
1. Exemple . . . 2
2. Continuité . . . 2

Partie B : Dérivées partielles **4**
1. Dérivée suivant un vecteur . . . 4
2. Matrice jacobienne . . . 6

Partie C : Différentiabilité **8**
1. Différentielle d'une application . . . 8
2. Différentielle et dérivées partielles . . . 14
3. Opérations sur les applications différentiables . . . 15
4. Fonctions de classe C^1 . . . 18
5. Arcs paramétrés et dérivées le long d'un arc . . . 21
6. Vecteurs tangents à une partie . . . 24
7. Fonctions de classe C^k . . . 26

Partie D : Fonctions numériques **28**
1. Gradient . . . 28
2. Vecteurs tangents d'une fonction numérique . . . 29
3. Approximation au second ordre et matrice hessienne . . . 32

Partie E : Optimisation **35**
1. Extrema et points critiques . . . 35
2. Extrema libres : étude au premier ordre . . . 35
3. Extrema libres : étude au second ordre . . . 36
4. Extrema liés : optimisation sous contraintes . . . 37

Dans tous le chapitre, E, F désignent des espaces vectoriels normés de dimension finie, respectivement p et q. De plus, U, V désignent des ouverts de E et F respectivement.

Partie A

Introduction et rappels

Le but de ce chapitre est de généraliser l'étude des fonctions d'un intervalle $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ aux fonctions d'un ouvert de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$. On souhaite donner un sens aux concepts de dérivabilité, tangente, etc... afin de pouvoir déterminer les extrema de telles fonctions ou tracer leurs graphes par exemple.

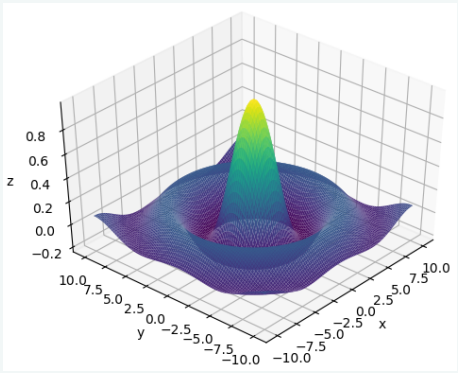
1. Exemple

Exemple 1.

Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que :

$$f : (x, y) \mapsto \frac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Son graphe $\mathcal{G} = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ est une partie de $\mathbb{R}^3$:



2. Continuité

Définition 1. *Rappel : continuité*

Soit $f : U \to F$ une fonction et $a \in U$. On dit que f est continue en a si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in U, \quad \|x - a\|_E \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| \leq \varepsilon.$$

Montrer qu'une fonction est continue en un point.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$. Pour montrer que f est continue en a, il suffit très souvent de :

- calculer $|f(x) - f(a)|$;
- Majorer $|f(x) - f(a)|$ par $K\|x - a\|^\alpha$ où $K, \alpha > 0$ et la norme $\|\cdot\|$ sur E est choisie judicieusement en fonction de l'expression de f.
  Remarque : on peut choisir la norme que l'on veut car E est de dimension finie et donc toutes ses normes sont équivalentes.

Exercice 1.

Montrer que les fonctions suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ sont continues en $(0,0)$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} (x+y)\sin\left(\frac{1}{x+y2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer qu'une fonction est n'est pas continue en un point.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$. Pour montrer que f est n'est pas continue en a (étant donnée une valeur pour $f(a)$), il suffit de déterminer une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E tels que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ et

$$f(u_n) \not\to f(a).$$

Exercice 2.

Montrer que les fonctions suivantes ne sont pas continues en 0_E :

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad g(x,y,z)=\begin{cases} \dfrac{xy+yz}{x^2+2y^2+2z^2} & \text{si } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque 1.

Pour montrer qu'une fonction de U dans $\mathbb{R}$ n'est pas prolongeable par continuité en a, il suffit donc de trouver deux suites (u_n) et (v_n) qui convergent vers a et telle que $f(u_n)$ et $f(v_n)$ ne convergent pas vers une même limite (ou que l'une des deux ne converge pas du tout !)

Exercice 3.

Déterminer le domaine de définition de la fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ et montrer qu'elle n'est pas prolongeable par continuité en $(0,0)$.

Partie B

Dérivées partielles

1. Dérivée suivant un vecteur

Définition 2.

Soit $f : U \to F$ une fonction, $a \in U$ et $u \in E$. On dit que f est **dérivable en a suivant u** si la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}(f(a+tu) - f(a))$ admet une limite en 0. Dans ce cas, on note :

$$D_u f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(a+tu) - f(a)),$$

et $D_u f(a)$ est appelée la **dérivée de f en a selon u**.

Exemple 2.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f : (x, y) \mapsto x^2 + 5xy^3$. Alors

$$D_{(1,1)} f(x_0, y_0) = 2x_0 + 5y_0^3 + 15x_0 y_0^2.$$

Exercice 4.

Soit $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ tel que $f(M) = M^2$ et $A, U \in M_n(\mathbb{R})$.
Déterminer la dérivée de f en A suivant U.

Définition 3. *Dérivée partielle en un point*

Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E, $f : U \to F$ et $a \in U$.
Soit $j \in [\![1, p]\!]$. On dit que f admet une **j-ème dérivée partielle de f en a dans la base $\mathcal{B}$** si f admet une dérivée en a suivant e_j. Dans ce cas, on note :

$$\partial_j f(a) = D_{e_j} f(a) \text{ ou encore } \frac{\partial}{\partial x_j} f(a) = D_{e_j} f(a).$$

Définition 4. *Application dérivée partielle*

Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E, $f : U \to F$ et $a \in U$.
Si f admet une dérivée partielle en tout point a de U, alors on appelle **j-ème dérivée partielle**

de f dans la base $\mathcal{B}$ l'application $\dfrac{\partial}{\partial x_j} f$ de U dans F telle que :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f : x \mapsto \frac{\partial}{\partial x_j} f(x).$$

Remarque 2.

Pour $E = \mathbb{R}^3$ par exemple, et $f : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ on notera

$$\frac{\partial}{\partial x} f, \quad \frac{\partial}{\partial y} f, \quad \frac{\partial}{\partial z} f$$

les dérivées partielles suivant les vecteurs de la base canonique.

Exemple 3.

Pour $f : (x, y, z) \mapsto (x^2 y, 2z^3 + y e^{2x})$ admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ et on a :

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) = (2xy, 2ye^{2x}), \ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z) = (x^2, e^{2x}), \ \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z) = (0, 3z^2)$$

Exercice 5.

Calculer les dérivées partielles de $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ suivant les vecteurs de la base canonique où :

$$f(x, y, z, t) = \frac{xy + z}{1 + t^2}$$

Exercice 6.

On considère la fonction $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) = (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0, 0)$ suivant la base canonique.

Correction.

Tout d'abord f n'est pas continue en $(0, 0)$: en effet, on a :

$$f(1/n, 1/n) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n2}} = \frac{1}{2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{2} \neq 0 = f(0, 0)$$

et $(1/n, 1/n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} (0, 0)$.

Ainsi, f n'est pas continue en $(0, 0)$ (on peut montrer également qu'elle n'est pas prolongeable par continuité : on aurait pu prendre n'importe quelle valeur pour $f(0, 0)$, f n'aurait pas été continue en

$(0,0)$).
Malgré cela, on va montrer que f possède des dérivées partielles dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$.
On a,

$$\frac{1}{t}(f((0,0)+te_1)-f(0,0)) = \frac{1}{t}(f(1,0)-f(0,0)) = 0 \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

Donc, par définition, f admet une dérivée partielle en $(0,0)$ suivant e_1 et on a :

$$\frac{\partial}{\partial x} f(0,0) = D_{e_1} f(0,0) = 0.$$

Par un calcul similaire, on trouve que f admet une dérivée partielle en $(0,0)$ suivant e_2 et que :

$$\frac{\partial}{\partial y} f(0,0) = D_{e_2} f(0,0) = 0.$$

Ainsi, f admet des dérivées partielles en $(0,0)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$... alors qu'elle n'est pas continue en $(0,0)$...

Remarque 3.

Attention ! Contrairement au cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, une fonction peut admettre des dérivées partielles égales en un point mais ne pas être continue en ce point ! (voire la fonction précédente)

2. Matrice jacobienne

Rappel :
Étant donné une fonction $f : U \to F$ et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q)$ une base de F, on a la décomposition, pour chaque $x \in U$,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{q} f_i(x)\varepsilon_i$$

où les fonctions $f_i : U \to \mathbb{R}$ sont les **applications composantes** de f dans la base $\mathcal{C}$.

