**Chapitre VII**

# Séries numériques et vectorielles

## Table des matières

# Partie A

## Séries de vecteurs

Dans cette partie, $E$ désigne un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On notera $\|\cdot\|$ la norme dont est munie $E$.

### 1. Définitions

**Définition 1.** *Série*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $E$. On appelle **série de terme général** $u_n$ et on note $\sum u_n$ la **suite** $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où, pour $n \in \mathbb{N}$ :

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, le terme $S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$ est appelé **somme partielle** d'ordre $n$ de la série $\sum u_n$.

**Remarque 1.**

- Une série est la suite de ses sommes partielles.
- Une série est donc une **suite** particulière ! Toutes les méthodes connues pour les suites peuvent donc s'appliquer pour les séries ! De plus, leurs particularités parmi les suites nous permettent de développer des outils adaptés à leur étude. Il est donc a priori plus aisé d'étudier une série quelconque qu'une suite quelconque !
- Si le terme général $u_n$ d'une série n'est défini qu'à partir du rang $n_0 \in \mathbb{N}$, on notera $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} u_n$ la série de somme partielle d'ordre $n \geq n_0$ : $S_n = \displaystyle\sum_{i=n_0}^{n} u_i$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = S_n - S_{n-1} \quad \text{avec la convention } S_{-1} = 0.$$

**Définition 2.** *Somme d'une série*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $E$. On dit que la série $\sum u_n$ **converge** dans $(E, \|\cdot\|)$ si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles converge dans $(E, \|\cdot\|)$.

Dans ce cas, on appelle **somme de la série** $\sum u_n$ et on note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ la quantité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} S_N = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n.$$

Si la série $\sum u_n$ ne converge pas, on dit qu'elle **diverge**.

Dans la suite, $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désignent des suites à valeurs dans $E$.

**Proposition 1.**

Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $0_E$.

Démonstration.

On suppose que $\sum u_n$ converge. Alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $S \in E$ et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} S - S = 0_E.$$

□

**Remarque 2.**

La réciproque de cette proposition est fausse : la suite $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 et la série harmonique $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge !

Cette proposition motive donc la définition suivante :

**Définition 3.** *Divergence grossière*

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $0_E$, on dit que la série $\sum u_n$ **diverge grossièrement**.

**Définition-Proposition 4.** *Reste d'une série*

Si la série $\sum u_n$ converge, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{k\geq n+1} u_k$ converge.
Dans ce cas, on appelle **reste d'ordre** $n$ de la série $\sum u_n$ et on note $R_n$ la somme de la série $\sum_{k\geq n+1} u_k$ i.e.

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

**Remarque 3.**

On ne parle de reste d'une série que si elle converge. De plus, dans ce cas, on remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = R_{n-1} - R_n \quad \text{et} \quad R_n = S - S_n \text{ où } S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

**Exercice 1.**

Soit $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{1\}$ et $x \in E$. On considère la série $\sum u_n$ de terme général $u_n = \lambda^n x$. Discuter des cas évidents de convergence et de divergence grossière de $\sum u_n$.
En cas de convergence, déterminer la somme et les restes de la série.

Correction.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i x = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) x = \frac{1-\lambda^{n+1}}{1-\lambda} x.$$

Ainsi, si $|\lambda| < 1$, $\sum u_n$ converge et on a :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N \to +\infty} S_N = \frac{1}{1-\lambda} x,$$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$R_n = S - S_n = \frac{1}{1-\lambda} x - \frac{1-\lambda^{n+1}}{1-\lambda} x = \frac{\lambda^{n+1}}{1-\lambda} x.$$

**Exercice 2.**

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_p(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente d'indice $q \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la nature de la série $\sum A^n$ et en cas de convergence, déterminer sa somme.

Correction.

Pour tout $n \geq q$, $A^n = 0_n$, donc, pour $N \geq q$, on a :

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} A^n = \sum_{n=0}^{q-1} A^n + \sum_{n=q}^{N} \underbrace{A^n}_{=0_n} = \sum_{n=0}^{q-1} A^n.$$

Ainsi, la suite $(S_N)_{N \in \mathbb{N}} = \sum A^n$ est stationnaire en $\sum_{n=0}^{q-1} A^n$, d'où $\sum A^n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = \sum_{n=0}^{q-1} A^n = I_n + A + \ldots + A^{q-1}.$$

**Proposition 2.**

La suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des restes de la série $\sum u_n$ converge vers $0_E$.

Démonstration.

On a, avec $S$ la somme de la série et $S_n$ la somme partielle d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de la série :

$$\lim_{n\to+\infty} R_n = \lim_{n\to+\infty} (S - S_n) = S - S = 0_E.$$

□

**Définition 5.** *Série télescopique*

On dit que la série $\sum u_n$ est une **série télescopique** si le terme général $u_n$ de la série s'écrit, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = v_{n+1} - v_n.$$

**Proposition 3.**

On suppose que la série $\sum u_n$ est télescopique avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_{n+1} - v_n$. Alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la série $\sum u_n$ sont de même nature i.e. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, $\sum u_n$ converge. De plus, en cas de convergence, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n - v_0.$$

Démonstration.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{n} u_i = \sum_{i=0}^{n} (v_{i+1} - v_i) = \left(v_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} v_i\right) - \left(\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right) - v_0\right) = v_n - v_0.$$

d'où le résultat en passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans cette égalité. □

## 2. Espace vectoriel des séries convergentes

**Proposition 4.**

L'ensemble des séries convergentes de terme général dans $E$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites à valeurs dans $E$.

De plus, l'application qui à une série convergente associe sa somme est une application linéaire i.e. pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et toutes séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Démonstration.

On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des séries de terme général dans $E$ et $\mathcal{S}_c(E)$ l'ensemble des séries convergentes.

> *Exercice :* Montrer que $\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$ (ensemble des suites à valeurs dans $E$) - on démontrera (entre autres) que pour $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $\sum u_n, \sum v_n \in \mathcal{S}(E)$,
>
> $$\lambda \sum u_n + \mu \sum v_n = \sum(\lambda u_n + \mu v_n).$$

On rappelle (voire le chapitre Topologie des e.v.n.) que l'ensemble $c(E)$ des suites à valeurs dans $E$ convergentes est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$.
On remarque que $\mathcal{S}_c(E) = \mathcal{S}(E) \cap c(E)$ donc $\mathcal{S}_c(E)$ est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$ comme intersection de sous-espaces vectoriels de $E^{\mathbb{N}}$.

De plus, considérons l'application $f : \mathcal{S}_c(E) \to \mathbb{K}$ telle que :

$$f : \sum u_n \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $\sum u_n, \sum v_n \in \mathcal{S}_c(E)$. Alors,

$$\begin{aligned}
f(\lambda \sum u_n + \mu \sum v_n) &= f(\sum(\lambda u_n + \mu v_n)) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) \\
&= \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N}(\lambda u_n + \mu v_n) \\
&= \lim_{N \to +\infty} \left(\lambda \sum_{n=0}^{N} u_n + \mu \sum_{n=0}^{N} v_n\right) \\
&= \lambda \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n + \mu \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} v_n \\
&= \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \\
&= \lambda f(\sum u_n) + \mu f(\sum v_n)
\end{aligned}$$

Donc $f$ est une application linéaire.

□

**Exercice 3.**

Soit $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Discuter de la nature de la série $\sum A^n$.

Correction.

On a $A = \frac{1}{2}(I_2 + J_a)$ où $J_a = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente d'indice 2 et commute avec $I_2$. Ainsi en appliquant la formule du binôme, on obtient pour $n \geq 2$ :

$$A^n = \frac{1}{2^n}(I_2 + J_a)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} J_a^i I_2^{n-i} = I_2 + nJ_a;$$

par suite,

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} A^n = \left( \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} \right) I_2 + \left( \sum_{n=0}^{N} \frac{n}{2^n} \right) J_a$$

Donc $\sum A^n$ converge car les séries numériques $\sum \frac{1}{2^n}$ et $\sum \frac{n}{2^n}$ converge. En effet, $\frac{1}{2} < 1$ et $\frac{3}{4} < 1$ donc les séries géométriques $\sum \frac{1}{2^n}$ et $\sum (\frac{3}{4})^n$ convergent et on a $\frac{n}{2^n} = o((\frac{3}{4})^n)$ donc, par comparaison avec le terme général d'une série convergente, on en déduit que $\sum \frac{n}{2^n}$ converge (on aurait pu utiliser la règle de D'Alembert, que l'on verra dans la prochaine partie, pour conclure la convergence de $\sum \frac{n}{2^n}$).

**Proposition 5.** *Utilisation d'une base*

On suppose que $E$ est de dimension finie $p$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de $E$ et $\sum u_n$ la série de terme général $u_n = \sum_{i=1}^{p} u_n^{(i)} e_i \in E$. Alors la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, la série numérique $\sum u_n^{(i)}$ converge. Dans ce cas, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{i=1}^{p} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(i)} \right) e_i.$$

**Exercice 4.**

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_p(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable dans $M_p(\mathbb{K})$ telle que, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $|\lambda| < 1$. Démontrer que $\sum A^n$ est convergente et déterminer sa somme.
2. Application : déterminer la somme de la série $\sum \left( \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^n$.

Correction.

1. Comme $A$ est diagonalisable, il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $D = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ avec $\alpha_1, ..., \alpha_p \in \mathrm{Sp}(A)$ tels que $A = PDP^{-1}$. On a $|\alpha_i| < 1$, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ et donc, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=0}^{N} A^n = P\left(\sum_{n=0}^{N} D^n\right) P^{-1} \\ &= P \operatorname{diag}\left(\frac{1-\alpha_1^{N+1}}{1-\alpha_1}, \dots, \frac{1-\alpha_p^{N+1}}{1-\alpha_p}\right) P^{-1} \\ &\xrightarrow[N\to+\infty]{} P \operatorname{diag}\left(\frac{1}{1-\alpha_1}, \dots, \frac{1}{1-\alpha_p}\right) P^{-1}. \end{aligned}$$

Il en résulte que $\sum A^n$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = P \operatorname{diag}\left(\frac{1}{1-\alpha_1}, \dots, \frac{1}{1-\alpha_p}\right) P^{-1}$.

2. On a, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$A = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = P\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} {}^tP = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 2 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{7}{5} \end{pmatrix}$$

## 3. Série absolument convergente

Dans ce paragraphe, on suppose que $E$ est de **dimension finie** $p$.

**Définition 6.** *Série absolument convergente*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$. On dit que la série $\sum u_n$ **converge absolument** ou encore, est **absolument convergente**, si la série à termes positifs $\sum \|u_n\|$ est convergente.

**Théorème 1.**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $E$ de **dimension finie**.
Si la série $\sum u_n$ converge absolument, alors $\sum u_n$ converge. De plus, on a :

$$\left\|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|.$$

Démonstration.

On suppose que $\sum u_n$ converge absolument. Alors $\sum \|u_n\|$ converge. Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ un base de $E$. Comme $E$ est de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes sur $E$ ; ainsi, il existe

$c \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \in E$, $\|x\|_\infty \leq c\|x\|$. Par suite, on a, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ :

$$|u_n^{(i)}| \leq \|u_n\|_\infty \leq c\|u_n\|,$$

donc $\sum u_n^{(i)}$ est une suite numérique absolument convergente, donc convergente. Ainsi, les séries des composantes de $\sum u_n$ convergent, donc $\sum u_n$ converge. $\square$

**Exercice 5.**

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On munit l'espace vectoriel $M_p(\mathbb{K})$ d'une norme $\|\cdot\|$ sous-multiplicative i.e. $\forall\ A, B \in M_p(\mathbb{K})$, $\|AB\| \leq \|A\|.\|B\|$.
Soit $A \in M_p(\mathbb{K})$ telle que $\|A\| < 1$.

1. Montrer que $\sum A^n$ est absolument convergente. Vers quelle limite converge la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ?
2. En déduire que $I_p - A$ est inversible et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = (I_p - A)^{-1}$.

Correction.

