Chapitre IX

Séries entières

Table des matières

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désignent, sauf mention contraire, des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Partie A
Définitions et généralités sur les séries entières

1. Séries entières

Définition 1. *Série entière*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. On appelle **série entière** associée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la série de fonction $\sum f_n$ où, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est définie par :

$$f_n : z \mapsto a_n z^n.$$

On notera (abusivement) $\sum a_n z^n$ la série entière associée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 1.

On connaît déjà plusieurs séries entières :
- la série géométrique $\sum z^n$;
- la série de somme exponentielle $\sum \frac{z^n}{n!}$.

Exercice 1.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Montrer que $\sum a_n z^{2n}$ est une série entière.

Correction.

Attention ! Il y a un piège ! $\sum a_n z^{2n}$ est bien une série entière : il s'agit de la série entière $\sum b_n z^n$ où, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} b_n = a_{n/2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ b_n = 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Définition 2. *Somme et domaine de convergence*

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.
- On note D et $D_{\mathbb{R}}$ et on appelle respectivement **domaine de convergence** et **domaine**

réel de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ les ensembles :

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid \sum a_n z^n \text{ converge }\} \text{ et } D_{\mathbb{R}} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sum a_n x^n \text{ converge }\}.$$

— On appelle **somme de la série entière** $\sum a_n z^n$ la fonction somme $S : D \to \mathbb{C}$ de la série, i.e.

$$S : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Remarque 1.

Par définition, le domaine de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$ coïncide avec le domaine de définition de sa somme S. Ainsi, comme on l'a vu dans le Chapitre séries de fonctions, le domaine de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est le plus grand ensemble sur lequel la série de fonctions $\sum a_n z^n$ converge simplement.

Question 1.

Que dire de la somme d'une série entière associée à une suite stationnaire en 0 ?

Réponse.

Réponse : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite stationnaire en 0 ; on note $N = \min_{n\in\mathbb{N}}(a_n = 0)$ et $P = \sum_{n=0}^{N-1} a_n X^n \in \mathbb{C}[X]$. Alors la série $\sum a_n z^n$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$. En effet, la suite des sommes partielles est stationnaire en $\sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n = P(z)$. De plus, pour la même raison, la somme S de la série entière est :

$$S : z \mapsto P(z).$$

On peut donc conclure que la somme d'une série entière associée à une suite stationnaire en 0 est une fonction polynomiale !

2. Rayon de convergence

a. Lemme d'Abel

Théorème 1. *Lemme d'Abel*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $z_0 \in \mathbb{C}^*$. Si la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Démonstration.

On suppose que suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Alors il existe $M > 0$ tel que $|a_n z_0^n| \leq M$.
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n|.\left(\frac{z}{z_0}\right)^n \leq M\left(\frac{z}{z_0}\right)^n,$$

qui est le terme général d'une série géométrique de raison strictement inférieure à 1 car $|z| < |z_0|$.
Par suite, $\sum |a_n z^n|$ est convergente. □

b. Définition et propriétés du rayon de convergence

Lemme 1.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. L'ensemble $\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (|a_n|r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$ est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

Démonstration.

On note $I = \{r \in \mathbb{R}_+ \mid (|a_n|r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$. Alors I contient 0 car $(|a_n|0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. De plus, si $r \in I$, alors, pour tout $s \in [0, r]$, $s \in I$ car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n|s^n \leq |a_n|r^n$; donc $(|a_n|s^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Il en résulte que I est un intervalle de la forme $[0, a)$. □

Ce lemme justifie la définition suivante :

Définition 3. *Rayon de convergence*

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

i) On appelle **rayon de convergence** et on note R la borne supérieure de l'intervalle $I = \{r \in \mathbb{R}_+ \mid (|a_n|r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$ i.e.

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (|a_n|r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}.$$

on convient que $R = +\infty$ si l'intervalle I n'est pas majoré.

ii) On appelle **disque ouvert de convergence** de la série entière $\sum a_n z^n$ l'ensemble $\mathbb{D}(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$.

iii) Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$, On appelle **intervalle ouvert de convergence** de la série entière $\sum a_n x^n$ l'intervalle $]-R, R[$.

Proposition 1.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, R son rayon de convergence et $z \in \mathbb{C}$.