Exemple : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ telle que :

$$f(x,y,z) = (x + y^2, 2xyz).$$

Dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, les applications composantes de f sont :

$$f_1(x,y,z) = x + y^2 \text{ et } f_2(x,y,z) = 2xyz.$$

Définition 5. *Matrice jacobienne*

Soit $f : U \to F$ une fonction, $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ des bases de E, F respectivement et $a \in U$.
On appelle **matrice jacobienne de f en a dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$** la matrice notée $Jf(a) \in M_{q,p}(\mathbb{R})$ telle que :

$$Jf(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\leq i\leq q\\ 1\leq j\leq p}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix}.$$

Exemple 4.

Application de passage des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes
L'application $\varphi : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie, pour $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, par :

$$\varphi(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta)),$$

admet pour matrice jacobienne en (r, θ) dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$:

$$J\varphi(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Exercice 7.

Calculer la matrice jacobienne dans les bases canoniques :

1. $f : (x, y) \mapsto (x + y, x^2 y)$ en (x, y) puis en $(0, 0)$;
2. $g : (x, y, z) \mapsto \left(\frac{\cos(xy)}{1 + z^2}, z^3 e^{xy}\right)$ en (x, y, z) puis en $(-1, \pi, 0)$;
3. $h : (x, y, z, t) \mapsto (xy, yz, zt, tx)$ en (x, y, z, t) puis en $(1, 1, 1, 1)$.

Exercice 8.

Donner la matrice jacobienne de l'application S de passage des coordonnées sphériques vers les coordonnées cartésiennes dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ au point (r, θ, φ)

Partie C

Différentiabilité

1. Différentielle d'une application

a. Définitions

Définition 6. *Différentiabilité locale*

Soit $f : U \to F$ et $a \in U$.
On dit que f est **différentiable en** a, s'il existe $\ell \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que :

$$f(a+h) = f(a) + \ell(h) + o(\|h\|) \text{ quand } h \to 0_E.$$

Dans ce cas, on dira également que f **admet un développement limité à l'ordre** 1 **en** a.

Proposition 1.

Soit $f : U \to F$ et $a \in U$. Si f est différentiable en a, alors f est continue en a.

Démonstration.

On suppose f différentiable en a. Alors f admet un développement limité à l'ordre 1 en a *i.e.* il existe $\ell \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que :

$$f(a+h) = f(a) + \ell(h) + \underset{h \to 0_E}{o}(\|h\|).$$

Comme E est de dimension finie, ℓ est une apllication linéaire continue sur E et donc en 0_E, d'où $\ell(h) \xrightarrow[h \to 0_E]{} \ell(0_E) = 0_F$.
Par suite, pour tout x dans un voisinage de a dans U, on a, par inégalité triangulaire :

$$\|f(x) - f(a)\|_F = \|f(a+h) - f(a)\|_F \leq \|\ell(h)\| + \underset{h \to 0_E}{o}(\|h\|) \xrightarrow[h \to 0_E]{} 0$$

d'où $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$ et donc f est continue en a. □

Lemme 1.

Soit $f : U \to F$ et $a \in U$. Si f est différentiable en a, alors il existe une **unique** application $\ell \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que :

$$f(a+h) = f(a) + \ell(h) + o(\|h\|) \text{ quand } h \to 0_E.$$

Démonstration.

On suppose f différentiable en a. Soit $\ell, \ell' \in \mathcal{L}(E,F)$ tels que :

$$f(a+h) = f(a) + \ell(h) + o(\|h\|) \text{ et } f(a+h) = f(a) + \ell'(h) + o(\|h\|)$$

Montrons que $\ell = \ell'$ *i.e.* pour tout $x \in E$, $\ell(x) = \ell'(x)$.
Soit $x \in E$. Pour $t \in \mathbb{R}^*$, on a $h = tx \to 0_E$ quand $t \to 0$ et $\|h\| = \|tx\| = |t|.\|x\|$. Par suite, on a :

$$f(a+tx) = f(a) + \ell(tx) + \underset{t\to 0}{o}(t) \text{ et } f(a+tx) = f(a) + \ell'(tx) + \underset{t\to 0}{o}(t).$$

Ainsi, par linéarité de ℓ et ℓ' puis en effectuant la différence de ces deux égalités, on obtient :

$$t(\ell(x) - \ell'(x)) = \ell(tx) - \ell'(tx) = \underset{t\to 0}{o}(t)$$

et donc :

$$\ell(x) - \ell'(x) = \underset{t\to 0}{o}(1) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

d'où $\ell(x) = \ell'(x)$.
Ceci étant vrai pour tous $x \in E$, il en résulte que $\ell = \ell'$; ce qui prouve l'unicité. □

Le lemme précédent justifie la définition suivante :

Définition 7. *différentielle en un point*

Soit $f : U \to F$ et $a \in U$. Si f est différentiable en a, on appelle **différentielle de f en a** et on note $\mathrm{d}f(a)$ l'unique application linéaire telle que :

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a)(h) + o(\|h\|) \text{ quand } h \to 0_E.$$

Exercice 9.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to F$. Caractériser la différentiabilité de f en a en terme de dérivabilité en a et donner dans ce cas une expression de $\mathrm{d}f(a)$.

Correction.

On commence par démontrer le lemme suivant :

> Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On a : $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, F)$ si, et seulement si, il existe un unique $u \in F$ tel que $\varphi : x \mapsto xu$.
>
> Démonstration.
>
> ⇐ S'il existe un unique $v \in F$ tel que $\varphi : x \mapsto xu$ alors pour tout $\lambda, \mu, x, y \in \mathbb{R}$, on a $\varphi(\lambda x + \mu y) = (\lambda x + \mu y)u = \lambda(xu) + \mu(yu) = \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y)$ donc $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, F)$.
>
> ⇒ On suppose $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, F)$. On pose $u = \varphi(1) \in F$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a, par linéarité de φ,
>
> $$\varphi(x) = \varphi(x.1) = x\varphi(1) = xu;$$
>
> d'où $\varphi : x \mapsto xu$. Par construction, $u = \varphi(1)$ est unique.

On a :

$$f \text{ est dérivable en } a$$
$$\text{si, et seulement si,}$$
$$h \mapsto \tfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \text{ admet une limite } \ell \in F \text{ quand } h \to 0$$
$$\text{si, et seulement si,}$$
$$\text{il existe } \ell \in F \text{ tel que } \tfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ell + \underset{h\to 0}{o}(1)$$
$$\text{si, et seulement si,}$$
$$\text{il existe } \ell \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(a+h) = f(a) + h.\ell + \underset{h\to 0}{o}(h)$$
$$\text{si, et seulement si, (en vertu du lemme initial)}$$
$$\text{il existe } L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, F) \text{ tel que } f(a+h) = f(a) + L(h) + \underset{h\to 0}{o}(|h|)$$
$$\text{si, et seulement si,}$$
$$f \text{ est différentiable en } a.$$

Dans ce cas, on a donc :

$$\mathrm{d}f(a) : h \mapsto L(h) = h.\ell = h.f'(a)$$

Définition 8. *Différentiabilité globale*

Soit $f : U \to F$. On dit que f est **différentiable sur** U si f est différentiable en a pour tout $a \in U$. Dans ce cas, appelle **différentielle de** f **sur** U et on note $\mathrm{d}f$ l'application de U dans $\mathcal{L}(E, F)$ telle que :

$$\mathrm{d}f : x \mapsto \mathrm{d}f(x).$$

b. Exemples

Exemple 5.

Soit $f : U \to F$.

- Si f est constante en $c \in F$, alors f est différentiable sur U et $\mathrm{d}f = \mathbf{0}$.
- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors f est différentiable sur E et, pour tout $a \in E$, $\mathrm{d}f(a) = f$.

Proposition 2.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, ...e_n)$ une base de E. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la i-ème application coordonnée $\varphi_i : x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \mapsto x_i$ est différentiable sur E.

Proposition 3. *Différentielle d'une application bilinéaire*

Soit $B : E_1 \times E_2 \to F$ une application bilinéaire. Alors B est différentiable sur $E_1 \times E_2$ et on

a, pour tout $(x, y) \in E_1 \times E_2$:

$$dB(x, y) : (h, k) \mapsto B(x, k) + B(h, y).$$

Démonstration.