1. On a, par sous-multiplicativité de la norme $\|\cdot\|$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|A^n\| \leq \|A\|^n$. Or $\sum \|A\|^n$ est une série géométrique de raison $\|A\| < 1$, donc le terme général $\|A^n\|$ de la série à termes positifs est majoré par le terme général d'une série convergente. Par suite, $\sum \|A^n\|$ converge ; d'où la série $\sum A^n$ est absolument convergente.
   Comme $\sum A^n$ est absolument convergente, $\sum A^n$ converge. Par suite, $\lim_{n\to+\infty} A^n = 0_n$.
2. On a, pour $N \in \mathbb{N}$,
   $$(I_p - A)S_N = (I_p - A)\left(I_p + A + A^2 + \ldots + A^N\right) = I_p - A^{N+1},$$
   Par suite,
   $$(I_p - A)\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = \lim_{n\to+\infty} (I_p - A)S_N = I_p - \lim_{n\to+\infty} A^{N+1} = I_p.$$
   Ainsi, $I_p - A$ est inversible et $(I_p - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n$.

# Partie B

## Compléments sur les séries numériques

Dans cette partie, on considérera seulement des séries numériques i.e. des séries à valeurs réelles ou complexes.

### 1. Règle de D'Alembert

#### a. Comparaison logarithmique

**Proposition 6.** *Comparaison logarithmique*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites à valeurs réelles strictement positives à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$ telles que, pour tout entier $n \geq n_0$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Alors,

— si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ converge ;

— si $\sum u_n$ diverge, $\sum v_n$ diverge.

Démonstration.

On remarque que, pour tout entier $n \geq n_0$, on a :

$$\frac{u_n}{u_{n_0}} = \prod_{i=n_0}^{n-1} \frac{u_{i+1}}{u_i} \leq \prod_{i=n_0}^{n-1} \frac{v_{i+1}}{v_i} = \frac{v_n}{v_{n_0}}$$

d'où :

$$u_n \leq \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} v_n.$$

Par suite, par comparaison de séries à termes positifs, on obtient que si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge (et donc également la contraposée).

$\square$

**Corollaire 1.**

Soit $\sum u_n$ une série à valeurs réelles strictement positives. Si, à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$ :

— il existe $M \in ]0,1[$ tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq M$, alors $\sum u_n$ converge.

— pour tout entier $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors $\sum u_n$ diverge.

Démonstration.

— On considère la suite géométrique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $0 < M < 1$. Alors $\sum v_n$ converge, et, à partir du certain rang $n_0$, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq M = \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Par suite, d'après la proposition précédente, $\sum u_n$ converge.

— La suite $(u_n)$ à termes strictement positifs est croissante à partir du rang $n_0$, donc $(u_n)$ ne converge pas vers 0. Ainsi $\sum u_n$ diverge grossièrement. (on aurait pu, comme dans le cas précédent, comparer $\sum u_n$ avec la série géométrique de raison 1).

□

### b. Règle de D'Alembert

**Théorème 2.** *Règle de D'Alembert*

Soit $\sum u_n$ une série à valeurs réelles **strictement positives**. Si la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Alors, en convenant que $+\infty > 1$ :

— si $\ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge ;

— si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge.

Démonstration.

- 1er cas : $\ell \in \mathbb{R}_+$ :

  Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un certain rang $n_0$, tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \in [\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$.

  — On suppose $\ell < 1$. Alors pour $\varepsilon < 1-\ell$, on a, pour tout $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \ell+\varepsilon$ et on applique le corollaire précédent en posant $M = \ell+\varepsilon < 1$. Par suite, $\sum u_n$ converge.

  — On suppose $\ell > 1$. Alors pour $\varepsilon = \ell - 1$, on a, pour tout $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \ell-\varepsilon = 1$ et on applique le corollaire précédent. Par suite, $\sum u_n$ diverge.

- 2nd cas : $\ell = +\infty$ :

  Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors, pour tout $A \geq 0$, il existe un certain rang $n_0$, tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq A$.

  Ainsi, pour $A = 1$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.

  D'après le corollaire précédent, $\sum u_n$ diverge.

□

**Remarque 4.**

- On peut remarquer que dans la démonstration de la règle de D'Alembert, on compare la série $\sum u_n$ à une série géométrique. Ainsi, cette règle n'a le plus souvent d'intérêt que pour l'étude des séries dont le terme général a un comportement qui "ressemble" à celui d'une série géométrique.
- Dans le cas $\ell = 1$, on ne peut pas conclure comme en témoigne par exemple les séries $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.

**Exemple 1.**

- La série $\displaystyle\sum \sin\left(\frac{n}{3^n}\right)$ converge.
- Soit $z \in \mathbb{C}$. La série $\displaystyle\sum \binom{n}{2} z^n$ converge absolument si, et seulement si $|z| < 1$.

- On a $\sin\left(\frac{n}{3^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{3^n}$.
  Or, en posant $u_n = \frac{n}{3^n} > 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{3}.\frac{n+1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{3} < 1.$$
  D'où, d'après la règle de D'Alembert, $\sum u_n$ converge et donc, par comparaison, $\sum \sin\left(\frac{n}{3^n}\right)$ converge.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = |\binom{n}{2} z^n| = \binom{n}{2}|z|^n$. Si $z = 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constante en 0 donc $\sum u_n$ converge.
  On suppose $z \neq 0$. Alors, pour tout $n \geq 2$, $u_n > 0$ et on a :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+2}{n}|z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |z|.$$
  Par suite, d'après la règle de D'Alembert, si $|z| < 1$, $\sum u_n$ converge et si $|z| > 1$, $\sum u_n$ diverge.
  Il reste à traiter le cas $|z| = 1$. Dans ce cas $u_n = \binom{n}{2} \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$, donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.
  Il en résulte que $\displaystyle\sum \binom{n}{2} z^n$ converge absolument i.e. $\sum u_n$ converge si, et seulement si $|z| < 1$.

**Exercice 6.** *Applications de la règle de D'Alembert*

1. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{n!}{n^n}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Discuter de la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$ en fonction de $x$.

Correction.

1. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e} < 1.$$
Ainsi, d'après la règle de D'Alembert, $\sum \frac{n!}{n^n}$ converge.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$. Alors on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{4}x \begin{cases} < 1 & \text{si } x < 4 \\ = 1 & \text{si } x = 4 \\ > 1 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$
D'après la règle de D'Alembert, $\sum u_n$ converge si $x < 4$ et diverge si $x > 4$. Si $x = 4$, on a
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4n+4}{4n+2} \geq 1.$$
Par suite, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (et à valeurs positives) donc elle ne converge pas vers 0. Ainsi, $\frac{4^n}{\binom{2n}{n}}$ diverge grossièrement.

**Exercice 7.**

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On munit l'espace vectoriel $M_p(\mathbb{K})$ d'une norme $\|\cdot\|$ sous-multiplicative. Soit $A \in M_p(\mathbb{K})$ telle que $\|A\| < 1$.

Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} nA^{n-1}$ converge puis calculer sa somme.

Correction.

— Convergence. Si $A = 0_n$, alors la série converge car son terme général est constant en $0_n$. On suppose $A \neq 0_n$. Alors, par séparation, $\|A\| \neq 0$ et on a, en notant, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n\|A\|^{n-1} > 0$ :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n}\|A\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|A\| < 1.$$
Par suite, d'après la règle de D'Alembert, $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a, par sous-multiplicativité de la norme :
$$\|nA^{n-1}\| \leq n\|A\|^{n-1} = u_n$$
D'où, par comparaison, $\sum_{n\geq 1} nA^{n-1}$ est absolument convergente et donc convergente.
Dans tous les cas, $\sum_{n\geq 1} nA^{n-1}$ converge.

— Somme. On note $S = \sum_{n=1}^{+\infty} nA^{n-1}$.
On remarque, de manière analogue à la série précédente, que la série $\sum_{n\geq 0} nA^n$ converge

et par continuité de l'application linéaire $M \mapsto AM$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nA^n = A \sum_{n=1}^{+\infty} nA^{n-1} = AS.$$

D'après l'exercice 5, la série $\sum A^n$ converge et sa somme vaut $(I_p - A)^{-1}$, d'où :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{+\infty} nA^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)A^n \quad \text{- changement d'indice } n' = n-1 \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} nA^n + \sum_{n=0}^{+\infty} A^n \quad \text{- linéarité de la somme de séries convergentes} \\ S &= AS + (I_p - A)^{-1} \end{aligned}$$

d'où $(I_p - A)S = (I_p - A)^{-1}$ et donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nA^{n-1} = (I_p - A)^{-2}.$$

### c. Exponentielle numérique

**Proposition 7.** *Convergence de la série exponentielle*

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ converge absolument.

Démonstration.

Soit $z \in \mathbb{C}$.

- Si $z = 0$, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{z^n}{n!} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$ ; donc $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge car son terme général est stationnaire en 0.
- On suppose $z \neq 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \left|\frac{z^n}{n!}\right| = \frac{|z|^n}{n!} > 0$. Alors on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|z|^{n+1}}{|z|^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{|z|}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 < 1.$$

  Ainsi, d'après la règle de D'Alembert, $\sum \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente et donc convergente.

□

La proposition précédente justifie la bonne définition de l'exponentielle d'un nombre complexe car une série numérique absolument convergente est convergente :

**Définition 7.** *Série exponentielle*

Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle **série exponentielle** de $z$ la série $\sum \frac{z^n}{n!}$.
De plus, on appelle **exponentielle** de $z$ la somme de la série exponentielle de $z$ et on note :

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

**Remarque 5.**

A priori, on vient de donner le nom d'exponentielle de $z \in \mathbb{C}$ à nouvel objet alors que le "$e^z$" défini en Sup' portait déjà ce nom ! Aïe !
Bien-sûr, nous allons unifier tout cela et voir que ces deux définitions de l'exponentielle qui semblent bien différentes sont en fait équivalentes.

Dans la suite du cours, nous utiliserons l'égalité $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ pour $z \in \mathbb{C}$ ainsi que les propriétés de $z \mapsto e^z$ demontrées en Sup' "même si c'est un peu tôt" !

Dans les faits, dans un premier temps, nous montrerons que la fonction $x \mapsto \exp(x)$ de la variable réelle est bien la fonction exponentielle définie comme étant l'unique solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ (nous le ferons dans le chapitre "Suites et séries de fonctions") puis dans un second temps, nous verrons les propriétés de cette fonction avec la variable complexe (dans le chapitre "Séries entières").
Pour le moment, dans ce chapitre, nous nous contenterons de vérifier qu'il s'agit bien d'une fonction "mise en exposant" i.e. une fonction qui transforme une addition en produit.

## 2. Comparaison avec une intégrale

**Théorème 3.**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction **continue par morceaux et décroissante**. Alors la série :

$$\sum_{n\geq 1} \left( \int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n) \right)$$

converge.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors on a :

$$0 = f(n) - f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n) \leq f(n-1) - f(n)$$

Donc la série est à termes positifs et on a, pour tout $N \geq 1$ :

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \left( \int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n) \right) \leq \sum_{n=1}^{N} (f(n-1) - f(n)) = f(0) - f(N).$$

Or comme $f$ est décroissante et minorée (par 0), $f$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}_+$ en $+\infty$ ; ainsi, pour tout $N \geq 1$, $S_N \leq f(0) - \ell$. Par suite, par majoration uniforme des sommes partielles d'une série à termes positifs, la série converge. □

**Corollaire 2.** *Comparaison série/intégrale*

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction **continue par morceaux et décroissante**. Alors $\sum f(n)$ converge si, et seulement si, $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.

Démonstration.

On sait que $\sum_{n\geq 1} \left( \int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n) \right)$ converge, donc $\sum f(n)$ converge si, et seulement si, $\sum_{n\geq 1} \int_{n-1}^{n} f(t)dt$ converge. Or on a $\sum_{n\geq 1} \int_{n-1}^{n} f(t)dt$ converge si, et seulement si

$$\int_0^{\infty} f(t)dt = \lim_{N\to+\infty} \int_0^N f(t)dt = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_{n-1}^{n} f(t)dt$$

existe dans $\mathbb{R}_+$. D'où le résultat. □

**Proposition 8.** *Estimation des sommes partielles et des restes*

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction **continue par morceaux et décroissante** et $n \in \mathbb{N}$. Alors les sommes partielles de la série $\sum f(n)$ vérifient pour tout $m \in \mathbb{N}$ :

$$\int_{n+1}^{n+m+1} f(t)dt \leq S_{n+m} - S_n = f(n+1) + \ldots + f(n+m) \leq \int_n^{n+m} f(t)dt.$$

Et en cas de convergence de la série $\sum f(n)$, les restes de la série vérifient :

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t)dt.$$

Démonstration.