— Si $|z| < R$, alors la série numérique $\sum a_n z^n$ converge absolument.

— Si $|z| > R$, alors la série numérique $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

Démonstration.

— On suppose $|z| < R$. Comme $R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (|a_n|r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$, alors il existe $r_0 \in \{r \in \mathbb{R}_+ \mid (|a_n|r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$ tel que $|z| < r_0 < R$.
Par conséquent, la suite $(a_n r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, d'après le lemme d'Abel, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

— On suppose $|z| > R$. Alors la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée et donc ne converge pas vers 0. Ainsi, la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

□

Remarque 2.

Si $|z| = R$, on ne peut, a priori, rien dire ! Il faut étudier la série dans ce cas.

Proposition 2.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, R son rayon de convergence et D son domaine de convergence. Alors on a :

$$\mathbb{D}(0,R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\} \subset D \subset \overline{\mathbb{D}}(0,R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}.$$

Démonstration.

- Si $z \in \mathbb{D}(0,R)$ alors $|z| < R$. Par suite, d'après la proposition précédente, $\sum a_n z^n$ converge absolument et donc converge. D'où $z \in D$.
Il en résulte que $\mathbb{D}(0,R) \subset D$.
- Si $z \notin \overline{\mathbb{D}}(0,R)$ alors $|z| > R$. Par suite, d'après la proposition précédente, $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement. D'où $z \notin D$.
Ainsi $\overline{D}(0,R)^c \subset D^c$ et donc $D \subset \overline{D}(0,R)$.

□

Exemple 2.

— Pour la série entière $\sum z^n$, le rayon de convergence est 1 et son domaine de convergence est $D = \mathbb{D}(0,1)$.

> On a
> $$\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\} = [0,1].$$
> Donc le rayon de convergence R de $\sum z^n$ est :
> $$R = \sup[0,1] = 1.$$
> De plus, si $|z| = 1$, $|z^n| = |z|^n = 1 \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$, donc $\sum z^n$ diverge grossièrement.
>
> Il en résulte que $D = \mathbb{D}(0,1)$.

— Pour la série entière $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2} z^n$, le rayon de convergence est 1 et son domaine de convergence est $D = \overline{\mathbb{D}}(0, 1)$.

> On a
> $$\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (\frac{1}{n^2} r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\} = [0, 1].$$
> Donc le rayon de convergence R de $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2} z^n$ est :
> $$R = \sup[0, 1] = 1.$$
> De plus, si $|z| = 1$, $|\frac{1}{n^2} z^n| = \frac{1}{n^2}$ donc, d'après le critère de Riemann, $\sum \frac{z^n}{n^2}$ converge absolument.
> Il en résulte que $D = \overline{\mathbb{D}}(0, 1)$.

Exercice 2.

Déterminer le rayon de convergence et le domaine de convergence des séries entières $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ et $\sum n!z^n$.

Correction.

1. On a
$$\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (\frac{1}{n!} r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\} = [0, +\infty[.$$
car, pour tout $r \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{n!} r^n$ est le terme général d'une série convergente - donc converge vers 0 et donc est une suite bornée.
Ainsi le rayon de convergence R de $\sum \dfrac{1}{n!} z^n$ est :
$$R = +\infty.$$
Il en résulte que $D = \mathbb{C}$.

2. On a
$$\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (n!r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\} = \{0\}.$$
En effet, pour $0 < r < 1$, à partir du rang $N = E(r) + 1$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $n \geq N$, $n!r^n \geq Cn \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ (on peut prendre $C = (N-1)!r^N$)) donc pour tout $r > 0$, la suite $(n!r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée (le cas $r \geq 1$ est immédiat - *le faire quand même pour vérifier que c'est bien immédiat !*).
Donc le rayon de convergence R de $\sum n!z^n$ est :
$$R = \sup\{0\} = 0.$$
Il en résulte que $D = \{0\}$.

3. Calcul du rayon de convergence d'une série entière

a. Caractérisation du rayon de convergence

Proposition 3.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et R son rayon de convergence. Alors on a les égalités suivantes :
- $R = \sup\{\, |z| \mid (a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$;
- $R = \sup\{\, |z| \mid (a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}\}$;
- $R = \sup\left\{\, |z| \mid \sum a_n z^n \text{ converge}\right\}$;
- $R = \sup\left\{\, |z| \mid \sum a_n z^n \text{ converge absolument}\right\}$.