Soit $(x, y) \in E_1 \times E_2$. On a, pour tout $(h, k) \in E_1 \times E_2$:

$$B(x + h, y + k) - B(x, y) = B(x, k) + B(h, y) + B(h, k).$$

Par linéarité des applications $B(x, \cdot)$ et $B(\cdot, y)$, l'application $\ell : E_1 \times E_2 \to F$ telle que :

$$\ell(h, k) = B(x, k) + B(h, y)$$

est linéaire.
De plus, $E_1 \times E_2$ étant de dimension finie, l'application bilinéaire B est continue sur $E_1 \times E_2$. Ainsi, il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $(h, k) \in E_1 \times E_2$:

$$\|B(h, k)\|_F \leq M\|h\|_{E_1}\|k\|_{E_2}$$

En considérant sur $E_1 \times E_2$ la norme produit $\|(h, k)\|_\infty = \max(\|h\|_{E_1}, \|k\|_{E_2})$ on obtient :

$$\|B(h, k)\|_F \leq M\|h\|_{E_1}\|k\|_{E_2} \leq M\|(h, k)\|_\infty^2 = o\left(\|(h, k)\|_\infty\right)$$

Ainsi, on a, pour tout $(h, k) \in E_1 \times E_2$:

$$B(x + h, y + k) - B(x, y) = \ell(h, k) + o\left(\|(h, k)\|\right),$$

où ℓ est une application linéaire.
Il en résulte que B est différentiable sur $E_1 \times E_2$ et pour tout $(x, y) \in E_1 \times E_2$:

$$dB(x, y) = \ell : (h, k) \mapsto B(x, k) + B(h, y).$$

□

Plus généralement, on le résultat suivant :

Proposition 4. *Différentielle d'une application multilinéaire*

Soit $M : E_1 \times \ldots \times E_n \to F$ une application multilinéaire. Alors M est différentiable sur $E_1 \times \ldots \times E_n$ et on a, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$:

$$dM(x_1, \ldots, x_n) : (h_1, \ldots, h_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} M(x_1, \ldots, x_{i-1}, h_i, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Exemple 6.

Soit E un espace de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E. L'application $\det_{\mathcal{B}}$ est différentiable sur E.

c. Exercices

Méthode : calculer une différentielle.
Pour montrer qu'une fonction $f : U \to F$ est différentiable en $a \in U$ et calculer $\mathrm{d}f(a)$ avec la définition :

- on calcule $f(a+h) - f(a)$;
- on "récupère" de ce calcul un partie $\ell(h)$ qui dépend linéairement de h ;
- on montre que $f(a+h) - f(a) - \ell(h) = o(\|h\|)$.

Exercice 10.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ telle que $f : M \mapsto M^2$. Montrer que f est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$ et calculer sa différentielle.

Exercice 11.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et Montrer que l'application $\exp : M \mapsto \exp(M)$ est différentiable en $A = \lambda I_n$ et calculer sa différentielle.

Remarque : en fait, on peut montrer que exp *est différentiable sur* $M_n(\mathbb{R})$ *- mais comme en général,* A *et* H *ne commutent pas, ce n'est pas aussi simple que dans le cas précédent.*

Démonstration.

On considère une norme $\|\cdot\|$ sous-multiplicative sur $M_n(\mathbb{R})$. Soit $H \in M_n(\mathbb{R})$. Comme $A = \lambda I_n$, A et H commutent, $\exp(A+H) = \exp(A)\exp(H)$. Ainsi, on a :

$$\exp(A+H) - \exp(A) = \exp(A)(\exp(H) - I_n) = \exp(A)\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{H^k}{k!} = \exp(A)H + \exp(A)\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{H^k}{k!}.$$

L'application $\ell : H \mapsto \exp(A)H$ est linéaire et on a :

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{H^k}{k!}\right\| &= \left\|H^2.\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{H^{k-2}}{k!}\right\| \\ &\leq \|H\|^2\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\|H\|^{k-2}}{k!} \\ \left\|\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{H^k}{k!}\right\| &\leq \|H\|^2\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\|H\|^{k-2}}{(k-2)!} = \|H\|^2 e^{\|H\|}\end{aligned}$$

et ainsi $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{H^k}{k!} = \underset{h\to 0_E}{o}(\|H\|)$ car $\dfrac{\|H\|^2 e^{\|H\|}}{\|H\|} = \|H\|e^{\|H\|} \xrightarrow[h\to 0_E]{} 0$.

Par suite, exp est différentiable en $A = \lambda I_n$ et comme $\exp(A) = \exp(\lambda I_n) = e^\lambda I_n$, on a, pour tout $H \in M_n(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{d}\exp(A)(H) = \exp(A)H = e^\lambda H.$$

□

Exercice 12.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\|\cdot\|$ une norme sous-multiplicative sur $E = M_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $A \in E$ telle que $\|A\| < 1$.
   (a) Montrer que $\sum A^k$ converge.
   (b) Montrer que $I_n - A$ est inversible et déterminer son inverse.
2. Montrer que la fonction $f : GL_n(\mathbb{R}) \to E$ définie, pour $M \in GL_n(\mathbb{R})$, par $f(M) = M^{-1}$ est différentiable sur $GL_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa différentielle en tout point.

Correction.

1. Soit $A \in E$ telle que $\|A\| < 1$.
   (a) On a, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ qui est le terme général d'une série géométrique convergente car $\|A\| < 1$, d'où, par comparaison, $\sum A^k$ converge absolument et donc converge.
   (b) On remarque que :
   $$(I_n - A)\sum_{k=0}^{+\infty} A^k = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k - \sum_{k=0}^{+\infty} A^{k+1} = I_n,$$
   donc $I_n - A$ est inversible d'inverse $\sum_{k=0}^{+\infty} A^k$.
2. Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$ et $H \in E$ tel que $\|M^{-1}H\| < 1$. Alors $M + H$ est inversible ; en effet, on a $M + H = M(I_n + M^{-1}H)$, or M est inversible et $I_n + M^{-1}H$ l'est aussi d'après la question précédente avec $A = -M^{-1}H$; d'où $M + H$ est inversible comme produit de matrices inversibles.
   Ainsi, $f(M + H)$ est bien défini, et on a :
   $$\begin{aligned} f(M+H) - f(M) &= (M+H)^{-1} - M^{-1} \\ &= ((I_n + M^{-1}H)^{-1} - I_n)M^{-1} \\ &= \left(\left(\sum_{k=0}^{+\infty}(-M^{-1}H)^k\right) - I_n\right)M^{-1} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{+\infty}(-M^{-1}H)^k\right)M^{-1} \\ f(M+H) - f(M) &= -M^{-1}HM^{-1} + \underbrace{\left(\sum_{k=2}^{+\infty}(-M^{-1}H)^k\right)}_{\varepsilon(H)}M^{-1} \end{aligned}$$
   Par propriétés du produit matriciel, l'application $\ell : H \mapsto -M^{-1}HM^{-1}$ est linéaire.
   De plus, pour tout $H \in E$ tel que $\|H\| < \|M\|$, on a $\|M^{-1}H\| \leq \|M^{-1}\|.\|H\| < 1$ *(exercice :*

montrer cette affirmation) et :

$$\begin{aligned}\|\varepsilon(H)\| &\leq \sum_{k=2}^{+\infty} \left\|(M^{-1}H)^k\right\| \\ &\leq \left(\|M^{-1}\|.\|H\|\right)^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\|M^{-1}\|.\|H\|\right)^k \\ \|\varepsilon(H)\| &\leq \|H\|^2.\frac{\|M^{-1}\|^2}{1-\|M^{-1}\|.\|H\|};\end{aligned}$$

par suite, $\dfrac{\|\varepsilon(H)M^{-1}\|}{\|H\|} \leq \|H\|.\dfrac{\|M^{-1}\|^3}{1-\|M^{-1}\|.\|H\|} \xrightarrow[\|H\|\to 0]{} 0.$

Ainsi, pour tout $M \in GL_n(\mathbb{R})$, pour tout $H \in E$ tel que $\|H\| < \|M\|$, on a $f(M+H) = f(M) + \ell(M) + o(\|H\|)$ avec ℓ linéaire ; donc f est différentiable sur $G_n(\mathbb{R})$ et :

$$\mathrm{d}f(M) : H \mapsto -M^{-1}HM^{-1}.$$

2. Différentielle et dérivées partielles

Proposition 5. *Différentielle et dérivée suivant un vecteur*

Soit $f : U \to F$ et $a \in U$. Si f est différentiable en a, alors f admet une dérivée en a selon tout vecteur de u et on a :

$$D_u f(a) = \mathrm{d}f(a)(u).$$

Démonstration.

On suppose f est différentiable en a. Alors, pour tout $h \in E$ tel que $a+h \in U$, on a :

$$f(a+h) - f(a) = \mathrm{d}f(a)(h) + \underset{\|h\|\to 0}{o}(\|h\|).$$

Soit $u \in E \setminus \{0_E\}$ (le cas $u = 0_E$ est trivial : toute fonction est dérivable suivant 0_E de dérivée égale à 0_F.
On remarque alors que, pour un réel t strictement positif, $\|tu\| \to 0$ si, et seulement si, $t \to 0$; ainsi, en utilisant la formule précédente appliqué à $h = tu$, on obtient :

$$f(a+tu) - f(a) = \mathrm{d}f(a)(tu) + \underset{t\to 0}{o}(\|tu\|) = t.\,\mathrm{d}f(a)(u) + \underset{t\to 0}{o}(t)$$

Ainsi,

$$\frac{1}{t}(f(a+tu) - f(a)) = \mathrm{d}f(a)(u) + \underset{t\to 0}{o}(1) \xrightarrow[t\to 0]{} \mathrm{d}f(a)(u).$$

Il en résulte que f admet une dérivée en a suivant h et que :

$$D_u f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(a+tu) - f(a)) = \mathrm{d}f(a)(u).$$

□

Proposition 6. *Lien entre différentielle et dérivées partielles*

Soit $f : U \to F$, $a \in U$ et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E.
Si f est différentiable en a, alors, pour tout $h = \sum_{j=1}^{p} h_j e_j \in E$, on a :

$$\mathrm{d}f(a)(h) = \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

Démonstration.