On a, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_i^{i+1} f(t)dt \leq f(i) \leq \int_{i-1}^{i} f(t)dt.$$

Donc, pour $m \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{i=n+1}^{n+m} \int_i^{i+1} f(t)dt \leq \sum_{i=n+1}^{n+m} f(i) \leq \sum_{i=n+1}^{n+m} \int_{i-1}^{i} f(t)dt,$$

et ainsi, on obtient le résultat concernant les sommes partielles. Si $\sum f(n)$ converge, alors $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge et donc, les mêmes intégrales mais à partir de $n$ et de $n+1$ convergent. De plus, d'après les inégalités précédentes, on a :

$$\underbrace{\lim_{m\to+\infty} \int_{n+1}^{n+m+1} f(t)dt}_{=\int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt} \leq \underbrace{\lim_{m\to+\infty} S_{n+m} - S_n}_{=R_n} \leq \underbrace{\lim_{m\to+\infty} \int_{n}^{n+m} f(t)dt}_{=\int_{n}^{+\infty} f(t)dt}.$$

□

**Remarque 6.**

— En particulier, on a l'inégalité :

$$\int_1^{N+1} f(t)dt \leq \sum_{n=1}^{N} f(n) \leq \int_0^N f(t)dt.$$

— Si la fonction $f$ n'est pas définie en 0, on réalise l'inégalité de droite en sommant à partir $n = 2$ et puis en ajoutant $f(1)$ ensuite :

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) \leq f(1) + \int_1^N f(t)dt$$

— On peut adapter les inégalités sur les sommes partielles de la proposition précédente et de cette remarque au cas où $f$ est **croissante** à la place de décroissante (bien-sûr, dans ce cas, les inégalités sont renversées).

**Exercice 8.**

Donner, selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, la nature des séries suivantes. En cas de divergence, donner un équivalent simple des sommes partielles et en cas de convergence, donner un équivalent simple des restes.

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$.
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^\alpha}$.

Correction.

1. Pour $\alpha > 0$, la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue et décroissante sur de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même. Ainsi, d'après le théorème de comparaison série-intégrale (voire Corollaire 2), $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge. Or on a :

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}\left(x^{1-\alpha} - 1\right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln(x) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}.$$

d'où les trois cas suivants :

*1er cas* : $0 < \alpha < 1$. Dans ce cas, $1 - \alpha > 0$, donc

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{1-\alpha}\left(x^{1-\alpha} - 1\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty.$$

Par suite, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

*2eme cas* : $\alpha = 1$. On a

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty,$$

Par suite, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

*3eme cas* : $\alpha > 1$. Dans ce cas, $\alpha - 1 > 0$, donc

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha - 1}\left(1 - \frac{1}{x^{\alpha-1}}\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{1}{\alpha - 1}.$$

Par suite, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge et ainsi $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

On a donc bien le critère de Riemann : $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$. (Pour $\alpha \leq 0$, on remarque que la série diverge grossièrement).

Intéressons nous désormais aux équivalents des restes et des sommes partielles :
On a, pour tout $i \geq 2$,

$$\int_{i-1}^i \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{i^\alpha} \leq \int_i^{i+1} \frac{1}{t^\alpha} dt,$$

*1er cas :* $0 < \alpha < 1$. La série diverge, donc on s'intéresse à un équivalent des sommes partielles. On a

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq 1 + \int_2^{n+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq S_n(\alpha) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^\alpha} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt \qquad (*)$$

Ainsi, on obtient :

$$\frac{1}{1-\alpha}\left((n+1)^{1-\alpha} - 1\right) \leq S_n(\alpha) \leq 1 + \frac{1}{1-\alpha}\left(n^{1-\alpha} - 1\right).$$

On remarque alors que :

$$\frac{1}{1-\alpha}\left((n+1)^{1-\alpha}-1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1+\frac{1}{1-\alpha}\left(n^{1-\alpha}-1\right);$$

par suite, d'après le théorème des gendarmes, $S_n(\alpha)\dfrac{1-\alpha}{n^{1-\alpha}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Il en résulte que :

$$S_n(\alpha) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

*2eme cas :* $\alpha = 1$. La série diverge, donc on s'intéresse de nouveau à un équivalent des sommes partielles. D'après $(*)$, on obtient :

$$\ln(n+1) \leq S_n(1) \leq 1+\ln(n).$$

Par suite,

$$S_n(1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).$$

*3eme cas :* $\alpha > 1$. La série converge, donc on s'intéresse à un équivalent des restes. On a, pour $n \geq 1$ :

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt \leq R_n(\alpha) \leq \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_n(\alpha) \leq \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

D'où, finalement,

$$R_n(\alpha) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

2. On réitère les mêmes techniques avec la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x(\ln(x))^\alpha}$.

## 3. Rappels : Critère des séries alternées

**Définition 8.** *Série alternée*

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On dit que la série $\sum v_n$ est **alternée** s'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels tous de même signe telle que

$$\sum v_n = \sum (-1)^n u_n.$$

**Exemple 2.**

$\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ et $\sum \sin\left(\pi(\sqrt{n^2+1})\right)$ sont des séries alternées.

— On a, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{(-1)^n}{n} = (-1)^n u_n$ avec $u_n = \frac{1}{n} > 0$. Par suite, $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est une série alternée.

— Posons, pour $n \in \mathbb{N}$ $v_n = \sin\left(\pi(\sqrt{n^2+1})\right)$ et $u_n = (-1)^n v_n$ (et donc $v_n = (-1)^n u_n$).
On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 \leq n^2+1 \leq n^2+2n+1 = (n+1)^2$ d'où $n \leq \sqrt{n^2+1} \leq n+1$ et donc $\pi\sqrt{n^2+1} \in [n\pi, (n+1)\pi]$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
  - ⋆ Si $n$ est pair, alors la fonction sin est positive sur $[n\pi, (n+1)\pi]$ et donc $v_n = \sin\left(\pi(\sqrt{n^2+1})\right) \geq 0$. Ainsi, $u_n = (-1)^n v_n = v_n \geq 0$.
  - ⋆ Si $n$ est impair, alors la fonction sin est négative sur $[n\pi, (n+1)\pi]$ et donc $v_n = \sin\left(\pi(\sqrt{n^2+1})\right) \leq 0$. Ainsi, $u_n = (-1)^n v_n = -v_n \geq 0$.

Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ et $\sin\left(\pi(\sqrt{n^2+1})\right) = (-1)^n u_n$ donc la série $\sum \sin\left(\pi(\sqrt{n^2+1})\right)$ est une série alternée.

**Théorème 4.** *Critère des séries alternées*

Soit $\sum v_n$ une série alternée. Si :

i) la suite $(|v_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et

ii) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0,

alors $\sum v_n$ converge et on a les propriétés suivantes :

— si $v_0 \geq 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$S_{2k+1} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \leq S_{2k}.$$

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n$ est du signe de $v_{n+1}$ et
$$|R_n| \leq |v_{n+1}|.$$

Démonstration.

Quitte à échanger la suite $(v_n)$ par la suite $(-v_n)$, on suppose $v_0 \geq 0$. Cela implique que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v_{2k} \geq 0$ et $v_{2k+1} \leq 0$ car la série est alternée.
On considère les suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} = (S_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}} = (S_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$. Montrons qu'elles sont adjacentes i.e. $(a_k)$ est décroissante, $(b_k)$ est croissante et $(a_k - b_k)$ converge vers 0.

— Soit $k \in \mathbb{N}$. On a
$$a_{k+1} - a_k = S_{2k+2} - S_{2k} = v_{2k+2} + v_{2k+1} = |v_{2k+2}| - |v_{2k+1}| \leq 0$$
car $(|v_n|)$ est décroissante d'après ii) ; et, grâce à un argument similaire, on a :
$$b_{k+1} - b_k = S_{2k+3} - S_{2k+1} = v_{2k+3} + v_{2k+2} = |v_{2k+2}| - |v_{2k+3}| \geq 0.$$
Par suite, $(a_k)$ est décroissante et $(b_k)$ est croissante.

— Soit $k \in \mathbb{N}$. On a
$$a_k - b_k = S_{2k} - S_{2k+1} = -v_{2k+1} = |v_{2k+1}| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

Il en résulte que $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et converge ainsi vers une même limite notée $S$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a, pour $k = E(\frac{n}{2})$ :

$$b_k = S_{2k+1} \leq S_n \leq S_{2_k} = a_k,$$

avec égalité à gauche lorsque $n$ est impair, et égalité à droite lorsque $n$ est pair. Ainsi, en passant à la limite quand $n$ tend vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, et en remarquant que $k = E(\frac{n}{2}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, on obtient que $(S_n)$ converge vers $S$, d'où l'existence de la somme de la série $\sum v_n$ et on a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$ :

$$S_{2k+1} \leq S = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \leq S_{2_k}.$$

$\square$

**Remarque 7.**

Sous les hypothèses du critère des séries alternées, en particulier, $S = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ est du même signe que $v_0$ et lorsque $v_0 \geq 0$, $S \leq v_0$.

**Exercice 9.**

1. Étudier la nature $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ selon les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que le reste $R_n$ de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ est le terme général d'une série convergente.
3. On considère la suite $\sum u_n$ de terme général :

$$u_n = \begin{cases} \frac{-1}{k^2} \text{ si } n = 2k \text{ est pair} \\ \frac{1}{k} \text{ si } n = 2k+1 \text{ est impair} \end{cases}$$

   Quelle est la nature de cette série ? Qu'en conclure sur les hypothèses du critère des séries alternées ?

Correction.

1. *1er cas* $\alpha \leq 0$ : on a $\frac{(-1)^n}{n^\alpha} = (-1)^n n^{-\alpha} \nrightarrow 0$ car $-\alpha \geq 0$ donc $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.

   *2eme cas* $\alpha > 0$. Alors $(\frac{1}{n^\alpha})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et tend vers 0, donc d'après le critère des séries alternées, $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.

2. D'après la question précédente, $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ converge ; on peut donc s'intéresser aux restes de cette série.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

Toujours d'après le critère des séries alternées, on a :

$$|R_n| \leq \left| \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2} \right| = \frac{1}{(n+1)^2}$$

Ainsi, $|R_n|$ est bien le terme général d'une série convergente d'après le critère de Riemann $(2 > 1)$ car $\frac{1}{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.
Par suite, $\sum R_n$ est absolument convergente, et donc convergente.

3. Tout d'abord, on remarque que $(u_n)$ est bien le terme général d'une série alternée qui vérifie $u_n \to 0$. Par contre, $(|u_n|)$ n'est pas décroissante...
On a, pour $2 \leq n = 2k$ un entier pair :

$$u_n + u_{n+1} = u_{2k} + u_{2k+1} = \frac{-1}{k^2} + \frac{1}{k} = \frac{k-1}{k^2}.$$

Ainsi, pour $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$S_{2N+1} = \sum_{n=1}^{2N+1} u_n = 1 + \sum_{k=1}^{N} (u_{2k} + u_{2k+1}) = 1 + \sum_{k=1}^{N} \frac{k-1}{k^2}$$

Or, on a $\frac{k-1}{k^2} = o(\frac{1}{k})$ donc d'après le critère de Riemann, la série $\sum \frac{k-1}{k^2}$ diverge. Par suite, la suite $(S_{2N+1})_{N\in\mathbb{N}}$ diverge également !
Il en résulte que $\sum u_n$ diverge.
On en conclut que l'hypothèse de décroissance de la suite $(|u_n|)$ est nécessaire ! Si on l'omet, le théorème devient faux comme en atteste cet exemple.

## 4. Rappels : Produit de Cauchy

**Définition 9.** *Produit de Cauchy de deux séries*

Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries numériques. On appelle **produit de Cauchy** des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$, la série $\sum c_n$ de terme général défini, pour $n \in \mathbb{N}$, par :

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

**Remarque 8.**

Si les termes généraux $a_n, b_n$ sont définis à partir de respectivement $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$, on convient alors que $a_0, ..., a_{n_0-1}$ et $b_0, ..., b_{n_1-1}$ sont nuls pour définir le produit de Cauchy, ce qui donne alors :

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=n_0}^{n-n_1} a_k b_{n-k}.$$

**Théorème 5.**

Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries numériques. Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument, alors leur produit de Cauchy $\sum c_n$ converge absolument et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right).$$

Démonstration.

*On retrouvera une démonstration vue en Sup' reposant sur les familles sommables dans un chapitre ultérieur. On propose tout de même une démonstration en supposant seulement que l'une des deux séries converge absolument et l'autre converge (tout court) - il s'agit du théorème de Mertens.*

On suppose $\sum a_n$ converge absolument et $\sum b_n$ converge. On note $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites des sommes partielles des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ et $A$, $B$ leurs sommes respectives (comme $\sum a_n$ converge absolument, elle converge).