Démonstration.

On considère les ensembles suivants :
- $I_1 = \{\, |z| \mid (a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$;
- $I_2 = \{\, |z| \mid (a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}\}$;
- $I_3 = \left\{\, |z| \mid \sum a_n z^n \text{ converge}\right\}$;
- $I_4 = \left\{\, |z| \mid \sum a_n z^n \text{ converge absolument}\right\}$.

Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^n$, on a :

$$\sum u_n \text{ converge absolument} \Rightarrow \sum u_n \text{ converge} \Rightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} \Rightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée.}$$

Par suite, on a la chaîne d'inclusion :

$$I_4 \subset I_3 \subset I_2 \subset I_1.$$

De plus, on remarque que $I_1 = \{r \in \mathbb{R}_+ \mid (|a_n| r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$, donc, d'après le lemme 1, I_1 est un intervalle non vide de $\mathbb{R}_+$ qui contient 0 et par définition du rayon de convergence, $R = \sup I_1$ (potentiellement $= +\infty$). Ainsi, on a $I_1 = [0, R[$ ou $I_1 = [0, R]$.
Comme $0 \in I_4$, I_4 est une partie non vide de $\mathbb{R}_+$ et donc il possède une borne supérieure R' (potentiellement $+\infty$ si I_4 n'est pas majorée). Ainsi, comme $I_4 \subset I_1$, on a $R' \leq R$.
Réciproquement : soit $r \in [0, R[$. Alors, d'après la proposition 1, la série $\sum a_n r^n$ converge absolument, donc r appartient à I_4 et donc $r \leq R'$. Par suite, R' est un majorant de $[0, R[$ d'où $R \leq R'$.
Il en résulte que $R' = R$.
Remarque : les inégalités précédentes ne pas rigoureuses dans le cas $R = +\infty$, mais la preuve reste analogue dans ce cas.
Ainsi, en utilisant la chaîne d'inclusion précédente, on obtient :

$$R = \sup I_4 \leq \sup I_3 \leq \sup I_2 \leq \sup I_1 = R.$$

d'où les égalités annoncées. □

Méthode : Minoration et majoration du rayon de convergence

Étant donné une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R et $z_0 \in \mathbb{C}$, on a :

- la minoration $R \geq |z_0|$, si on est dans l'un des cas suivants :
  i) la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ;
  ii) la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ;
  iii) la série $\sum a_n z_0^n$ converge ;
  iv) la série $\sum a_n z_0^n$ converge absolument ;
- la majoration $R \leq |z_0|$, si on est dans l'un des cas suivants :
  i) la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée ;
  ii) la série $\sum a_n z_0^n$ diverge ;
  iii) la série $\sum |a_n z_0^n|$ diverge.

Exercice 3.

1. Déterminer le rayon de convergence de $\sum n z^n$.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^{2n}$ en fonction de celui de $\sum a_n z^n$.

Correction.

1. On remarque tout d'abord que la suite $(n 1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée. Donc, comme $R = \sup\{\,|z| \mid (nz^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$, on a $R \leq 1$.
   Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Si $|z| < 1$, la suite $(n|z|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 par croissances comparées donc comme $R = \sup\{\,|z'| \mid (nz'^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}\}$, on a $R \geq |z|$.
   Ceci étant vrai pour tout z tel que $|z| < 1$, on peut faire tendre $|z|$ vers 1 dans l'inégalité précédente, ce qui donne $R \geq 1$.

   Il en résulte que $R = 1$.

2. Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^{2n}$ et R' celui de $\sum a_n z^n$.
   Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On suppose $|z| < R$. Alors la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et donc la suite $(|a_n|(\sqrt{|z|})^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi. Or, on a $R' = \sup\left\{\,|z'| \mid (a_n z'^{2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\right\}$, donc $R' \geq \sqrt{|z|}$. Ceci étant vrai pour tout z tel que $|z| < R$, on fait tendre $|z|$ vers R et ainsi, par continuité de la fonction racine :
   $$R' \geq \sqrt{R}.$$
   Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On suppose $|z| < R'$. Alors la suite $(a_n z^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et donc la suite $(a_n (z^2)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi. Or, on a $R = \sup\{\,|z'| \mid (a_n z'^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$, donc $R \geq |z^2| = |z|^2$. Ceci étant vrai pour tout z tel que $|z| < R'$, on fait tendre $|z|$ vers R' et ainsi, par continuité de la fonction carrée :
   $$R \geq R'^2.$$
   Il en résulte que $R' = \sqrt{R}$.