On considère une base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ de E. Comme f est différentiable en a, d'après la proposition 5, f admet des dérivées en a suivant chacun des e_j et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = D_{e_j} f(a) = \mathrm{d}f(a)(e_j).$$

Ainsi, pour $h = \sum_{j=1}^{p} h_j e_j \in E$, on a, par linéarité de la différentielle :

$$\mathrm{d}f(a)(h) = \mathrm{d}f(a)\left(\sum_{j=1}^{p} h_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{p} h_j \,\mathrm{d}f(a)(e_j) = \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

□

Corollaire 1. *Lien entre différentielle et dérivées partielles*

Soit $f : U \to F$, $a \in U$ et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p), \mathcal{C} = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_q)$ des bases de E et F respectivement.
Si f est différentiable en a, alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{d}f(a)) = Jf(a).$$

où $Jf(a)$ est la matrice jacobienne de f en a dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$

3. Opérations sur les applications différentiables

Proposition 7. *Linéarité*

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $f, g : U \to F$ et $a \in U$.

— Si f et g sont différentiables en a, alors $\lambda f + \mu g$ est différentiable en a et on a :

$$d(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda \,\mathrm{d}f(a) + \mu \,\mathrm{d}g(a).$$

— L'ensemble des applications différentiables en a (resp. sur U) est un espace vectoriel.

Proposition 8. *Produit d'applications différentiables à valeurs réelles*

Soit $f, g : U \to \mathbb{R}$ et $a \in U$.
Si f et g sont différentiables en a, alors fg est différentiable en a et on a :

$$d(fg)(a) = g(a)\,\mathrm{d}f(a) + f(a)\,\mathrm{d}g(a).$$

Correction.

On suppose f et g différentiables en a. On a, pour tout $h \in E$ tel que $a + h \in U$:

$$\begin{aligned}(fg)(a+h) - (fg)(a) &= f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a)\\ &= (f(a) + \mathrm{d}f(a)(h) + o(\|h\|))\,(g(a) + \mathrm{d}g(a)(h) + o(\|h\|)) - f(a)g(a)\\ &= g(a)\,\mathrm{d}f(a)(h) + f(a)\,\mathrm{d}g(a)(h) + (f(a) + g(a))o(\|h\|)\\ &\quad +(\mathrm{d}f(a)(h) + \mathrm{d}g(a)(h))o(\|h\|) + \mathrm{d}f(a)(h)\,\mathrm{d}g(a)(h) + o(\|h\|^2).\end{aligned}$$

De plus, comme E est de dimension finie, $\mathrm{d}f(a)$ et $\mathrm{d}g(a)$ sont des applications linéaires continues, donc on a :

$$|\,\mathrm{d}f(a)(h) + \mathrm{d}g(a)(h)| \leq |\,\mathrm{d}f(a)(h)| + |\,\mathrm{d}g(a)(h)| \leq (|||\,\mathrm{d}f(a)||| + |||\,\mathrm{d}g(a)|||).\|h\|$$

et

$$|\,\mathrm{d}f(a)(h)\,\mathrm{d}g(a)(h)| = |\,\mathrm{d}f(a)(h)|.|\,\mathrm{d}g(a)(h)| \leq (|||\,\mathrm{d}f(a)|||.|||\,\mathrm{d}g(a)|||)\|h\|^2$$

d'où :

$$(\,\mathrm{d}f(a)(h) + \mathrm{d}g(a)(h))o(\|h\|) + \mathrm{d}f(a)(h)\,\mathrm{d}g(a)(h) = o(\|h\|^2).$$

Ainsi :

$$(fg)(a+h) - (fg)(a) = g(a)\,\mathrm{d}f(a)(h) + f(a)\,\mathrm{d}g(a)(h) + \underbrace{(f(a) + g(a))o(\|h\|) + o(\|h\|^2)}_{=o(\|h\|)};$$

et donc :

$$(fg)(a+h) = (fg)(a) + \ell(h) + o(\|h\|)$$

avec $\ell = g(a)\,\mathrm{d}f(a) + f(a)\,\mathrm{d}g(a) \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ comme combinaison linéaire des applications linéaires $\mathrm{d}f(a)$ et $\mathrm{d}g(a)$. Par suite, fg est différentiable en a et :

$$\mathrm{d}(fg)(a) = g(a)\,\mathrm{d}f(a) + f(a)\,\mathrm{d}g(a).$$

Proposition 9.

Les applications polynomiales sont différentiables sur E.

Proposition 10. *Règle de la chaîne*

Soit $f : U \to F$, $g : V \to G$ telles que $f(U) \subset V$ et $a \in U$.
Si f est différentiable en a et g est différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et

on a :

$$\mathrm{d}(g\circ f)(a) = \mathrm{d}g(f(a))\circ \mathrm{d}f(a).$$

Correction.

On suppose f différentiable en a et g différentiable en $f(a)$. Comme $\mathrm{d}f(a)$ est une application linéaire continue sur E car E est de dimension finie, pour $h\in E$ et $h' = \mathrm{d}f(a)(h)+o(\|h\|)$, on a $h' \xrightarrow[h\to 0_E]{} 0_F$, donc, U et V étant des ouverts de E et F respectivement, il existe un voisinage de a tel que, pour tout h dans ce voisinage, $a+h\in U$ et $f(a)+h'\in V$ et on a :

$$\begin{aligned}
(g\circ f)(a+h)-(g\circ f)(a) &= g(f(a+h))-g(f(a))\\
&= g(f(a)+\mathrm{d}f(a)(h)+o(\|h\|))-g(f(a))\\
&= g(f(a)+h')-g(f(a))\\
&= \mathrm{d}g(f(a))(h')+o(\|h'\|_F)\\
(g\circ f)(a+h)-(g\circ f)(a) &= \mathrm{d}g(f(a))(\mathrm{d}f(a)(h))+\mathrm{d}g(f(a))(o(\|h\|))+o(\|h'\|_F).
\end{aligned}$$

Or, d'une part, par continuité de l'application linéaire $\mathrm{d}g(f(a))$ en 0_F (car F est de dimension finie), on a :

$$\mathrm{d}g(f(a))(\underbrace{o(\|h\|)}_{\text{dans } F}) = \|h\|\,\mathrm{d}g(f(a))(\underbrace{o(1)}_{\text{dans } F}) = \underbrace{o(\|h\|)}_{\text{dans } G};$$

et, d'autre part, comme $\mathrm{d}f(a)$ est une application linéaire continue sur E, pour tout $x\in E$, $\|\mathrm{d}f(a)(x)\|_F \le |||\mathrm{d}f(a)|||.\|x\|$, d'où, comme $h' = \mathrm{d}f(a)(h)+o(\|h\|)$:

$$\|h'\|_F \le (|||\mathrm{d}f(a)||| + o(1)).\|h\|$$

et donc, dans l'espace G, $o(\|h'\|_F) = o(\|h\|)$.

Par suite, on a :

$$(g\circ f)(a+h) = (g\circ f)(a) + (\mathrm{d}g(f(a))\circ \mathrm{d}f(a))(h) + o(\|h\|).$$

L'application $\mathrm{d}g(f(a))\circ \mathrm{d}f(a)$ étant linéaire comme composée d'applications linéaires, $g\circ f$ est différentiable en a et :

$$\mathrm{d}(g\circ f)(a) = \mathrm{d}g(f(a))\circ \mathrm{d}f(a).$$

Exercice 13.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $E = M_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'application $g : E\to\mathbb{R}$ définie, pour $M\in E$, par $g(M) = \mathrm{Tr}(M^2)$ est différentiable sur E et déterminer sa différentielle en tout point.

Corollaire 2. *Jacobienne d'une composée*

Soit $f : U\to F$, $g : V\to G$ telles que $f(U)\subset V$, $a\in U$ et $\mathcal{B},\mathcal{C},\mathcal{D}$ des bases de E,F,G respectivement.

Si f est différentiable en a et g est différentiable en $f(a)$, alors :

$$J(g \circ f)(a) = Jg(f(a)) \times Jf(a).$$

Exercice 14.