On note $\sum c_n = (C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le produit de Cauchy de $\sum a_n$ et $\sum b_n$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. On remarque que, pour tout $q \in \mathbb{N}$, $b_q = B_q - B_{q-1}$ (en convenant $B_{-1} = 0$) ; alors on a, pour $N \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned}
C_N &= \sum_{n=0}^{N} c_n \\
&= \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{N} \sum_{\substack{p+q=n \\ p,q\in\mathbb{N}}} a_p b_q \\
&= \sum_{\substack{p+q\leq N \\ p,q\in\mathbb{N}}} a_p \underbrace{b_q}_{B_q - B_{q-1}} \\
&= \sum_{\substack{p+q\leq N \\ p,q\in\mathbb{N}}} a_p B_q - \sum_{\substack{p+q\leq N \\ p,q\in\mathbb{N}}} a_p B_{q-1} \\
&= \sum_{\substack{p+q\leq n \\ p,q\in\mathbb{N}}} a_p B_q - \sum_{\substack{p+q'\leq N-1 \\ p,q'\in\mathbb{N}}} a_p B_{q'} \\
&= \sum_{\substack{p+q=N \\ p,q\in\mathbb{N}}} a_p B_q \\
C_N &= \sum_{n=0}^{N} a_n B_{N-n}
\end{aligned}$$

et donc, on a :

$$|C_N - A_N B| = \left| \sum_{n=0}^{N} a_n (B_{N-n} - B) \right| \leq \sum_{n=0}^{N} |a_n|.|B_{N-n} - B|.$$

- ⋆ Comme $\sum |a_n|$ et $(B_n - B)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, elles sont bornées et donc il existe un réel $M > 0$ (on prend ici le maximum des bornes respectives de chacune des deux suites) tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{N} |a_n| \leq M$ et $|B_N - B| \leq M$.

Soit $\varepsilon$ un réel strictement positif. On pose $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2M} > 0$.

- ⋆ Comme $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $B$, il existe un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $N \geq N_1$, $|B_N - B| \leq \varepsilon'$ ;
- ⋆ Comme $\sum |a_n|$ converge, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et donc, il existe un rang $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geq N_2$, $|a_n| \leq \frac{\varepsilon'}{N_1}$ ;

On pose alors $N_3 = N_1 + N_2 \in \mathbb{N}$. Pour tout entier $N \geq N_3$, on a, comme $N - N_1 \geq N_3 - N_1 = N_2$ :

$$\begin{array}{rcl}
|C_N - A_N B| & \leq & \displaystyle\sum_{n=0}^{N-N_1} \left( |a_n| . \underbrace{|B_{N-n} - B|}_{\leq \varepsilon'} \right) + \sum_{n=N-N_1+1}^{N} \left( |a_n| . \underbrace{|B_{N-n} - B|}_{\leq M} \right) \\
& \leq & \varepsilon' \underbrace{\displaystyle\sum_{n=0}^{N-N_1} |a_i|}_{\leq M} + M \displaystyle\sum_{n=N-N_1+1}^{N} \underbrace{|a_n|}_{\leq \frac{\varepsilon'}{N_1}} \\
|C_N - A_N B| & \leq & 2M\varepsilon' = \varepsilon.
\end{array}$$

Ainsi, la suite $(C_n - A_n B)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. De plus, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $A$ donc $(A_n B)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $AB$ ; ainsi, comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n = (C_n - A_n B) + A_n B$, par combinaison linéaire de suites convergentes, la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $0 + AB = AB$.

Il en resulte que la série $\sum c_n$ converge et sa somme vaut $AB$.

Et pour terminer, supposons que $\sum a_n, \sum b_n$ convergent absolument toutes les deux. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a, par inégalité triangulaire, $|c_n| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k||b_{n-k}| = c'_n$ et $\sum c'_n$ est le terme général du produit de Cauchy des deux séries absolument convergentes $\sum |a_n|$, $\sum |b_n|$. Par suite, d'après ce qui précède, $\sum c'_n$ converge et donc, par comparaison $\sum |c_n|$ converge i.e. $\sum c_n$ converge absolument. $\square$

**Exemple 3.**

Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$. Les séries $\sum (n+1) z^n$ et $\sum \frac{(n+1)(n+2)}{2} z^n$ convergent et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n = \frac{1}{(1-z)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} z^n = \frac{1}{(1-z)^3}.$$

— On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = z^n$ et $b_n = z^n$. Alors les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument car séries géométriques de raison $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$. Par suite, par produit de Cauchy, la série $\sum c_n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ converge absolument et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right).$$

Or, d'une part, on a :

$$\left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right) = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \right)^2 = \frac{1}{(1-z)^2}$$

et d'autre part, pour $n \in \mathbb{N}$ :

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} z^k z^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} z^n = (n+1) z^n$$

d'où $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n = \frac{1}{(1-z)^2}$.

— On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = (n+1)z^n$ et $b_n = z^n$. Alors les séries $\sum b_n$ converge absolument car série géométrique de raison $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$ et $\sum a_n$ converge absolument d'après ce qui précède. Par suite, par produit de Cauchy, la série $\sum c_n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ converge absolument et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right).$$

Or, d'une part, on a, d'après ce qui précède :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \frac{1}{(1-z)^2} \times \frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-z)^3}.$$

et d'autre part, pour $n \in \mathbb{N}$ :

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} (k+1) z^k z^{n-k} = z^n \sum_{k=0}^{n} (k+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} z^n.$$

d'où $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} z^n = \frac{1}{(1-z)^3}$.

Grâce au produit de Cauchy, on montre que la fonction exp "transforme" somme en produit :

**Proposition 9.**

Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. On a $\exp(z+z') = \exp(z)\exp(z')$.

Démonstration.

Les séries exponentielles $\sum \frac{z^n}{n!}$ et $\sum \frac{z'^n}{n!}$ sont absolument convergentes d'après la propostion 7, donc leur produit de Cauchy $\sum c_n$ converge absolument et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z'^n}{n!}\right) = \exp(z)\exp(z').$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{z'^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k z'^{n-k} \\ c_n &= \frac{(z+z')^n}{n!} \text{ d'après la formule du binôme de Newton} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+z')^n}{n!} = \exp(z+z').$$

Il en résulte que :

$$\exp(z+z') = \exp(z)\exp(z').$$

□

**Corollaire 3.**

L'application exp définie sur $\mathbb{C}$ est à valeurs dans $\mathbb{C}^*$ et est un morphisme de groupes de $(\mathbb{C},+)$ dans $(\mathbb{C}^*,\times)$.

Démonstration.

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a, d'après la proposition précédente,

$$1 = \exp(0) = \exp(z+(-z)) = \exp(z)\exp(-z)$$

donc $\exp(z)$ est inversible dans $\mathbb{C}$ d'inverse $\exp(-z)$. En particulier, $\exp(z)$ appartient à $\mathbb{C}^*$. Ainsi, exp est à valeurs dans $\mathbb{C}^*$.
De plus, toujours d'après la proposition précédente, on a, pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$ :

$$\exp(z+z') = \exp(z)\exp(z').$$

Donc exp est un morphisme de groupes de $(\mathbb{C},+)$ dans $(\mathbb{C}^*,\times)$. □

**Exercice 10.**

Montrer la convergence et calculer la somme de la série de terme général :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2(n-k)!}$$

Correction.

On remarque que $u_n$ est le terme général du produit de Cauchy des séries $\sum_{n\geq 1} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ et $\sum \frac{1}{n!}$.
Étudions la convergence absolue de ces deux séries. Puisqu'elles sont à termes positifs, il suffit de montrer qu'elles sont convergentes.

— La série $\sum \frac{1}{n!}$ est la série exponentielle de 1, donc converge et est de somme $e^1 = e$ ;
— On remarque que $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$. Ainsi, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ est télescopique et donc de même nature que la suite $(\frac{1}{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ qui est convergente (vers 0). Et de plus, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{1^2} - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 1$$

Il en résulte que le produit de Cauchy $\sum u_n$ converge absolument et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\right) = e.$$

**Exercice 11.**

Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ des séries de termes généraux à valeurs dans une algèbre normée $A$ de dimension finie. On définit le produit de Cauchy $\sum c_n$ de $\sum a_n$ et $\sum b_n$ de la même façon que dans le cas numérique i.e., pour $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Montrer que si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument, alors la conclusion du théorème 5 reste valable i.e. $\sum c_n$ converge absolument et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right).$$

Correction.

Montrer que si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument. Comme $A$ est de dimension finie, cette hypothèse a bien du sens car toutes les normes sont équivalentes et on considère alors une norme $\|\cdot\|$ sous-multiplicative sur $A$ i.e. pour tous $a, b \in A$, $\|ab\| \leq \|a\|.\|b\|$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a, par inégalité triangulaire puis par sous-multiplicativité de la norme :

$$\|c_n\| \leq \sum_{k=0}^{n} \|a_k b_{n-k}\| \leq \sum_{k=0}^{n} \|a_k\|.\|b_{n-k}\|$$

Or, la série **numérique** de terme général $c'_n = \sum_{k=0}^{n} \|a_k\|.\|b_{n-k}\|$ est le produit de Cauchy des séries **numériques** absolument convergentes $\sum \|a_n\|$, $\sum \|b_n\|$ donc, par (absolue) convergence du produit de Cauchy de deux séries numériques absolument convergentes (théorème 5), $\sum c'_n$ converge.

Ainsi, par comparaison, $\sum \|c_n\|$ converge i.e. $\sum c_n$ converge absolument.

De plus, $A$ est de dimension finie, donc $\sum c_n$ converge.

Notons $A, B, C$ les sommes respectives de $\sum a_n$, $\sum b_n$, $\sum c_n$, et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ leurs sommes partielles respectives. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\|C - AB\| \leq \|C - C_N\| + \|C_N - A_N B_N\| + \|A_N B_N - AB\|$$

Or,

- ⋆ Par convergence de $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $C$, $\|C - C_N\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- ⋆ Par continuité de l'application de $A^2$ dans $A$ bilinéaire en dimension finie $(x, y) \mapsto xy$ et par convergence de $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $A$ et de $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $B$, $\|A_N B_N - AB\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Reste à traiter le cas du terme $\|C_N - A_N B_N\|$.

Notons $\alpha, \beta, \gamma$ les sommes respectives de $\sum \|a_n\|$, $\sum \|b_n\|$, $\sum \|c_n\|$, et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ leurs sommes partielles respectives. Par convergence du produit de Cauchy de deux séries numériques absolument convergentes, on a $\gamma = \alpha\beta$ et donc $\gamma_n - \alpha_n\beta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

De plus, en notant $T_N = \{(p,q) \in [\![0,N]\!]^2 \mid p+q \leq N\}$ :

$$\begin{aligned}
\|C_N - A_N B_N\| &= \left\| \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} - \left(\sum_{n=0}^{N} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{N} b_n\right) \right\| \\
&= \left\| \sum_{(p,q)\in T_N} a_p b_q - \sum_{(p,q)\in [\![0,N]\!]^2} a_p b_q \right\| \\
&= \left\| - \sum_{(p,q)\in [\![0,N]\!]^2 \setminus T_N} a_p b_q \right\| \\
&\leq \sum_{(p,q)\in [\![0,N]\!]^2 \setminus T_N} \|a_p\| \|b_q\|
\end{aligned}$$

Or on a, par un calcul analogue :

$$\alpha_N \beta_N - \gamma_N = \sum_{(p,q)\in [\![0,N]\!]^2 \setminus T_N} \alpha_p \beta_q = \sum_{(p,q)\in [\![0,N]\!]^2 \setminus T_N} \|a_p\| \|b_q\|$$

Par suite, on obtient :

$$\|C_N - A_N B_N\| \leq \alpha_N \beta_N - \gamma_N \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Il en résulte que $\|C - AB\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc $C = AB$.

On a donc bien généralisé le théorème 5 au cas d'une algèbre de dimension finie.

**Exercice 12.** *Contre-exemples !*

1. Considérer le produit de Cauchy de $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ par elle-même puis en déduire que le produit de Cauchy de deux séries convergentes n'est pas convergent en général.
2. (a) Considérer le produit de Cauchy des séries $\sum a_n$ et de $\sum 1$ où $a_0 = 1$, $a_1 = -1$ et, pour tout entier $n \geq 2$, $a_n = 0$ ; puis en déduire que le produit de Cauchy de deux séries peut être convergent alors qu'une des deux séries diverge.