b. Comparaison

Proposition 4. *Comparaison des rayons de convergence*

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières et R_a, R_b leurs rayons de convergence respectifs. Alors si, à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$, on a, pour tout $n \geq N$:

i) $|a_n| \leq |b_n|$, alors $R_a \geq R_b$;
ii) $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$;
iii) $a_n = o(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$;
iv) $|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |b_n|$ alors $R_a = R_b$.

Démonstration.

i) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On suppose $|z| < R_b$. Alors la suite $(b_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Comme pour tout $n \geq N$, $|a_n| \leq |b_n|$, on a $|a_n z^n| \leq |b_n z^n|$ donc la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Or, on a $R_a = \sup\{\, |z'| \mid (a_n z'^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$, donc $R_a \geq |z|$. Ceci étant vrai pour tout z tel que $|z| < R_b$, on fait tendre $|z|$ vers R_b et ainsi :
$$R_a \geq R_b.$$

ii) On suppose $a_n = O(b_n)$. Alors il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq M|b_n|$. On adpate alors la preuve précédente en remarquant que, pour un certain $z \in \mathbb{C}$, si $(b_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors $(M b_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi.

iii) Si $a_n = o(b_n)$, alors $a_n = O(b_n)$ d'où $R_a \geq R_b$;

iv) On remarque que $|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |b_n|$ implique $a_n = O(b_n)$ et $b_n = O(a_n)$. En effet, par définition, $|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |b_n| \Leftrightarrow a_n = b_n + o(b_n) = O(b_n) + O(b_n) = O(b_n)$.

$\square$

Exercice 4.

1. Déterminer les rayons de convergence de $\sum \dfrac{2^n(1+5^n n^2)}{10^n(n+\sqrt{3n+1})} z^n$ et de $\sum \dfrac{\sin(\frac{n}{3^n})}{n+1} z^n$.
2. Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1} d(n) z^n$ où, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $d(n) = \#\{d \in [\![1, n]\!] \mid d|n\}$.

Correction.

1. On a :
$$\frac{2^n(1+5^n n^2)}{10^n(n+\sqrt{3n+1})} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$$
Or on a prouvé précédemment que $\sum n z^n$ a pour rayon de convergence 1 donc, par comparaison, le rayon de convergence de $\sum \dfrac{2^n(1+5^n n^2)}{10^n(n+\sqrt{3n+1})} z^n$ est égal à 1.

Comme $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, on a :

$$\frac{\sin(\frac{n}{3^n})}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3^n}$$

Or le rayon de convergence de $\sum \frac{1}{3^n} z^n$ est égal à 3 : en effet, pour $z \in \mathbb{C}$, la suite $((\frac{z}{3})^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si, et seulement si $|z| \leq 3$. Ainsi, par comparaison, le rayon de convergence de $\sum \frac{\sin(\frac{n}{3^n})}{n+1} z^n$ est égal à 3.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on remarque que $1 \leq d(n) \leq n$. Or les rayons de convergence de $\sum z^n$ et de $\sum nz^n$ sont tous deux égaux à 1, d'où, si on note R le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1} d(n)z^n$, on obtient $1 \geq R \geq 1$ et ainsi $R = 1$

c. Utilisation de la règle de D'Alembert

Théorème 2. *Règle de D'Alembert pour les séries entières*

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R telle que, à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$, pour tout $n \geq N$, $a_n \neq 0$. S'il existe $\ell \in [0, +\infty[\cup\{+\infty\}$ tel que :

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell,$$

alors on a :

$$R = \frac{1}{\ell} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \ell = 0; \\ \frac{1}{\ell} & \text{si } \ell \in]0, +\infty[; \\ 0 & \text{si } \ell = +\infty. \end{cases}$$

Démonstration.