Soit $f : (x, y) \mapsto (y, x, x + y)$ et $g : (x, y, z) \mapsto (x^2 + y^2, z^2)$. Montrer que $g \circ f$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer sa différentielle en tout point de $\mathbb{R}^2$ de deux manières : en calculant $g \circ f$ et avec le produit des matrices jacobiennes.

Proposition 11. *Différentielle d'une inverse*

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $a \in U$.
Si f est différentiable en a et $f(a) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est différentiable en a et :

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{f}\right)(a) = -\frac{1}{f^2(a)}\,\mathrm{d}f(a).$$

Exercice 15.

Justifier que $f : (x, y) \mapsto \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ est C^1 sur $U = R^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et déterminer sa différentielle sur U. Est-elle différentiable en $(0, 0)$?

Exercice 16.

On suppose E euclidien. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ telle que $f : x \mapsto \frac{1}{\|x\|}$. Montrer que f est différentiable sur E et déterminer sa différentielle.

4. Fonctions de classe C^1

a. Définition et premiers exemples

Définition 9. *Fonction de classe C^1*

Soit $f : U \to F$. On dit que f est de **classe C^1 sur** U si f est différentiable sur U et $\mathrm{d}f$ est continue sur U.

Exemple 7.

Soit $f : U \to F$.
— Si f est constante en $c \in F$, alors f est de classe C^1 sur U.

— Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors f est de classe C^1 sur E.

Exercice 17.

On suppose que E est un espace euclidien. Soit $f : x \mapsto \|x\|^2$.

1. Montrer que f est différentiable sur E et déterminer sa différentielle.
2. En déduire que f est de classe C^1 sur E.

Correction.

1. On a, pour tous $a, h \in E$,
$$f(a+h) - f(a) = (a+h|a+h) - (a|a) = 2(a|h) + \|h\|^2$$
On pose $\ell : h \mapsto 2(a|h)$. Alors ℓ est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ par linéarité du produit scalaire par rapport à la deuxième variable et :
$$\frac{\|h\|^2}{\|h\|} = \|h\| \xrightarrow[h \to 0_E]{} 0$$
et d'où $f(a+h) = f(a) + 2(a|h) + o(\|h\|)$ et donc f admet un développement limité à l'ordre 1 en a.
Il en résulte que, pour tout $a \in E$, f est différentiable en a et on a $\mathrm{d}f(a) = \ell : h \mapsto 2(a|h)$.
Ainsi, f est différentiable sur E et $\mathrm{d}f : a \mapsto \mathrm{d}f(a) : h \mapsto 2(a|h)$
2. Montrons que $\mathrm{d}f$ est continue sur E (dans $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$). On remarque que, pour tout $a, b, h \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, par linéarité du produit scalaire par rapport à sa première variable :
$$\mathrm{d}f(\lambda a + \mu b)(h) = 2(\lambda a + \mu b|h) = \lambda \times 2(a|h) + \mu \times 2(b|h) = \lambda\,\mathrm{d}f(a)(h) + \mu\,\mathrm{d}f(b)(h)$$
et donc $\mathrm{d}f(\lambda a + \mu b) = \lambda\,\mathrm{d}f(a) + \mu\,\mathrm{d}f(b)$. Ainsi, $\mathrm{d}f$ est une application linéaire définie sur E qui est de dimension finie, donc $\mathrm{d}f$ est continue sur E.
Par suite, f est de classe C^1 sur E.

b. Opérations sur les fonctions de classe C^1

Proposition 12.

L'ensemble $C^1(U,F)$ est un espace vectoriel.

Question 1.

De quelle structure peut-on munir l'ensemble $C^1(U,\mathbb{R})$?

Proposition 13.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, ...e_n)$ une base de E. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la i-ème application coordonnée $\varphi_i : x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \mapsto x_i$ est de classe C^1 de E dans $\mathbb{R}$.

Démonstration.

L'application φ_i est linéaire et donc de classe C^1 sur E (voire exemple 7). □

Théorème 1. *Applications polynomiales*

Les applications polynomiales sur E sont de classe C^1 sur E.

Démonstration.

Une application polynomiale sur E est de classe C^1 sur E comme combinaison linéaire de produits d'applications coordonnées qui sont de classe C^1 sur E d'après la proposition 13. □

Exercice 18.

Justifier que les applications suivantes sont de classe C^1 sur E et déterminer leurs différentielles.

1. $f : (x, y) \mapsto (x^2 + y)^2$ et $E = \mathbb{R}^2$.
2. $g : (x, y, z) \mapsto x^3 + y^3 + z^3 + xyz$ et $E = \mathbb{R}^3$.

Proposition 14.

Soit $f : U \to F$, $g : V \to G$ telles que $f(U) \subset V$. Si f est de classe C^1 sur U et g est de classe C^1 sur V, alors $g \circ f$ est de classe C^1 sur U.

Proposition 15.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$. Si f est C^1 et ne s'annule pas sur U, alors $\frac{1}{f}$ est C^1 sur U.

c. Théorème fondamental

Théorème 2. *Théorème fondamental*

Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E et $f : U \to F$. On a l'équivalence suivante :

i) la fonction f est de classe C^1 sur U.

ii) les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ sont définies et continues sur U.

Exercice 19.

Montrer que la fonction $f : (x, y) \mapsto \dfrac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$ admet un prolongement C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

5. Arcs paramétrés et dérivées le long d'un arc

a. Arc paramétré

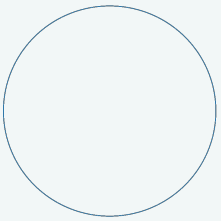
Dans ce paragraphe, I désigne un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

Définition 10. *Arc paramétré*

Une fonction $\gamma : I \to E$ est appelé **arc paramétré** et on appelle **support** de γ l'image $\gamma(I)$ de γ.

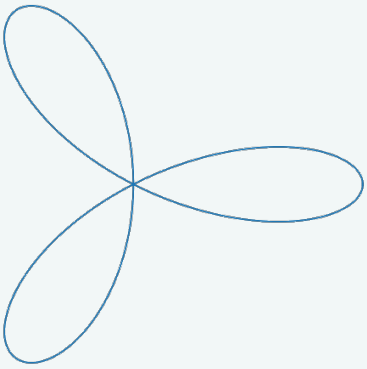
Exemple 8.

1. *Cercle :* L'arc paramétré $\gamma : t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ a pour support le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 :



2. *Cycloïde :* L'arc paramétré $\gamma : t \mapsto (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$ a pour support :

3. *Trifolium :* L'arc paramétré $\gamma : t \mapsto (\cos(2t) - \cos(t), \sin(2t) + \sin(t))$ a pour support :



4. *Folium :* L'arc paramétré $\gamma : t \mapsto (\frac{1-t^2}{1+t^2}, t\frac{1-t^2}{1+t^2})$ a pour support :

b. Opérations le long d'un arc

Proposition 16. *Dérivée le long d'un arc*

Soit $f : U \to F$ et $\gamma : I \to U$ un arc paramétré tel que $\gamma(I) \subset U$.

— Soit $t_0 \in I$. Si f est différentiable en $\gamma(t_0)$ et γ est dérivable en t_0, alors $f \circ \gamma$ est dérivable en t_0 et on a :

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = \mathrm{d}f(\gamma(t_0))(\gamma'(t_0)).$$

— Si f et γ sont de classe C^1 sur respectivement U et I, alors $f \circ \gamma$ est de classe C^1 sur I.

Démonstration.

— D'après la proposition 10, $f \circ \gamma$ est différentiable en t_0 et donc, d'après l'exercice 9, $f \circ \gamma$

est dérivable en t_0 et, pour tout $h \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} h.(f\circ\gamma)'(t_0) &= \mathrm{d}(f\circ\gamma)(t_0)(h) \\ &= (\mathrm{d}f(\gamma(t_0))\circ \mathrm{d}\gamma(t_0))(h) \\ &= \mathrm{d}f(\gamma(t_0))(\mathrm{d}\gamma(t_0)(h)) \\ &= \mathrm{d}f(\gamma(t_0))(h.\gamma'(t_0)) \\ &= h.\,\mathrm{d}f(\gamma(t_0))(\gamma'(t_0)) \end{aligned}$$

et donc, pour $h = 1 \in \mathbb{R}$, on obtient $(f\circ\gamma)'(t_0) = \mathrm{d}f(\gamma(t_0))(\gamma'(t_0))$.

— Cela découle directement de la proposition 14.

□

Corollaire 3.

Soit $f : U \to F$, $a, u \in E$ et $\gamma : I \to U$ l'arc paramétré définie, pour $t \in \mathbb{R}$ par $\gamma(t) = a + tu$. Si f est différentiable sur U, alors, pour tout $t \in I$:

$$(f\circ\gamma)'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t))(u).$$

Proposition 17. *Intégration le long d'un arc*

Soit $a, b \in U$ et $f : U \to F$ une fonction de classe C^1 sur U. Pour tout arc paramétré $\gamma : [0,1] \to U$ de classe C^1 sur I tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$, on a :

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t))(\gamma'(t))\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration.