   (b) Trouver un exemple de produit de Cauchy convergent de deux séries divergentes.

Correction.

1. Tout d'abord, la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ est convergente. En effet, il s'agit d'une série alternée et la suite $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ est décroissante de limite nulle, donc, d'après le critère des séries alternées (Théorème 4), on a bien convergence de la série.

   Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $c_n$ le terme général du produit de Cauchy de $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ et d'elle même. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a alors :

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} . \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}}.$$

Or, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a, $(n-k+1)(k+1) \leq (n+1)^2$, donc :

$$|c_n| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} = 1.$$

Ainsi, en particulier, la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, donc la série produit de Cauchy $\sum c_n$ diverge grossièrement.

2. (a) Notons $c_n$ le terme génral du produit de Cauchy à considérer. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 1 + (-1) = 0 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Ainsi, la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire en 0 et donc est le terme général d'une série convergente. Or, la série $\sum 1$ diverge grossièrement, donc on peut avoir un produit de Cauchy convergent de deux séries dont l'une est divergente.

(b) On s'inspire de la question précédente : on essaye de trouver deux suites qui ne convergent pas vers 0 mais telle que le terme général du produit de Cauchy s'annule à partir d'un certain rang ! Par exemple, on peut prendre, pour $n \in \mathbb{N}$ :

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 2(-1)^n & \text{si } n \geq 1 \end{cases} \text{ et } b_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 2 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Les deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ diverge grossièrement et, pour $n \in \mathbb{N}$, en notant $c_n$ le terme général du produit de Cauchy des deux séries, on a $c_0 = 1$, et, si $n \geq 1$ :

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \\ &= 2 + 4\sum_{k=0}^{n}(-1)^k + 2(-1)^n \\ &= 2(1+(-1)^n) + 4 \times (-1) \times \frac{1-(-1)^{n-1}}{1-(-1)} \\ c_n &= 0 \end{aligned}$$

Par suite, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire en 0, donc le produit de Cauchy $\sum c_n$ converge !

*Remarque : les deux exemples précédents semblent très artificiels, mais on comprendra mieux comment les "dénicher" lorsqu'on abordera les produits de Cauchy de séries entières ; en effet, on interprètera les produits de Cauchy de la question 2a) comme les coefficients du produit entre* $\frac{1}{1-z}$ *et* $1-z$ *; et de la réponse à la question 2b) comme les coefficients du produit entre* $\frac{1-z}{1+z}$ *et* $\frac{1+z}{1-z}$.

## 5. Sommation des relations de comparaison

### a. En cas de convergence

**Proposition 10.**

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries numériques avec $\sum v_n$ à termes positifs. On suppose que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent. Alors les restes $R_n(u)$ et $R_n(v)$ respectifs des séries associées aux suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient, quand $n \to +\infty$ :

— Si $u_n = O(v_n)$, alors $R_n(u) = O(R_n(v))$.

— Si $u_n = o(v_n)$, alors $R_n(u) = o(R_n(v))$.

— Si $u_n \sim v_n$, alors $R_n(u) \sim R_n(v)$.

Démonstration.

On remarque que dans chacun des cas précédent, la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ verifie la même relation de comparaison que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vis-à-vis de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par suite, comme $\sum v_n$ converge, par comparaison, $\sum |u_n|$ converge et donc ses restes $R_n(|u|)$ sont bien définis et on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$|R_n(u)| = |\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_n| = R_n(|u|).$$

— On suppose $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$. Alors il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq Mv_n$. Par suite, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|R_n(u)| \leq R_n(|u|) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \underbrace{|u_n|}_{\leq Mv_n} \leq M \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_n = MR_n(v).$$

D'où $R_n(u) \underset{n\to+\infty}{=} O(R_n(v))$.

— On procède de manière similaire : on suppose $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ implique $|u_n| \leq \varepsilon v_n$.
Par suite, pour tous $n \geq N$ et $k \geq n+1$, on a $k \geq N$ donc :

$$|R_n(u)| \leq R_n(|u|) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \underbrace{|u_n|}_{\leq \varepsilon v_n} \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_n = \varepsilon R_n(v).$$

D'où $R_n(u) \underset{n\to+\infty}{=} o(R_n(v))$.

— On suppose $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Alors par définition, $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n - v_n$. Alors, par comparaison (ou par combinaison linéaire de série convergente), $\sum w_n$ est convergente et ses restes $R_n(w)$ vérifient, d'après le point précédent, $R_n(w) \underset{n\to+\infty}{=} o(R_n(v))$.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n(w) = R_n(u) - R_n(v)$, donc :

$$R_n(u) - R_n(v) \underset{n\to+\infty}{=} o(R_n(v)).$$

D'où $R_n(u) \underset{n\to+\infty}{=\sim} R_n(v)$.

□

**Exemple 4.**

On a :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{2^k}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^n}.$$

Comme $\frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\sin(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ donc $\sin(\frac{1}{2^n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^n}$ qui est le terme général d'une série convergente à termes positifs ; ainsi, par sommation de la relation d'équivalence (cas convergent), les restes des séries $\sum \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$ et $\sum \frac{1}{2^n}$ sont équivalents i.e.

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{2^k}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}.$$

Or, pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$$

D'où l'équivalence annoncée.

### b. En cas de divergence

**Proposition 11.**

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries numériques avec $\sum v_n$ à termes positifs. On suppose que $\sum v_n$ diverge. Alors les sommes partielles $S_n(u)$ et $S_n(v)$ respectifs des séries associées aux suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient, quand $n \to +\infty$ :

- Si $u_n = O(v_n)$, alors $S_n(u) = O(S_n(v))$.
- Si $u_n = o(v_n)$, alors $S_n(u) = o(S_n(v))$.
- Si $u_n \sim v_n$, alors $S_n(u) \sim S_n(v)$.

Démonstration.

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant à termes positifs, la série associé est croissante et donc, comme $\sum v_n$ diverge, alors $(S_n(v))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, i.e. pour tout $A \geq 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N_1$ implique $S_n(v) \geq A$.

- On suppose $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$. Alors il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M v_n$. Par suite, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|S_n(u)| \leq \sum_{k=0}^{n} \underbrace{|u_n|}_{\leq M v_n} \leq M \sum_{k=0}^{n} v_n = M S_n(v).$$

  D'où $S_n(u) = \underset{n\to+\infty}{O}(S_n(v))$.
- On suppose $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ implique $|u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} v_n$.

De plus, pour $A = \frac{2S_N(|u|)}{\varepsilon} \geq 0$, d'après la remarque initiale, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geq N_1$, $S_n(v) \geq A$ i.e. $S_N(|u|) \leq \frac{\varepsilon}{2} S_n(v)$.
Soit un entier $n \geq \max(N, N_1)$. Alors :

$$|S_n(u)| \leq \sum_{k=0}^{N} |u_n| + \sum_{k=N+1}^{n} \underbrace{|u_n|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2} v_n} \leq \underbrace{S_N(|u|)}_{\leq \frac{\varepsilon}{2} S_n(v)} + \frac{\varepsilon}{2} \underbrace{\sum_{k=N+1}^{n} v_n}_{\leq S_n(v)} = \varepsilon S_n(v).$$

D'où $S_n(u) \underset{n \to +\infty}{=} o(S_n(v))$.

— On suppose $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$. Alors par définition, $u_n - v_n \underset{n \to +\infty}{=} o(v_n)$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n - v_n$, et $S_n(w)$ la somme partielle d'ordre $n$ de $\sum w_n$. Alors on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n(w) = S_n(u) - S_n(v)$ et d'après le cas précédent, comme $w_n \underset{n \to +\infty}{=} o(v_n)$,

$$S_n(u) - S_n(v) = S_n(w) \underset{n \to +\infty}{=} o(S_n(v)).$$

D'où $S_n(u) \underset{n \to +\infty}{\sim} S_n(v)$.

□

**Exemple 5.**

On a :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k^2+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n).$$

On a $\frac{n}{n^2+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ qui est le terme général d'une série divergente à termes positifs ; ainsi, par sommation de la relation d'équivalence (cas divergent), les sommes partielles des séries $\sum \frac{n}{n^2+1}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ sont équivalentes i.e.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{k^2+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}.$$

Or, d'après l'exercice 8, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n),$$

d'où l'équivalence annoncée.

**Corollaire 4.** *Lemme de Cesàro*

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs complexes. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ ou si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs réelles et tend vers $\ell = +\infty$, alors :

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

Correction.

— On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ et pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - \ell$. Alors on a $v_n = u_n - \ell = \underset{n\to+\infty}{o}(1)$. Comme la série $\sum 1$ diverge, par sommation de la relation de négligeabilité (cas divergent), la somme partielle $S_n$ d'indice $n$ de la série $\sum v_n$ vérifie :

$$S_n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\sum_{k=0}^{n} 1\right) = \underset{n\to+\infty}{o}(n)$$

Or on a $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_n = \sum_{k=0}^{n} u_n - \sum_{k=0}^{n} \ell = \sum_{k=0}^{n} u_n - (n+1)\ell$. Par suite,

$$\sum_{k=0}^{n} u_n = (n+1)\ell + \underset{n\to+\infty}{o}(n),$$

d'où le résultat en quotientant cette dernière égalité par $n+1$.

— On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
Alors, à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$ pour tout entier $n \geq \mathbb{N}$, $u_n > 0$, et en $+\infty$, $1 = o(u_n)$. Par suite, comme $\sum_{n\geq n_0} u_n$ diverge grossièrement, par sommation de la relation de négligéabilité (cas divergent) :

$$n - n_0 = \sum_{k=n_0}^{n} 1 = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\sum_{k=n_0}^{n} u_n\right) = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$$

cette dernière égalité étant justifiée par le fait que la suite des sommes partielles de $\sum_{n\geq n_0} u_n$ tend vers $+\infty$. Ainsi :

$$1 = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n-n_0}\sum_{k=0}^{n} u_n\right)$$

et donc, $\frac{1}{n-n_0}\sum_{k=0}^{n} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ ce qui équivaut à :

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

### c. Exercices d'application

**Exercice 13.**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à valeurs complexes et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$.

Montrer que si la série $\sum_{n\geq 1} \frac{u_n}{n}$ converge, alors la suite $(\frac{S_n}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite à déterminer.

Correction.

On suppose que $\sum_{n\geq 1} \frac{u_n}{n}$ converge. On note, pour $n \in \mathbb{N}$ :

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k} \quad \text{et} \quad s = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n}$$

(ici $s_0 = 0$ car somme vide)

On remarque que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = k(s_k - s_{k-1})$ et ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} u_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} k(s_k - s_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} ks_k - \sum_{k=1}^{n} ks_{k-1} \\
&= \sum_{k=2}^{n+1} \underbrace{(k-1)s_{k-1}}_{=ks_{k-1}-s_{k-1}} - \sum_{k=1}^{n} ks_{k-1} \\
&= (n+1)s_n - 1.s_0 - \sum_{k=2}^{n} s_{k-1} \\
S_n &= (n+1)s_n - \sum_{k=1}^{n} s_k \text{ car } s_0 = 0
\end{aligned}$$

Or, on a $s_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} s$ et donc, d'après le lemme de Cesàro (Corollaire 4) :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} s$$

Par suite, on a :

$$\frac{S_n}{n} = \frac{n+1}{n}s_n - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.s - s = 0$$

Il en résulte que la suite $(\frac{S_n}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

**Exercice 14.**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que la série $\sum u_n$ converge. Le but de cette exercice est de déterminer une condition nécessaire et suffisante en terme d'équivalent simple de $u_n$ pour que :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} R_n(u)^2 \quad (*)$$

où $(R_n(u))_{n\in\mathbb{N}}$ désigne la suite des reste de la série $\sum u_n$.

1. Commençons par le côté suffisant :

   (a) Rechercher une suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ simple qui vérifie la relation $(*)$ et le démontrer en utilisant une sommation de la relation d'équivalence et une série télescopique.

   (b) En déduire que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} R_n(u)^2$.

2. Montrer que la condition de la question 1b précédente est également nécessaire.

Correction.