Soit $z \in \mathbb{C}$. On applique le critère de D'Alembert à la série de terme général $u_n = |a_n z^n|$. Alors on a, pour tout $n \geq N$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.|z|.$$

Par suite, si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ où :

— $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell|z|$. Ainsi, d'après le critère de D'Alembert, si $|z| < \frac{1}{\ell}$, $\sum u_n$ converge et si $|z| > \frac{1}{\ell}$, $\sum u_n$ diverge. Par suite, $R = \frac{1}{\ell}$.

— $\ell = +\infty$, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Ainsi, d'après le critère de D'Alembert, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\sum u_n$ diverge donc $R = 0$.

— $\ell = 0$, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ainsi, d'après le critère de D'Alembert, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\sum u_n$ converge. Par suite, $R = +\infty$.

□

Remarque 3.

Attention le critère précédent n'est valable que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est différente de 0 à partir d'un certain rang !

Ainsi, pour une série entière du type $\sum a_n z^{\varphi(n)}$ avec $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, on appliquera directement la règle de D'Alembert sur la série (tout court) $\sum a_n z^{\varphi(n)}$ i.e. on étudie la limite de

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{\varphi(n+1)}}{a_n z^{\varphi(n)}}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.|z^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}|,$$

en fonction des valeurs de $z \in \mathbb{C}^*$ afin de majorer et minorer le rayon de convergence de la série entière.

Exercice 5.

1. Déterminer les rayons de convergence des séries entières

$$\sum_{n\geq 1} n^\alpha z^n \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}; \quad \sum \frac{n^n}{n!}z^n; \quad \sum \binom{4n}{2n+1} z^n;$$

$$\sum_{n\geq n_0} \frac{P(n)}{Q(n)} z^n \text{ où } P, Q \in \mathbb{K}[X].$$

2. Déterminer les rayons de convergence des séries entières :

$$\sum n! z^{2n} \qquad \sum n! z^{n^2} \qquad \sum n^n z^{\binom{3n}{n}}.$$

Correction.

1. Pour cette question, on remarque que les séries entières ne sont pas lacunaires et que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associées sont non nuls (à partir d'un certain rang). On peut donc appliquer le critère de D'Alembert pour les séries entières :
   - Ici, $a_n = n^\alpha$ pour $n \geq 1$ et $a_0 = 0$. Ainsi, à partir du rang 1, on a, par continuité de la fonction $x \mapsto x^\alpha$ en 1 :
   $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1^\alpha = 1$$
   Ainsi, le rayon de convergence R de $\sum_{n\geq 1} n^\alpha z^n$ est $R = \frac{1}{1} = 1$.
   - Ici, $a_n = \frac{n^n}{n!}$ pour $n \geq 0$. Ainsi, comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(1+\frac{x}{n})^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^x$, on a :
   $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^1 = e$$
   Ainsi, le rayon de convergence R de $\sum \frac{n^n}{n!} z^n$ est $R = \frac{1}{e}$.
   - Ici, $a_n = \binom{4n}{2n+1}$ pour $n \geq 0$. Ainsi, on a :
   $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)(2n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4^4n^4n^4}{2^4n^4} = 2^4 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2^4 = 16$$

Ainsi, le rayon de convergence R de $\sum \binom{4n}{2n+1} z^n$ est $R = \frac{1}{16}$.

— On suppose que P, Q sont des polynômes non nuls. Ici, $a_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$ pour $n \geq n_0$ où $n_0 = E(\max\{x \in \mathbb{R}_+ \mid Q(x) = 0\}) + 1$ si Q admet des racines réelles positives et $n_0 = 0$ sinon *(pour s'assurer qu'on ne divise par par 0 ; dans le cas où Q possède des racines positives, ce "max" existe bien car Q étant un polynôme non nul, l'ensemble de ses racines est fini)* et $a_n = 0$ pour tout $n < n_0$.
On va cette fois utiliser une comparaison avec la première série entière de la question pour déterminer le rayon de convergence :

Comme P, Q sont non nuls, il existe $p, q \in \mathbb{N}$ et des coefficients $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{K}$ tels que $P = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i X^i$ et $Q = \sum_{i=0}^{p} \beta_i X^i$ avec $\alpha_p \neq 0$ et $\beta_q \neq 0$. Par suite, on a, pour tout $n \geq n_0$:

$$\frac{P(n)}{Q(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha_p n^p}{\beta_q n^q} = \frac{\alpha_p}{\beta_q} n^{p-q}$$

Or, pour $\alpha = p - q \in \mathbb{R}$, la série entière $\sum_{n\geq 1} n^\alpha z^n$ possède un rayon de convergence égal à 1, donc, par comparaison, le rayon de convergence de $\sum_{n\geq n_0} \frac{P(n)}{Q(n)} z^n$ est égal à 1.