Soit $\gamma : [0,1] \to U$ un arc paramétré de classe C^1 sur I tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$. Alors, d'après la proposition 16, $f\circ\gamma$ est dérivable sur $[0,1]$ et on a, pour tout $t \in [0,1]$:

$$(f\circ\gamma)'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t))(\gamma'(t))$$

Ainsi, d'après le théorème fondamental de l'analyse, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t))(\gamma'(t))\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 (f\circ\gamma)'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= f\circ\gamma(1) - f\circ\gamma(0) \\ \int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t))(\gamma'(t))\,\mathrm{d}t &= f(b) - f(a). \end{aligned}$$

□

Corollaire 4.

Soit $f : U \to F$. Si U **connexe par arcs** alors :
la fonction f est constante sur U si, et seulement si, $\mathrm{d}f = \mathbf{0}$.

Remarque 4.

Si U n'est pas connexe par arcs, l'implication réciproque est fausse en général : par exemple, si $U =]0,1[\sqcup]2,3[$, la fonction qui vaut 0 sur $]0,1[$ et 1 sur $]0,1[$ n'est pas constante sur U mais est différentiable sur U de différentielle nulle sur U.

6. Vecteurs tangents à une partie

Définition 11. *Vecteur tangent*

Soit X une partie de E et x un point de X.

- Soit $v \in E$ un vecteur. On dit que v est **tangent à X en x** s'il existe $\varepsilon > 0$ et $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to X$ un arc paramétré dérivable en 0 tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$.
- On note $T_x X$ l'ensemble des vecteurs tangents à X en x.

Remarque 5.

Si pour v dans E, il existe un arc défini sur $\mathbb{R}$ ou, plus généralement, sur un intervalle dont 0 est un point intérieur, dérivable à 0 avec $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$, alors v est tangent à X en x : en effet, il suffit de restreindre l'arc à un intervalle de la forme $]-\varepsilon, \varepsilon[$ pour satisfaire à la définition.

Exemple 9.

- Pour tous $X \subset E$ et $x \in X$, 0_E appartient à $T_x X$.
- Soit $\mathcal{V}$ un sous-espace affine de E dirigé par un sous-espace vectoriel V de E. Alors, pour tout $x \in \mathcal{V}$, $T_x \mathcal{V} = V$.
- On suppose euclidien et on pose $S = S(0_E, 1)$ la sphère unité de E. Alors, pour $x \in S$, $T_x S = \{x\}^\perp$.

Remarque : très souvent, pour déterminer un plan tangent, on conjecture son expression puis on raisonne par double inclusion.

- On considère l'arc γ constant en x de $\mathbb{R}$ dans E : il est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée nulle, son image est inclus dans X car $x \in X$ et $\gamma(0) = x$, $\gamma'(0) = 0_E$. D'où $0_E \in T_x X$.
- ⋆ Montrons $V \subset T_x \mathcal{V}$.
  Soit $v \in V$. On pose $\gamma : t \mapsto x + tv \in \mathcal{V}$. Alors γ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ donc dérivable sur 0 et à valeurs dans $\mathcal{V}$; de plus $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$ car γ' est constante en v. Par suite, $v \in T_x \mathcal{V}$.
  ⋆ Montrons $T_x \mathcal{V} \subset V$.

Soit $v \in T_x\mathcal{V}$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ et un arc $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathcal{V}$ tel que $\gamma(0) = x$ et $\Gamma'(0) = v$. Pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ avec $t \neq 0$, comme $\gamma(t), \gamma(0) \in V$, la combinaison linéaire :

$$\frac{1}{t}(\gamma(t) - \gamma(0)) = \frac{1}{t}\gamma(t) - \frac{1}{t}\gamma(0) \text{ appartient à } V.$$

Or E est de dimension finie, donc le sous-espace vectoriel V est fermé dans E (pour n'importe quelle norme et donc celle qu'on s'est fixée au départ). Par suite, par caractérisation séquentielle des fermés (quitte à prendre une suite t_n tendant vers 0) :

$$\gamma'(0) = \lim_{t\to 0} \underbrace{\frac{1}{t}(\gamma(t) - \gamma(0))}_{\in V} \in V.$$

Ainsi, par double inclusion, on a $T_x\mathcal{V} = V$.

— ⋆ Montrons $\{x\}^\perp \subset T_xS$.
Soit $v \in \{x\}^\perp$. On pose $g : t \mapsto x + tv$. Alors g à valeurs dans $E \setminus \{0_E\}$: en effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$, d'après le théorème de Pythgore, on a :

$$\|g(t)\|^2 = \|x + tv\|^2 = \|x\|^2 + |t|\|v^2\| > 0 \text{ car } \|x\| = 1.$$

Ainsi, l'arc $\gamma : t \to \frac{g(t)}{\|g(t)\|}$ est bien défini sur $\mathbb{R}$. Montrons que γ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc en 0.
On a $\gamma = g \times (\varphi \circ g)$ où $\varphi = \frac{1}{\|\cdot\|} = (\cdot)^{-\frac{1}{2}} \circ \|\cdot\|^2$ est différentiable sur $E \setminus \{0_E\}$ d'où $\varphi \circ g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après la proposition 16 et donc γ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
De plus, on a, pour tous $a, h \in E$ avec $a \neq 0_E$:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\varphi(a)(h) &= (\,\mathrm{d}(\cdot)^{-\frac{1}{2}}(\|a\|^2) \circ \mathrm{d}\|\cdot\|^2(a))(h) \\ &= -\tfrac{1}{2}\|a\|^{-3}.(2(a|h)) \\ \mathrm{d}\varphi(a)(h) &= -\frac{(a|h)}{\|a\|^3}. \end{aligned}$$

Ainsi, on a, d'après la proposition 16 et comme $(x|v) = 0$:

$$(\varphi \circ g)'(t) = \mathrm{d}f(g(t))(g'(t)) = -\frac{(x + tv|v)}{\|x + tv\|^3} = -\frac{t\|v\|^2}{\|x + tv\|^3}.$$

Par suite, comme $\|x\| = 1$,

$$\begin{aligned} \gamma'(0) &= g'(0)\varphi(g(0)) + \gamma(0)(\varphi \circ g)'(0) \\ &= v.\tfrac{1}{\|x\|} + x.0 \\ \gamma'(0) &= v \end{aligned}$$

Ainsi, l'arc γ est dérivable en 0, $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$; d'où $v \in T_xS$.

⋆ Montrons $T_xS \subset \{x\}^\perp$.
Soit $v \in T_xS$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ et un arc $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to S$ tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$. Montrons que $(x|v) = 0$.
Comme $\mathrm{Im}(\gamma) \subset S$, la fonction $f : t \mapsto \|\gamma(t)\|^2$ est constante sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ et donc

dérivable, de dérivée nulle en 0. Ainsi, γ étant dérivable en 0 et $\|\cdot\|^2$ est différentiable sur E, on a, d'après la proposition 16 :

$$0 = f'(0) = \mathrm{d}\|\cdot\|^2(\gamma(0))(\gamma'(0)) = 2(\gamma(0)|\gamma'(0)) = 2(x|v).$$

Donc $v \in \{x\}^\perp$.

Ainsi, par double inclusion, on a $T_x S = \{x\}^\perp$.

7. Fonctions de classe C^k

a. Dérivées partielles successives

Définition 12.

Soit $f : U \to F$, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E, $a \in U$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $j_1, ..., j_k \in [\![1, p]\!]$.

Sous réserve d'existence, on appelle **dérivée partielle partielle de f d'ordre k selon les indices** $(j_1, ..., j_k)$ le vecteur $D_{j_1}(D_{j_2}(...(D_{j_k} f(a))...))$ et on note :

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} ... \partial x_{j_k}} = D_{j_1}(D_{j_2}(...(D_{j_k} f(a))...)).$$

Exercice 20.

Calculer les dérivées secondes dans la base canonique de $f : (x, y) \mapsto (x^2 y, e^{xy+1})$.

b. Fonction de classes C^k

Définition 13.

Soit $f : U \to F$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on dit que f est de **classe C^k sur U** si les dérivées partielles de f d'ordre k existent et sont continues sur U.

Si f est de classe C^k sur U pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, alors on dit que f est de **classe C^∞ sur U**.

Proposition 18. *Opérations sur les fonctions de classe C^k*

Soit $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Les sommes, composées, produits (avec $F = \mathbb{R}$ pour le produit) de fonctions de classe C^k sur U sont de classe C^k sur U.

Théorème 3. *Applications polynomiales*

Les applications polynomiales sur E sont de classe C^∞ sur E.

c. Théorème de Schwarz

Théorème 4. *Théorème de Schwarz*

Soit $f : U \to F$ de classe C^2 sur U et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E. Pour tout $i, j \in [\![1, p]\!]$, on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Exercice 21.