1. (a) En s'appuyant sur ce que nous avions fait dans le paragraphe "Comparaison série/intégrale" et l'exercice 8, on remarque que la suite de terme général $v_n = \frac{1}{n^2}$ convient !
   Redémontrons ce résultat de la façon suggérée par l'énoncé :
   On a $\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n(n+1)}$. De plus $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge d'après le critère de Riemann donc, par sommation de la relation d'équivalence (cas convergent) :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

   Or, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ donc, par "télescopage",

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n+1}.$$

   Il en résulte que :

$$R_n(v) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

   On a donc bien

$$v_n = \frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} R_n(v)^2.$$

   (b) On suppose $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n = \frac{1}{n^2}$. Alors les séries de termes généraux $u_n$ et $v_n$ convergent et par sommation de la relation d'équivalence (cas convergent), on a $R_n(u) \underset{n\to+\infty}{\sim} R_n(v)$ et donc $R_n(u)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} R_n(v)^2$.
   D'après la question précédente, il en résulte que :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} R_n(v)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} R_n(u)^2.$$

2. Montrons que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} R_n(u)^2$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.

Par hypothèse, on a $u_n = R_n(u)^2 + \underset{n\to+\infty}{o}(R_n(u)^2)$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = R_{n-1} - R_n$, donc :

$$R_{n-1}(u) = u_n + R_n(u) = R_n(u) + R_n(u)^2 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(R_n(u)^2\right).$$

Ainsi, $R_{n-1}(u) \underset{n\to+\infty}{\sim} R_n(u)$ car la suite $(R_n(u))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Comme la suite est à valeurs strictement positives, la suite des restes l'est aussi, donc la quantité $\frac{1}{R_n(u)}$ est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on a :

$$\frac{1}{R_n(u)} - \frac{1}{R_{n-1}(u)} = \frac{R_{n-1}(u) - R_n(u)}{R_{n-1}(u)R_n(u)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{R_n(u)^2}{R_n(u)^2} = 1.$$

Par suite, par la série $\sum_{n\geq 1}(\frac{1}{R_n(u)} - \frac{1}{R_{n-1}(u)})$ diverge par comparaison à la série divergente $\sum_{n\geq 1} 1$ et par sommation de la relation d'équivalence (cas divergent), on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{R_k(u)} - \frac{1}{R_{k-1}(u)}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} 1 = n.$$

Or, la série $\sum_{n\geq 1}(\frac{1}{R_n(u)} - \frac{1}{R_{n-1}(u)})$ est télescopique, d'où :

$$\frac{1}{R_n(u)} - \frac{1}{R_0(u)} \underset{n\to+\infty}{\sim} n.$$

De plus, $\frac{1}{R_n(u)}$ tend vers l'infini quand $n$ tend vers $+\infty$, donc $\frac{1}{R_n(u)} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et ainsi :

$$R_n(u) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Il en résulte que :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} R_n(u)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

La condition est donc bien nécessaire.

# Partie C

## Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice

Dans cette partie, $p, q$ sont des entiers naturels non nuls, $E$ est un espace vectoriel de dimension finie $p$ sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\mathcal{A}$ est une algèbre de dimension finie $q$ sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

### 1. Définition de l'exponentielle d'un élément d'une algèbre

**Proposition 12.**

Soit $a \in \mathcal{A}$. La série $\sum \frac{a^n}{n!}$ converge.

Démonstration.

On munit $\mathcal{A}$ d'une norme $\|\cdot\|$ sous-multiplicative.
Une telle norme existe bien :

- si $\mathcal{A} = M_p(\mathbb{K})$, on peut prendre par exemple la norme canonique i.e. $A \mapsto \sqrt{\mathrm{Tr}({}^t\!AA)}$ ;
- si $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$, on peut prendre la norme induite sur $\mathcal{L}(E)$ d'une norme de $M_p(\mathbb{K})$ sous-multiplicative via l'isomorphisme $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}$ avec $\mathcal{B}$ une base de $E$ ou encore en prenant la norme d'opérateur associée à deux normes quelconques sur $E$ ;
- en toute généralité, voire la fin du Chapitre "Topologie des espaces vectoriels normés".

Alors on a, pour $k \in \mathbb{N}$ :

$$\left\| \frac{a^k}{k!} \right\| \leq \frac{\|a\|^k}{k!}.$$

*On peut alors remarquer que $\sum \frac{\|a\|^k}{k!}$ est la série exponentielle (numérique) de $\|a\|$ qui converge absolument et conclure par comparaison mais on redémontre ici, ça ne fait pas de mal, cette convergence absolue :*

Si $\|a\| = 0$, alors la suite $(\frac{\|a\|^k}{k!})_{k\in\mathbb{N}}$ est stationnaire en 0 donc $\sum \frac{\|a\|^k}{k!}$ converge et,
si $\|a\| \neq 0$, on a :

$$\frac{\frac{\|a\|^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{\|a\|^k}{k!}} = \frac{\|a\|}{k!} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 < 1$$

donc, d'après la règle de D'Alembert, $\sum \frac{\|a\|^k}{k!}$ converge.
Ainsi, dans tous les cas, $\sum \frac{\|a\|^k}{k!}$ converge, donc par comparaison de termes généraux de séries à termes positifs, $\sum \left\| \frac{a^n}{n!} \right\|$ converge i.e. $\sum \frac{a^n}{n!}$ converge absolument. Ainsi, d'après le théorème 1, $\sum \frac{a^n}{n!}$ converge. $\square$

**Définition 10.**

Soit $a \in \mathcal{A}$. On appelle **exponentielle de** $a$ et on note $\exp(a)$ ou encore $e^a$, l'élement de $\mathcal{A}$ :

$$\exp(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}.$$

**Remarque 9.**

— Dans la suite, on s'intéressera la plus souvent aux cas $\mathcal{A} = M_p(\mathbb{K})$ ou $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$ ; dans le cas matriciel, pour $A \in M_p(\mathbb{K})$, la notation est naturellement :

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

— En écriture développée, on a :

$$\exp(a) = 1_{\mathcal{A}} + a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3!} + \dots$$

avec $1_{\mathcal{A}} = I_p$ pour $\mathcal{A} = M_p(\mathbb{K})$ et $1_{\mathcal{A}} = \mathrm{Id}_E$ pour $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$.

**Exemple 6.**

— Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a $\exp(\lambda I_p) = e^\lambda I_p$ et $\exp(\lambda \mathrm{Id}_E) = e^\lambda \mathrm{Id}_E$.

— $\exp\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

— Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On traite le cas général dans une algèbre d'élément unité $1_{\mathcal{A}}$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\lambda 1_{\mathcal{A}})^n = \lambda^n 1_{\mathcal{A}}$, d'où :

$$\exp(\lambda 1_{\mathcal{A}}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda 1_{\mathcal{A}})^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\right) 1_{\mathcal{A}} = e^\lambda 1_{\mathcal{A}}.$$

— On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^3 = 0_3$$

donc, pour tout entier $n \geq 3$, $A^n = 0_3$ d'où :

$$\begin{aligned}
\exp(A) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{2} \frac{A^n}{n!} \\
&= I_3 + A + \frac{A^2}{2} \\
\exp(A) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

## 2. Propriétés

### a. Lien entre exponentielle matriciel et d'endomorphisme

**Proposition 13.**

Soit $a \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de $E$. On a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\exp(a)) = \exp(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a))$$

*Démonstration.*

L'application $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} : \mathcal{L}(E) \to M_p(\mathbb{K})$ est un isomorphisme d'algèbres et donc en particulier linéaire d'espace de départ $\mathcal{L}(E)$ qui est de dimension finie donc elle est continue sur $\mathcal{L}(E)$.
Notons $(S_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum \frac{a^n}{n!}$.
D'après la caractérisation séquentielle de la continuité, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(S_n(a)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\exp(a))$ et de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(S_n(a)) &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a)^k}{k!} \\
\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(S_n(a)) &\xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a)).
\end{aligned}$$

Ainsi, par unicité de la limite, on obtient :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\exp(a)) = \exp(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a)).$$

□

**Proposition 14.**

Soit $A, B \in M_p(\mathbb{K})$. Si $A$ et $B$ sont semblables, alors $\exp(A)$ et $\exp(B)$ le sont aussi.
Plus précisément, s'il existe $P \in GL_p(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$, alors $\exp(A) = P\exp(B)P^{-1}$.

Démonstration.

— 1ère façon : en utilisant la proposition précédente.

Notons $a$ l'endomorphisme de $\mathbb{K}^p$ canoniquement associé à $A$ et $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$. Alors on a, par définition de $a$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a)$ et comme $B$ est semblable à $A$, il existe une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{K}^p$ telle que $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(a)$.
On note $P$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{C}$. Alors on a, pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)P^{-1}$. Par suite, on a :

⋆ $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a) = P\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(a)P^{-1} = PBP^{-1}$ et

⋆ $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\exp(a)) = P\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\exp(a))P^{-1}$.

Or, d'après la proposition précédente (Proposition 13), on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\exp(a)) = \exp\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a)\right) = \exp(A)$$

et de même, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\exp(a)) = \exp(B)$.
Il en résulte que :

$$\exp(A) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\exp(a)) = P\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\exp(a))P^{-1} = P\exp(B)P^{-1}.$$

— 2ème façon : directement.

On suppose qu'il existe $P \in GL_p(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$. On note $(S_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n(B))_{n\in\mathbb{N}}$ les suites des sommes partielles des séries exponentielles $\sum \frac{A^n}{n!}$ et $\sum \frac{B^n}{n!}$.
On a, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $A^k = (PBP^{-1})^k = PB^kP^{-1}$. Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$S_n(A) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{PB^kP^{-1}}{k!} = P\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{B^k}{k!}\right)P^{-1} = PS_n(B)P^{-1}.$$

L'application $\varphi_P : M \mapsto PMP^{-1}$ est un endomorphisme de $M_p(\mathbb{K})$ qui est de dimension finie, donc elle est continue sur $M_p(\mathbb{K})$.
Par suite, comme $(S_n(B))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\exp(B)$, d'après la caractérisation séquentielle de la continuité, on a :

$$S_n(A) = PS_n(B)P^{-1} = \varphi_P(S_n(B)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi_P(\exp(B)) = P\exp(B)P^{-1}.$$

Or, on a $S_n(A) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(A)$, donc, par unicité de la limite, il en résulte que :

$$\exp(A) = P\exp(B)P^{-1}.$$

□

**Exercice 15.**

Soit $a \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in M_p(\mathbb{K})$.

1. Montrer qu'il existe $P_a \in \mathbb{K}_{p-1}[X]$ tel que $\exp(a) = P_a(a)$.
2. Montrer qu'il existe $P_A \in \mathbb{K}_{p-1}[X]$ tel que $\exp(A) = P_A(A)$.

Correction.

1. On a $\exp(a) = \lim\limits_{n \to +\infty} P_n(a)$ où $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^n}{n!} \in \mathbb{K}[X]$.

   Comme $\mathbb{K}[a] = \{P(a) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$ est une sous-algèbre (voire le chapitre "Structures algébriques usuelles") et donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ qui est de dimension finie, alors $\mathbb{K}[a]$ est un fermé de $\mathcal{L}(E)$. Ainsi, d'après la caractérisation séquentielle des fermés, comme la suite $(P_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $\mathbb{K}[a]$, $\exp(a)$ appartient à $\mathbb{K}[a]$.
   De plus, on a $\deg(\pi_a) \leq p$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton et donc $\mathbb{K}[a] = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, a, \ldots, a^{p-1}) = \{P(a) \mid P \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\}$ (voire de nouveau le chapitre "Structures algébriques usuelles").
   D'où l'existence de $P \in \mathbb{K}_{p-1}[X]$ tel que $\exp(a) = P(a)$.

2. On raisonne de manière annalogue pour $A \in M_p(\mathbb{K})$ ou, en utilisant le résultat précédent : on note $a$ l'endomorphisme de $\mathbb{K}^p$ canoniquement associé à $A$ et $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$ ; alors il existe $P \in \mathbb{K}_{p-1}[X]$ tel que $\exp(a) = P(a)$ et donc, d'après la proposition 13 et du fait que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} : \mathcal{L}(E) \to M_p(\mathbb{K})$ est un morphisme d'algèbres,

$$\exp(A) = \exp\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a)\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\exp(a)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P(a)) = P\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a)\right) = P(A).$$

### b. Exponentielle d'une somme d'éléments qui commutent

Nous verrons une preuve analytique du résultat suivant dans le chapitre consacré aux équations différentielles :

**Théorème 6.**

Soit $a, b \in \mathcal{A}$. Si $a$ et $b$ commutent, alors $\exp(a)$ et $\exp(b)$ commutent et :

$$\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b).$$

Démonstration.