2. Les séries entières de cette question sont lacunaires, on ne peut donc pas appliquer le critère de D'Alembert pour les séries entières. On se rabat donc sur le critère de D'Alembert... tout court !

— Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = |n! z^{2n}| = n!|z|^{2n} > 0$. On peut donc appliquer la règle de D'Alembert à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = (n+1)|z|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty\text{"} > 1\text{"}$$

Ainsi, d'après la règle de D'Alembert, $\sum u_n$ diverge.
Par suite, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\sum n! z^n$ ne converge pas absolument. Or le rayon R de la série entière vérifie $R = \sup\{|z| \mid \sum n! z^n \text{ converge absolument}\}$, donc $R = 0$.

— Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = |n! z^{n^2}| = n!|z|^{n^2} > 0$. On peut donc appliquer la règle de D'Alembert à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = (n+1)|z|^{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} +\infty\text{"} > 1\text{"} & \text{si } |z| \geq 1 \\ 0 < 1 & \text{si } |z| < 1 \end{cases}$$

Donc, d'après la règle de D'Alembert, la série numérique $\sum n! z^{n^2}$ converge absolument si, et seulement si, $|z| < 1$.
Il en résulte que $R = 1$ car $R = \sup\{|z| \mid \sum n! z^{n^2} \text{ converge absolument}\}$.

— Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = |n^n z^{\binom{3n}{n}}| = n^n |z|^{\binom{3n}{n}} > 0$. On peut donc appliquer la règle de D'Alembert à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On remarque que, comme $n \leq E(\frac{3n}{2})$, on a $\binom{3n}{1} \leq \binom{3n}{n}$ et donc :

$$\binom{3n+3}{n+1} - \binom{3n}{n} = \binom{3n}{n} \left(3 \underbrace{\frac{(3n+2)(3n+1)}{(2n+2)(2n+1)}}_{\geq 1} - 1 \right) \geq \binom{3n}{1} \times 2 = 6n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

et ainsi,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = (n+1)\left(\frac{n+1}{n}\right)^n |z|^{\binom{3n+3}{n+1}-\binom{3n}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} +\infty\text{"} > 1\text{"} & \text{si } |z| \geq 1 \\ 0 < 1 & \text{si } |z| < 1 \end{cases}$$

Donc, d'après la règle de D'Alembert, la série numérique $\sum n^n z^{\binom{3n}{n}}$ converge absolument si, et seulement si, $|z| < 1$.
Il en résulte que $R = 1$ car $R = \sup\{|z| \mid \sum n^n z^{\binom{3n}{n}} \text{ converge absolument}\}$.

Exercice 6. *Apparté : Transformée d'Abel*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. On considère les séries $\sum a_n b_n$ et $\sum a_n$. On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de ses sommes partielles de $\sum a_n b_n$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ celle de $\sum a_n$.

1. Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$S_N = A_N b_N - \sum_{n=0}^{N-1} A_n(b_{n+1} - b_n).$$

   Cette identité est appelée *transformée d'Abel* des sommes partielles de la série $\sum a_n b_n$.

2. En déduire le *critère d'Abel* : si
   - $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ;
   - $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et
   - $\sum(b_{n+1} - b_n)$ est absolument convergente,

   alors la série $\sum a_n b_n$ converge.

3. Montrer le critère des séries alternées en utilisant le critère d'Abel.

Correction.