Déterminer s'il existe une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ telle que $V = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)$; et dans ce cas, déterminer f :

1. $V : (x, t) \mapsto (xt^2, -xt)$
2. $V : (x, t) \mapsto (2xt, x^2 + t)$.

Partie D

Fonctions numériques

Dans cette partie E désigne un espace euclidien et on note $(\cdot|\cdot)$ son produit scalaire.

1. Gradient

a. Définition et premières propriétés

Lemme 2.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $a \in U$. Si f est différentiable en a, il existe une unique vecteur $u \in E$ tel que, pour tout $h \in E$:

$$\mathrm{d}f(a)(h) = (u|h).$$

Définition 14. *Gradient d'une application numérique*

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $a \in U$. Si f est différentiable en a, on appelle **gradient de f en** a et on note $\nabla f(a)$ l'unique vecteur de E tel que, pour tout $h \in E$:

$$\mathrm{d}f(a)(h) = (\nabla f(a)|h).$$

Proposition 19.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$. Si f est de classe C^1 sur U, alors $\nabla f : x \mapsto \nabla f(x)$ est continue sur U.

Proposition 20.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E et $a \in U$. Si f est différentiable en a alors :

$$\nabla f(a) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) e_j$$

En particulier, si $E = \mathbb{R}^p$ muni de sa base canonique :

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \right).$$

Exercice 22.

Justifier que $f : (x, y) \to y^2(y^2 - x^4)$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer le gradient de f en tout point de $\mathbb{R}^2$.

b. Opérations et gradient

Proposition 21.

Soit $f, g : U \to \mathbb{R}$. Si f et g sont différentiable sur U alors on a :

- $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$;
- $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$;
- pour $\varphi : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I et telle que $f(U) \subset I$,
$$\nabla(\varphi \circ f) = (\varphi' \circ f)\nabla f;$$
- si f ne s'annule pas sur U,
$$\nabla\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{1}{f^2}\nabla f.$$

c. Interprétation géométrique

Proposition 22.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $a \in U$. On suppose que f est différentiable en a et que $\nabla f(a) \neq 0$. Alors la fonction $h \mapsto D_h f(a)$ restreinte à la sphère unité de E admet un unique maximum en $h_0 = \dfrac{1}{\|\nabla f(a)\|}\nabla f(a)$.

Démonstration.

On a, pour tout $h \in S_E = \{u \in E \mid \|u\| = 1\}$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$D_h f(a) = \mathrm{d}f(a)(h) = (\nabla f(a)|h) \leq \|\nabla f(a)\|.\|h\| = \|\nabla f(a)\|.$$

avec égalité, si, et seulement si, h est colinéaire et de même sens que $\nabla f(a)$

Par suite, $h \mapsto D_h f(a)$ admet un maximum en $h_0 = \dfrac{1}{\|\nabla f(a)\|}\nabla f(a)$. □

2. Vecteurs tangents d'une fonction numérique

Exemple 10.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur U.
Pour $X = \mathcal{G}_f \subset \mathbb{R}^3$ le graphe de f et $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in X$, on a, en considérant $\mathbb{R}^3$ muni de son

produit scalaire canonique :

$$T_{M_0}X = \{n\}^\perp \text{ où } n = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right).$$

De plus, pour $g : (x, y, z) \mapsto f(x, y) - z$, on a $X = \{(x, y, z) \in U \times \mathbb{R} \mid g(x, y, z) = 0\}$ et $\nabla g(M_0) = n$ d'où :

$$T_{M_0}X = \{\nabla g(M_0)\}^\perp = \text{Ker}(\,\mathrm{d}g(M_0)).$$

⋆ Montrons $\{n\}^\perp \subset T_{M_0}X$.
Soit $v = (v_x, v_y, v_z) \in \{n\}^\perp$. On considère $g : t \mapsto (x_0, y_0) + t(v_x, v_y)$. Alors $(x_0, y_0) \in U$ car $M_0 \in \mathcal{G}_f$ et comme U est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $g(t) \in U$. On pose, pour $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\gamma : t \mapsto (g(t), f(g(t))$. Comme $g_{|]-\varepsilon,\varepsilon[}$ est à valeurs dans U, γ est bien défini sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ et à valeurs dans $X = \mathcal{G}_f = \{(a, f(a)) \mid a = (x, y) \in U\}$.
De plus, γ est dérivable sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ car ses coordonnées le sont : g est dérivable sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ et f est différentiable sur U d'où g et $f \circ g$ sont dérivables sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$.
Dé plus, on a :
— $\gamma(0) = (g(0), f(g(0))) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) = M_0$ car, comme $M_0 \in \mathcal{G}_f$, $z_0 = f(x_0, y_0)$.
— $\gamma'(0) = (g'(0), (f \circ g)'(0)) = (v_x, v_y, (f \circ g)'(0))$. Or, on remarque que, comme $(n|v) = 0$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)v_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)v_y - v_z = 0$$

d'où :

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(0) &= \mathrm{d}f(g(0))(g'(0)) \\ &= \mathrm{d}f(x_0, y_0)(v_x, v_y) \\ &= (\nabla f(x_0, y_0)|(v_x, v_y)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)v_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)v_y \\ (f \circ g)'(0) &= v_z\end{aligned}$$

et ainsi, $\gamma'(0) = v$.
Par suite, $v \in T_{M_0}X$. D'où $\{n\}^\perp \subset T_{M_0}X$.

⋆ Montrons $T_{M_0}X \subset \{n\}^\perp$.
Soit $v = (v_x, v_y, v_z) \in T_{M_0}X$. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ et $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to X$ dérivable en 0 et tel que $\gamma(0) = M_0$ et $\gamma'(0) = v$.
Comme γ est à valeurs dans X, pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, il existe $g(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\gamma(t) = (g(t), f(g(t))$.
Comme γ définie sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ et dérivable en 0, ses applications coordonnées le sont et donc g et $f \circ g$ sont définies sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ et dérivable en 0. De plus, comme f est différentiable sur U, g est à valeurs dans U et dérivable en 0, on a :

$$M_0 = (x_0, y_0, z_0) = \gamma(0) = (g(0), f(g(0)),$$

puis, en utilisant le calcul de $(f \circ g)'(0)$ de l'inclusion précédente :

$$v = (v_x, v_y, v_z) = \gamma'(0) = (g'(0), (f \circ g)'(0)) = \left(v_x, v_y, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)v_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)v_y\right).$$

Ainsi,

$$(n|v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)v_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)v_y - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)v_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)v_y\right) = 0,$$

et donc, $v \in \{n\}^\perp$. Par suite, $T_{M_0}X \subset \{n\}^\perp$.
Ainsi, par double inclusion, on a $T_{M_0}X = \{n\}^\perp$.

Exercice 23.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble des vecteurs tangents à $\mathcal{G}_f$ en (x_0, y_0) est égal à la droite vectorielle qui dirige la tangente de f en x_0.

En fait, le résultat final de l'exemple précédent représente la "règle" comme on va le voir avec le théorème suivant. Sa démonstration, plus précisément, la démonstration de l'inclusion "noyau de la différentielle $\subset$ vecteurs tangents" repose sur le fait qu'on peut toujours mettre *localement* une équation $g(x_1, ..., x_n) = 0$ sous la forme $x_n = f(x_1, ..., x_{n-1})$ avec f est classe C^1 lorsque g est de classe C^1 et que sa différentielle en $(x_1, ..., x_n)$ ne s'annule pas. Il s'agit du **théorème des fonctions implicites** dont la démonstration est hors programme ; on admet donc ce théorème ici.

Théorème 5.

Soit $g : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur U, $X = \{y \in U \mid g(y) = 0\}$ l'ensemble des zéros de g et $x \in X$.
Si $\mathrm{d}g(x) \neq \mathbf{0}$, alors :

$$T_xX = \mathrm{Ker}(\,\mathrm{d}g(x)) = \{\nabla g(x)\}^\perp.$$

Corollaire 5.

Soit $\mathcal{S}$ une surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $\mathcal{S} :\ g(x, y, z) = 0$ où g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ et $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{S}$. Si $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$, alors $T_{(x_0,y_0,z_0)}\mathcal{S}$ est un plan vectoriel d'équation :

$$T_{(x_0,y_0,z_0)}\mathcal{S} :\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0).(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0).(y - y_0) + \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0).(z - z_0) = 0$$

Remarque 6.

Ce corollaire est se généralise directement en remplaçant $\mathbb{R}^3$ par $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 2$.

Exercice 24.

Déterminer une équation du plan tangent à $\mathcal{S}$ en un point $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{S}$ pour :

1. $\mathcal{S}$ le paraboloïde d'équation $\mathcal{S} :\ z = x^2 + y^2$.
2. $\mathcal{S}$ la sphére unité euclidienne ;

3. $\mathcal{S}$ le cône de droite génératrice $\mathrm{Vect}(1,0,1)$ en $(0,1,1)$.