*On propose tout de même ici une démonstration hors programme reposant sur la convergence du produit de Cauchy dans une algèbre de dimension finie et en tout point analogue à la démonstration du même résultat dans le cas complexe (Proposition 9).*

Soit $a, b \in \mathcal{A}$ tels que $ab = ba$. Les séries $\sum \frac{a^n}{n!}$ et $\sum \frac{b^n}{n!}$ sont absolument convergentes d'après la proposition 12, donc, d'après l'exercice 11, leur produit de Cauchy $\sum c_n$ converge absolument et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b^n}{n!}\right) = \exp(a)\exp(b).$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $a$ et $b$ commutent, la formule du binôme de Newton est valable, i.e. :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

et donc :

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \frac{b^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ c_n &= \frac{(a+b)^n}{n!} \text{ d'après la formule du binôme de Newton.} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a+b)^n}{n!} = \exp(a+b).$$

Il en résulte que :

$$\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b).$$

De plus, puisque $\exp(a+b) = \exp(b+a)$, on a bien $\exp(a)\exp(b) = \exp(b)\exp(a)$. $\square$

**Corollaire 5.**

Pour tout $a \in \mathcal{A}$, $\exp(a)$ est inversible d'inverse $\exp(-a)$.

Démonstration.

Soit $a \in \mathcal{A}$. Alors $a$ et $-a$ commutent donc :

$$1_{\mathcal{A}} = \exp(0_{\mathcal{A}}) = \exp(a + (-a)) = \exp(a)\exp(-a).$$

Ainsi, $\exp(a)$ est inversible d'inverse $\exp(-a)$. $\square$

## 3. Calculs pratiques d'exponentielles

### a. À partir d'une expression explicite des puissances

**Proposition 15.** *Matrices diagonales par blocs*

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $p_1, ..., p_k \in \mathbb{N}^*$ tels que $p_1 + ... + p_k = p$. Pour $A_1 \in M_{p_1}(\mathbb{K}), ..., A_k \in M_{p_k}(\mathbb{K})$, on a :

$$\exp\left(\left(\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & A_p \end{array}\right)\right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \exp(A_1) & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & \exp(A_k) \end{array}\right)$$

Démonstration.

Notons $A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & A_p \end{array}\right)$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$A^n = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_1^n & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & A_p^n \end{array}\right)$$

Par suite, d'après la proposition 5 :

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_1^n}{n!} & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_k^n}{n!} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \exp(A_1) & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & \exp(A_k) \end{array}\right)$$

□

**Corollaire 6.**

Soit $\lambda_1, ..., \lambda_p \in \mathbb{K}$. On a :

$$\exp\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_p} \end{pmatrix}$$

**Exercice 16.**

Déterminer l'ensemble des matrices diagonales $A$ de $M_3(\mathbb{C})$ telle que $\exp(A) = I_3$.

Correction.

Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$. On a :
$\exp(\mathrm{diag}(a,b,c)) = I_3 \Leftrightarrow \mathrm{diag}(e^a, e^b, e^c) = I_3$
$\Leftrightarrow$
$$\begin{cases} e^a = 1 \\ e^b = 1 \\ e^c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2ik_a\pi \text{ avec } k_a \in \mathbb{Z} \\ b = 2ik_b\pi \text{ avec } k_b \in \mathbb{Z} \\ c = 2ik_c\pi \text{ avec } k_c \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$
Par suite, on a :

$$\{\mathrm{diag}(a,b,c) \in M_3(\mathbb{C}) \mid \exp(\mathrm{diag}(a,b,c)) = I_3\} = \{2i\pi\mathrm{diag}(k_a,k_b,k_c) \mid k_a,k_b,k_c \in \mathbb{Z}\}.$$

**Proposition 16.** *Matrices nilpotentes/endomorphismes nilpotents*

Soit $N \in M_p(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente d'indice $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\exp(N) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{N^k}{k!}$$

De même pour les endomorphismes.

**Exercice 17.**

Calculer l'exponentielle des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in M_p(\mathbb{R}),\ p \in \mathbb{N}^*$$

Correction.

1. — On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^3 = 0_3,$$

donc $A$ est nilpotente d'indice 3 et donc :

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{2} \frac{A^k}{k!} = I_3 + A + \frac{A^2}{2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

— On remarque que $B^k$ avec $k \in [\![1, p-1]\!]$ est la matrice nulle sauf sur la $k$-ième sur-diagonale qui est remplie de 1 et que $B^p = 0_p$. Par suite :

$$\exp(B) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{B^k}{k!} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(p-1)!} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!} \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_p(\mathbb{R})$$

**Exercice 18.**

On considère l'espace $E = \mathbb{K}_p[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de dégré au plus $p$ et $D$ l'endomorphisme de $E$ tel que $D : P \mapsto P'$.
Calculer $\exp(D)$.

Correction.

On remarque que $D$ est un endomorphisme nilpotent d'indice $p+1$ et donc :

$$\exp(D) = \sum_{n=0}^{p} \frac{D^n}{n!}.$$

Or on a, pour tous $m, n \in [\![0, p]\!]$, $\frac{D^n}{n!}(X^m) = \begin{cases} \binom{m}{n} X^{m-n} & \text{si } n \leq m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, d'où, par la formule du binôme de Newton, $\exp(D)(X^m) = (X+1)^m$. Par suite, par linéarité de $\exp(D)$, on a, pour tout $P \in E$ :

$$\exp(D)(P) = P(X+1).$$

**Utilisation d'un polynôme annulateur**

La connaissance d'une polynôme annulateur simple d'une matrice ou d'un endomorphisme peut aider à obtenir une expression explicite de ses puissances, ce qui peut permettre un calcul direct de l'exponentielle à partir de la définition.
Voici quelques exemples d'utilisation de polynômes annulateurs ci-après :

**Exemple 7.**

— Soit $f$ un projecteur de $E$. On a $\exp(f) = \mathrm{Id}_E + (e-1)f$.
— Soit $A \in M_p(\mathbb{K})$ telle que $A^2 - 2A = 0_p$. On a $\exp(A) = I_p + \frac{1}{2}(e^2-1)A$.

— Soit $f$ un projecteur de $E$. Alors $f^2 = f$ donc, pour tout entier $n \geq 1$, $f^n = f$. Par suite, on a :

$$\exp(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n}{n!} = \mathrm{Id}_E + \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}\right) f = \mathrm{Id}_E + (e-1)f.$$

— Soit $A \in M_p(\mathbb{K})$ telle que $A^2 - 2A = 0_p$. Alors, pour tout entier $n \geq 1$, $A^n = 2^{n-1}A$.Par suite, on a :

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} = I_p + \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{n!}\right) A = I_p + \frac{1}{2}(e^2-1)A.$$

**Exercice 19.**

Soit $a \in \mathbb{K}$. On note :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_p(\mathbb{K}) \text{ et } A = \begin{pmatrix} a & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & a \end{pmatrix} \in M_p(\mathbb{K})$$

1. Déterminer $J^n$ pour tout entier $n \geq 1$ puis exprimer $\exp(J)$ comme combinaison linéaire de $I_p$ et de $J$.
2. En déduire une expression de $\exp(A)$ comme combinaison linéaire de $I_p$ et de $A$.

### b. Exponentielles de matrices diagonalisables/trigonalisables

**Calcul de l'exponentielle d'une matrice diagonalisable**

Soit $A \in M_p(\mathbb{K})$ diagonalisable avec $P \in GL_p(\mathbb{K}')$ et $D \in M_p(\mathbb{K}')$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. Alors, d'après la proposition 14 :

$$\exp(A) = P\exp(D)P^{-1}$$

Ainsi, on obtient $\exp(A)$ en calculant $\exp(D)$ grâce au corollaire 6 puis le produit $P\exp(D)P^{-1}$.

**Exercice 20.**

Déterminer l'exponentielle des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -4 & -4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_\theta = \begin{pmatrix} 0 & \theta & -\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \theta & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ où } \theta \in \mathbb{R}^*$$

Correction.

— On a :

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned} \exp(A) = P\exp(D)P^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -e+2e^{-3} & -e+e^{-3} & -e+e^{-3} \\ e-e^{-3} & e & e-e^{-3} \\ e-e^{-3} & e-e^{-3} & e \end{pmatrix} \end{aligned}$$

— On a $B = PDP^{-1}$ où

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i\theta & 0 \\ 0 & 0 & -i\theta \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 0 & i & -i \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\exp(B) = P \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & e & 0 \\ \sin(\theta) & e-\cos(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

**Calcul de l'exponentielle d'une matrice trigonalisable**

Soit $A \in M_p(\mathbb{K})$ trigonalisable. Alors $A = D + N$ avec $D$ diagonalisable, $N$ nilpotente et $DN = ND$ - il s'agit de la décomposition de Dunford (pas au programme).
Ainsi, d'après le théorème 6 :

$$\exp(A) = \exp(D)\exp(N)$$

Ainsi, on obtient $\exp(A)$ en calculant $\exp(D)$ grâce la méthode précédente et $\exp(N)$ avec la proposition 16.

Encore faut-il pouvoir calculer la décomposition de Dunford de $A$...

Dans le cadre du programme, il y a tout de même un cas où nos méthodes de trigonalisation aboutissent directement à la décomposition de Dunford :

Si $A$ est trigonalisable et possède une **unique** valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$ i.e. $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda\}$, alors $A = P(\lambda I_p + N)P^{-1}$ avec $N \in M_p(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure stricte et donc nilpotente. Ainsi :

$$\exp(A) = e^\lambda P \exp(N) P^{-1}.$$

**Exercice 21.**

Déterminer l'exponentielle des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 \\ -3 & 6 & -3 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction.

— La matrice $A = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ est diagonale par blocs, donc :

$$\exp(A) = \left(\begin{array}{c|c} e^2 & 0_{1,2} \\ \hline 0_{2,1} & \exp(A') \end{array}\right)$$

où $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 + 2E_{1,2}$.

Comme $I_2$ et $2E_{1,2}$ commutent, on a, en remarquant que $2E_{1,2}$ est nilpotente d'indice 2 :

$$\exp(A') = \exp(I_2)\exp(2E_{1,2}) = e(I_2 + 2E_{1,2}) = eA'$$

Par suite, on obtient :

$$\exp(A) = \left(\begin{array}{c|cc} e^2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & e & 2e \\ 0 & 0 & e \end{array}\right)$$

— On a :

$$B = PTP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

On a $T = 2I_3 + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ nilpotente d'indice 3, $2I_3$ et $N$ commutent donc d'où $\exp(T) = \exp(2I_3)\exp(N) = e^2 I_2(I_3 + N + \frac{N^2}{2})$ et ainsi :

$$\exp(T) = e^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par suite, en calculant $\exp(B) = P\exp(T)P^{-1}$, on trouve :

$$\exp(B) = \frac{e^2}{6} \begin{pmatrix} 7 & 5 & -4 \\ -5 & 5 & -4 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

— La matrice $C = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$ est diagonale par blocs, donc :

$$\exp(C) = \left(\begin{array}{c|c} \exp(C_1) & 0_{2,2} \\ \hline 0_{2,2} & \exp(C_2) \end{array}\right)$$

où :

⋆ $C_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi,

$$\exp(C_1) = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^i & 0 \\ 0 & e^{-i} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(1) & -\sin(1) \\ \sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix}$$

⋆ $C_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Or, en utilisant que $2I_2$ et $E_{1,2}$ commutent et que $E_{1,2}$ est nilpotente d'indice 2, on obtient :

$$\exp\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right) = \exp(2I_2)\exp(E_{1,2}) = e^2(I_2 + E_{1,2}) = e^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et ainsi :

$$\exp(C_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} e^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = e^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il en résulte que :

$$\exp(C) = \left(\begin{array}{cc|cc} \cos(1) & -\sin(1) & 0 & 0 \\ \sin(1) & \cos(1) & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2e^2 & -e^2 \\ 0 & 0 & e^2 & 0 \end{array}\right)$$

## 4. Exponentielle et réduction

Les démonstrations des résultats suivants sont proposées en problème à la fin de ce Chapitre (voire Problème 1).

**Lemme 1.**

Soit $A \in M_p(\mathbb{K})$. Si $A$ est triangulaire supérieure de coefficients diagonaux $\alpha_1, ..., \alpha_p$, alors $\exp(A)$ est triangulaire supérieure de coefficients diagonaux $e^{\alpha_1}, ..., e^{\alpha_n}$.

Démonstration.