Correction.

1. On a $\mathcal{S}: \ g(x,y,z)=0$ où $g:(x,y,z)\mapsto x^2+y^2-z$. Alors g est polynomiale et donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$. De plus, on a :
$$\nabla g(M_0)=(2x_0,2y_0,-1)\neq(0,0,0),$$
d'où :
$$T_{M_0}\mathcal{S}: \ z=z_0+2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0).$$
2. On a $\mathcal{S}: \ g(x,y,z)=0$ où $g:(x,y,z)\mapsto x^2+y^2+z^2-1$. Alors g est polynomiale et donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$. De plus, comme pour tout $M_0\in S$, $\|M_0\|_2=1$ et donc $M_0\neq(0,0,0)$, on a :
$$\nabla g(M_0)=(2x_0,2y_0,2z_0)\neq(0,0,0),$$
d'où :
$$T_{M_0}\mathcal{S}: \ x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)+z_0(z-z_0)=0.$$
3. On a $\mathcal{S}: \ g(x,y,z)=0$ où $g:(x,y,z)\mapsto x^2+y^2-z^2$. Alors g est polynomiale et donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$. De plus, comme pour tout $M_0\in S$ avec $M_0\neq(0,0,0)$:
$$\nabla g(M_0)=(2x_0,2y_0,-2z_0)\neq(0,0,0),$$
d'où :
$$T_{M_0}\mathcal{S}: \ z_0(z-z_0)=x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0).$$
Ainsi, en $M_0=(0,1,1)$, on a :
$$T_{(0,1,1)}\mathcal{S}: \ z=y.$$
Ainsi :
$$T_{(0,1,1)}\mathcal{S}=\mathrm{Vect}((0,1,1),(1,0,0)).$$

3. Approximation au second ordre et matrice hessienne

Dans ce paragraphe, on considère une base $\mathcal{B}=(e_1,...,e_n)$ de E.

a. Formule de Taylor-Young au second ordre

Théorème 6. *Formule de Taylor-Young au second ordre*

Soit $f:U\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur U. Pour tout $a\in U$, on a pour $h=\sum_{j=1}^n h_je_j\in E$:
$$f(a+h)=f(a)+\sum_{j=1}^n h_j\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)+\frac{1}{2}\sum_{i\leq i,j\leq n}h_ih_j\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)+\underset{h\to 0_E}{o}(\|h\|^2).$$

Exemple 11. *Cas $E = \mathbb{R}^2$*

Pour $E = \mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur U, on a, pour $(x_0, y_0) \in U$, en vertu du théorème de Schwarz :

$$\begin{aligned} f(x_0 + h_1, y_0, h_2) = f(x_0, y_0) &+ h_1.\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + h_2.\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ &+ \frac{1}{2}\left(h_1^2.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + h_1 h_2.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + h_2^2.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)\right) \\ &+ \underset{(h_1,h_2)\to(0,0)}{o}(h_1^2 + h_2^2) \end{aligned}$$

b. Matrice hessienne

Définition 15. *Matrice hessienne*

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur U et $a \in U$. On appelle **matrice hessienne** ou simplement **hessienne** de f en a et on note $H_f(a)$ la matrice carrée d'ordre n :

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{1\leq i,j\leq n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

Proposition 23.

Si $f : U \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2 sur U, alors, pour tout $a \in U$, $H_f(a) \in S_n(\mathbb{R})$ *i.e.* la hessienne de f en a est symétrique réelle.

Exemple 12. *Cas $E = \mathbb{R}^2$*

Pour $E = \mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur U, on a, pour $(x_0, y_0) \in U$:

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Dans la proposition suivante, on résume, grâce au gradient et la hessienne, la formule de Taylor-Young du second ordre en identifiant, à travers une base orthonormale $\mathcal{B}$, l'espace E et $M_{n,1}(\mathbb{R})$. On rappelle que dans ce cas, $(x|y) = {}^t x.y$.

Proposition 24.

Si $f : U \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2 sur U, pour tout $a \in U$:

$$f(a+h) = f(a) + (\nabla f(a)|h) + \frac{1}{2}(H_f(a)h|h) + \underset{h \to 0_E}{o}(\|h\|^2)$$

ou matriciellement :

$$f(a+h) = f(a) + {}^t\nabla f(a).h + \frac{1}{2}{}^t h.H_f(a).h + \underset{h \to 0_E}{o}(\|h\|^2)$$

Partie E

Optimisation

Dans cette partie E désigne un espace euclidien et on note $(\cdot|\cdot)$ son produit scalaire.

1. Extrema et points critiques

Définition 16. *Extremum local*

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $a \in U$.
On dit que f admet un **minimum local** (resp. un **maximum local** en a s'il existe un voisinage W de a tel que pour tout $x \in W \cap U$:

$$f(a) \leq f(x) \quad (\text{resp. } f(a) \geq f(x)).$$

Si f admet un minimum ou un maximum local en a, on dit que f admet un **extremum local en** a.

Définition 17. *Point critique*

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $a \in U$. On dit que a est un **point critique** de f si f est différentiable en a et $\mathrm{d}f(a) = \mathbf{0}$ ou de manière équivalente $\nabla f = 0_E$.

Exemple 13.

La fonction $f : (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - x^2 + y^2$ admet des points critiques en $(0, 0)$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ et $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$.

2. Extrema libres : étude au premier ordre

Théorème 7.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ un fonction de classe C^1 sur U et $a \in U$. Si f admet un extremum en a, alors a est un point critique de f.

Exemple 14.

La fonction $f : (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - x^2 + y^2$ admet des extrema locaux en $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ et en $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ mais pas en $(0, 0)$.

Remarque 7.

Comme le montre l'exemple précédent, la réciproque du Théorème 7 est fausse ! Une fonction qui admet un point critique n'admet pas forcément d'extremum en ce point.

3. Extrema libres : étude au second ordre

Théorème 8.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ un fonction de classe C^2 sur U et $a \in U$.

- Si f admet un minimum (resp. un maximum) local en a, alors $H_f(a) \in S_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $S_n^-(\mathbb{R})$.
- Si f admet un point critique en a et $H_f(a) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ (resp. $S_n^{--}(\mathbb{R})$), alors f admet un minimum (resp. un maximum) local en a.

Corollaire 6. *Cas particulier $E = \mathbb{R}^2$*

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un fonction de classe C^2 sur U et $(x_0, y_0) \in U$ un point critique de f. On note $H = H_f(x_0, y_0)$ la hessienne de f en (x_0, y_0).

- Si $\det(H) > 0$ alors f admet un extremum local en (x_0, y_0).
  De plus, si $\mathrm{Tr}(H) > 0$, il s'agit d'un minimum ; sinon, c'est un maximum.
- Si $\det(H) < 0$, f n'admet pas d'extremum en (x_0, y_0).
- Si $\det(H) = 0$, on ne pas conclure directement.

Remarque 8.

Le corollaire précédent est également connu sous le nom de théorème de Monge. Dans la littérature, la hessienne est alors écrite

$$H = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

et ainsi, on reformule les conditions du corollaire avec $rt - s^2 = \det(H)$. Dans le cas $rt - s^2 > 0$, on peut même être plus économe : on peut remarquer que sous cette condition, $\mathrm{Tr}(H) = r + t$ et r sont de même signe.
On peut donc reformuler le corollaire avec les notations de Monge :

- Si $rt - s^2 > 0$ alors f admet un extremum local en (x_0, y_0).
  De plus, si $r > 0$, il s'agit d'un minimum ; sinon, c'est un maximum.
- Si $rt - s^2 < 0$, f n'admet pas d'extremum en (x_0, y_0).
- Si $rt - s^2 = 0$, on ne pas conclure directement.

Exemple 15.

Soit $f : (x, y, z) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$ admet deux points critiques en $(0, 0)$ et $(1, 1)$: le premier n'est pas un extremum de f et le second est un minimum local de f.

Exercice 25.

Étudier les extrema de :

1. $f : (x, y) \mapsto y^2(y^2 - x^4)$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. $g : (x, y) \mapsto y^2 - x^2 + \dfrac{x^4}{2}$ sur $\mathbb{R}^2$.

4. Extrema liés : optimisation sous contraintes

Théorème 9. *Théorème d'optimisation sous contrainte*

Soit $f, g : U \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe C^1 sur U, $X = \{x \in U \mid g(x) = 0\}$ et $a \in X$.
Si la restriction $f_{|X}$ de f à X admet un extremum local en a et $\mathrm{d}g(a) \neq 0$, alors $\mathrm{d}f(a)$ est colinéaire à $\mathrm{d}g(a)$ *i.e.* $\nabla f(a)$ est colinéaire à $\nabla g(a)$.