Voire Problème 1. □

**Proposition 17.**

Soit $A \in M_p(\mathbb{K})$. Si $A$ est diagonalisable (resp. trigonalisable) dans $M_p(\mathbb{K})$, alors $\exp(A)$ est diagonalisable (resp. trigonalisable) dans $M_p(\mathbb{K})$.

Démonstration.

Voire Problème 1. □

**Théorème 7.**

Soit $A \in M_p(\mathbb{C})$. On a :

$$\det(\exp(A)) = e^{\mathrm{Tr}(A)} \text{ et } \mathrm{Sp}(\exp(A)) = e^{\mathrm{Sp}(A)} = \{e^{\lambda} \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}.$$

*Démonstration.*

Voire Problème 1. $\square$

**E&P**

# Exercices et problèmes

**Exercice 22.** *Développement asymptotique d'une suite récurrente*

On considère la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in ]0,1] \\ u_{n+1} = \sin(u_n) \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout $x \in ]0,1]$, $0 < \sin(x) < x$. En déduire que $(u_n)$ admet une limite $\lambda \in \mathbb{R}$ et la déterminer.
2. Chercher $\alpha > 0$ tel que la suite $\left(u_{n+1}^{-\alpha} - u_n^{-\alpha}\right)$ converge vers une limite non nulle et déterminer cette limite.
3. En déduire un équivalent en $+\infty$ de $\frac{1}{u_n^2}$. Déterminer ainsi un équivalent simple en $+\infty$ de $u_n$.

Correction.

1. Pour $x \in ]0,1]$, $\sin(x) > 0$ car sin est strictement positive sur $]0, \pi[$. De plus, en étudiant la fonction $f : t \mapsto t - sin(t)$ sur $\mathbb{R}$, on obtient la stricte positivité de $f$ sur $]0,1]$.

   Il en résulte que $(u_n)$ est à valeurs dans $]0,1]$ et est décroissante. Ainsi, $(u_n)$ est décroissante minorée et donc converge vers une limite $\ell \in [0,1]$. Par passage à la limite dans $u_{n+1} = \sin(u_n)$ (sin étant continue), on obtient $\ell = \sin(\ell)$ et donc $\ell = 0$ car c'est l'unique solution de $x = \sin(x)$ sur $[0,1]$.
   En conclusion, $(u_n)$ converge vers 0.

2. Soit $\alpha > 0$. Comme $u_n \to 0$, on a $\sin(u_n) = u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)$ et donc :

$$\begin{aligned} u_{n+1}^{-\alpha} - u_n^{-\alpha} &= (\sin(u_n))^{-\alpha} - u_n^{-\alpha} \\ &= (u_n - \tfrac{u_n^3}{6} + o(u_n^3))^{-\alpha} - u_n^{-\alpha} \\ &= u_n^{-\alpha}(1 - \tfrac{u_n^2}{6} + o(u_n^2))^{-\alpha} - u_n^{-\alpha} \\ &= u_n^{-\alpha}\left((1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2))^{-\alpha} - 1\right) \end{aligned}$$

   Or, on a $(1-x)^{-\alpha} = 1 + \alpha x + o(x)$ quand $x \to 0$, donc, en prenant $x = \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)$, on obtient :

$$u_{n+1}^{-\alpha} - u_n^{-\alpha} = u_n^{-\alpha}\left(1 + \alpha\frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2) - 1\right) = \alpha\frac{u_n^{2-\alpha}}{6} + o(u_n^{2-\alpha}).$$

   Ainsi, pour $\alpha = 2$, $(u_{n+1}^{-\alpha} - u_n^{-\alpha})$ converge et :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

3. D'après la question précédente, $\sum(u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2})$ diverge grossièrement car $u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2} \sim \frac{1}{3}$. Par suite, la somme partielle $S_n$ de cette série vérifie :

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3} = \frac{n+1}{3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{3}.$$

Or, par télescopage, $S_n = u_n^{-2} - u_0^{-2}$, donc

$$\frac{3}{n}\frac{1}{u_n^2} = \frac{3}{n}S_n + \frac{3}{n}u_0^{-2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 + 0 = 1.$$

Donc $\dfrac{1}{u_n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{3}$.

Il en résulte que :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}.$$

> *Pour aller plus loin :* on peut également montrer que :
>
> $$u_n = \sqrt{\frac{3}{n}} + \frac{3\sqrt{3}\ln(n)}{10n^{3/2}} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^{3/2}}\right)$$
>
> en utilisant les mêmes techniques que précédemment et un développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \frac{1}{sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}$.

**Exercice 23.** *Développement asymptotique à 3 termes de la série harmonique*

On considère la série harmonique $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n$ sa somme partielle d'indice $n$ et $d_n = H_n - \ln(n)$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$,

$$d_n - d_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}.$$

puis en déduire que $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
Dans la suite, on notera $\gamma$ la limite de $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui par ailleurs répond au doux nom de *constante d'Euler*.

2. En comparant les restes des séries (convergentes !) de termes généraux $d_{n-1} - d_n$ et $\frac{1}{2n^2}$, montrer que :

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Correction.

1. Soit $n \geq 2$ un entier. Comme $\ln(1-\frac{1}{n}) = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$, on a :

$$d_n - d_{n-1} = (H_n - H_{n-1}) - (\ln(n) - \ln(n-1)) = \frac{1}{n} + \ln(1-\frac{1}{n}) = -\frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}.$$

   Ainsi, la série télescopique $\sum_{n\geq 2}(d_n - d_{n-1})$ converge absolument par comparaison à une série de Riemann convergente et donc, elle converge. D'après la proposition 3, il en résulte que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

2. Comme $d_{n-1} - d_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$, par comparaison des restes de séries de termes généraux équivalents, on a, en notant $R_n(d)$ et $R_n(r)$ les restes respectifs de $\sum_{n\geq 2}(d_{n-1} - d_n)$ et $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{2n^2}$ :

$$R_n(d) \underset{n\to+\infty}{\sim} R_n(r) = \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n},$$

   ce dernier équivalent étant obtenu par comparaison série/intégrale ou par l'exercice 14. Or, par télescopage, $R_n(d) = d_n - \gamma$, donc $d_n = \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$ et ainsi,

$$H_n = d_n + \ln(n) = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

**Problème 1.**

Soit $p$ un entier naturel non nul.

## Exponentielle et réduction

Soit $A \in M_p(\mathbb{K})$.

1. Montrer que si $A$ est diagonalisable, alors $\exp(A)$ est diagonalisable.
2. (a) Montrer que si $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq p}$ est triangulaire supérieure, alors $\exp(A) = (s_{i,j})_{1\leq i,j\leq p}$ est triangulaire supérieure et pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $s_{i,i} = e^{a_{i,i}}$.
   (b) En déduire que si $A$ est trigonalisable dans $M_p(\mathbb{K})$, alors $\exp(A)$ est trigonalisable dans $M_p(\mathbb{K})$.
   (c) Montrer que $\det(\exp(A)) = e^{\mathrm{Tr}(A)}$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A))$ (ce dernier ensemble correspond à l'image directe du spectre de $A$ par l'application exponentielle de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$).
3. En admettant l'existence et l'unicité d'une décomposition de Dunford d'une matrice $M \in M_p(\mathbb{K})$ trigonalisable dans $M_p(\mathbb{K})$ i.e. l'existence et l'unicité d'un couple $(D, N) \in M_p(\mathbb{K})^2$ avec $D$ diagonalisable et $N$ nilpotente telles que $M = D + N$ et $DN = ND$, montrer la réciproque de la question 1 pour $A$ trigonalisable.

Correction.

1. On suppose $A$ diagonalisable dans $M_p(\mathbb{K})$. Alors il existe $P \in GL_p(\mathbb{K})$ et $D \in M_p(\mathbb{K})$ telles que $A = PDP^{-1}$. Alors, d'après la proposition 14, $\exp(A) = P\exp(D)P^{-1}$. Or, comme $D$ est diagonale, d'après le corollaire 6, $\exp(D)$ l'est aussi, d'où $\exp(A)$ est diagonalisable dans

$M_p(\mathbb{K})$ car semblable dans $M_p(\mathbb{K})$ à une matrice diagonale.

2. (a) On rappelle que l'ensemble $T_p^+(\mathbb{K}) = \{(t_{i,j})_{1\leq i,j\leq p} \in M_p(\mathbb{K}) \mid \forall\, 1 \leq j < i \leq p,\ t_{i,j} = 0\}$ des matrices triangulaires supérieures est une sous-algèbre de $M_p(\mathbb{K})$.

On suppose $A \in T_p^+(\mathbb{K})$.

Comme $T_p^+(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $M_p(\mathbb{K})$ et que $A \in T_p^+(\mathbb{K})$, on a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k \in T_p^+(\mathbb{K}).$$

Or $T_p^+(\mathbb{K})$ est un fermé de $M_p(\mathbb{K})$ comme sous-espace vectoriel de $M_p(\mathbb{K})$ qui est de dimension finie, donc d'après la caractérisation séquentielle des fermés, $\exp(A) \in T_p^+(\mathbb{K})$.

Malheureusement, ce joli raisonnement ne nous dit rien des coefficients diagonaux !

On doit donc mettre les mains dans le cambouis (on ne va le faire que pour les coefficients diagonaux mais on aurait également pu traiter la nullité des coefficients sous-diagonaux de façon analogue si on n'avait pas fait notre raisonnement ci-dessus !). Notons :

— $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum \frac{A^n}{n!}$ ;

— pour $n \in \mathbb{N}$, $s(n)_{i,j}$ les coefficients de la matrice $S_n$.

On remarque tout d'abord que, pour $U = (u_{i,j}), V = (v_{i,j}) \in T_p^+(\mathbb{K})$, les coefficients diagonaux de $UV = (t_{i,j})$ sont le produit des coefficients diagonaux de $U$ et $V$ ; en effet, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ :

$$t_{i,i} = \sum_{k=1}^{p} u_{i,k}v_{k,i} = \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{u_{i,k}}_{=0} v_{k,i} + u_{i,i}v_{i,i} + \sum_{k=i+1}^{p} u_{i,k} \underbrace{v_{k,i}}_{=0} = u_{i,i}v_{i,i}.$$

Par suite, par récurrence, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les coefficients diagonaux de $A^n$ sont ceux de $A$ à la puissance $n$.

Soit $i \in [\![1,p]\!]$. Comme $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$, on obtient alors :

$$s(n)_{i,i} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{i,i}^k}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{a_{i,i}}$$

Or, d'après la proposition 5, $s(n)_{i,i}$ tend vers $s_{i,i}$ (coefficient diagonal de $\exp(A) = (s_{i,j})$), donc, par unicité de la limite, $s_{i,i} = e^{a_{i,i}}$.

(b) Comme toute matrice de $M_p(\mathbb{C})$ est trigonalisable, le résultat est vrai pour $A \in M_p(\mathbb{C})$ ; on s'intéresse alors au cas $A \in M_p(\mathbb{R})$ trigonalisable (même si les arguments fonctionnent dans $\mathbb{C}$ également !). Si $A = PTP^{-1}$ avec $P \in GL_p(\mathbb{K})$ et $T \in T_p^+(\mathbb{K})$, alors, d'après la proposition 14, $\exp(A) = P\exp(T)P^{-1}$. Or, comme $T$ est triangulaire supérieure, d'après la question précédente, $\exp(T)$ l'est aussi, d'où $\exp(A)$ est trigonalisable dans $M_p(\mathbb{K})$ car semblable dans $M_p(\mathbb{K})$ à une matrice triangulaire supérieure à coefficients dans $\mathbb{K}$ (l'exponentielle d'une matrice réelle est à coefficients réels).

(c) Comme $A \in M_p(\mathbb{K}) \subset M_p(\mathbb{C})$, $A$ est trigonalisable dans $M_p(\mathbb{C})$ i.e. $A = PTP^{-1}$ avec $P \in GL_p(\mathbb{K})$ et $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \in T_p^+(\mathbb{K})$ où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ sont les valeurs propres (non nécessairement distinctes) de $A$.

D'après la question 2.c), on a $\exp(T) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$ et donc, d'après la proposition 14, on obtient :

$$\exp(A) = P\exp(T)P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Par suite, les valeurs propres dans $\mathbb{C}$ de $\exp(A)$ sont $e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n}$ d'où $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A))$ ; et de plus, comme $\exp(A)$ et $\exp(T)$ sont semblables ainsi que $A$ et $T$, on a :

$$\det(\exp(A)) = \det(\exp(T)) = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i} = e^{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} = e^{\mathrm{Tr}(T)} = e^{\mathrm{Tr}(A)}.$$