1. On pose $S_{-1} = 0$ et $A_{-1} = 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$ On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n =$

$A_n - A_{n-1}$, d'où on obtient :

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=0}^{N} a_n b_n \\ &= \sum_{n=0}^{N} A_n b_n - \sum_{n=0}^{N} A_{n-1} b_n \\ &= \sum_{n=0}^{N} A_n b_n - \sum_{n=-1}^{N-1} A_n b_{n+1} \\ &= A_N b_N + \sum_{n=0}^{N-1} A_n (b_n - b_{n+1}) - A_{-1} b_0 \\ &= A_N b_N - \sum_{n=0}^{N-1} A_n (b_{n+1} - b_n). \end{aligned}$$

Remarque : la transformation d'Abel est l'analogue pour les suites de l'intégration par parties pour les fonctions de la variable réelle ; en effet,
— *prendre la somme partielle de la série associée à une suite est l'analogue de la primitivation pour une fonction,*
— *prendre la différence de deux termes successifs d'une suite est l'analogue de la dérivation pour une fonction.*

2. Supposons les hypothèses vérifiées. Comme $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|A_n| \leq M$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   — $|A_n b_n| \leq M|b_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$; donc la suite $(A_N b_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge (vers 0) ;
   — $|A_n(b_{n+1} - b_n)| \leq M|b_{n+1} - b_n|$ qui est le terme général d'une série convergente donc, par comparaison, $\sum A_n(b_{n+1} - b_n)$ converge absolument et donc converge. Ainsi, la suite $(\sum_{n=0}^{N-1} A_n(b_{n+1} - b_n))_{N\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de cette série converge.

   Par suite, par transformation d'Abel des sommes partielles S_N pour $N \in \mathbb{N}$ (question 1), la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ s'écrit comme combinaison linéaire de suites convergentes et donc converge. Il en résulte que la série $\sum a_n b_n = (S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs qui converge vers 0. Montrons que la série $\sum(-1)^n u_n$ converge.

   On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-1)^n$, $b_n = u_n$ et $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Alors :
   - On a, pour $n \in \mathbb{N}$,
   $$A_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \frac{1 - (-1)^{n+1}}{2} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$
   donc $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par 1.
   - $b_n = u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   - Pour $n \in \mathbb{N}$, $|b_{n+1} - b_n| = u_n - u_{n+1}$ car la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Par suite, la série $\sum |b_{n+1} - b_n| = \sum(u_n - u_{n+1})$ est télescopique et donc convergente car de même nature que la suite convergente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ainsi, $\sum(b_{n+1} - b_n)$ converge absolument.

   Par suite, d'après le critère d'Abel, la série $\sum(-1)^n u_n = \sum a_n b_n$ converge.
   Nous avons donc (re)démontré le critère des séries alternées.

Exercice 7. *Étude d'une série entière sur la frontière du disque*

On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$.

1. Montrer que son rayon de convergence est 1. Que dire de la convergence en $z = 1$?
2. Soit $z_0 \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$. En utilisant le critère d'Abel (exercice 6), montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{z_0^n}{n}$ converge.
3. En déduire le domaine de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$.

Correction.

1. On note R le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \frac{1}{n} > 0$. Alors

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1,$$

donc $R = \frac{1}{1} = 1$ d'après la règle de D'Alembert pour les séries entières.

Évaluer en $z = 1$, on obtient la série harmonique $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ qui est divergente.

2. On reprend les notations de l'exercice 6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = z_0^n$, $b_n = \frac{1}{n}$ et $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Alors :
   - Comme $|z_0| = 1$, on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|A_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} z_0^k\right| = \frac{|1 - z_0^{n+1}|}{|1 - z_0|} \leq \frac{1 + |z_0|^{n+1}}{|1 - z_0|} = \frac{2}{|1 - z_0|}$$

   donc $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par $\frac{2}{|1-z_0|}$.
   - $b_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$
   - Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $|b_{n+1} - b_n| = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Par suite, la série $\sum_{n\geq 1} |b_{n+1} - b_n| = \sum_{n\geq 1}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$ est télescopique et donc convergente car de même nature que la suite convergente $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$. Ainsi, $\sum_{n\geq 1}(b_{n+1} - b_n)$ converge absolument.

   Par suite, d'après le critère d'Abel (exercice 6 question 2.), la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{z_0^n}{n}$ converge.

3. On note D le domaine de convergence de la série entière. Comme $R = 1$, on a

$$\mathbb{D}(0,1) \subset D \subset \overline{\mathbb{D}(0,1)}$$

De plus, pour $z \in \mathbb{U}$, on a, d'après les questions 1 et 2, $z \in D$ si, et seulement si, $z \neq 1$. Par suite, $D = \overline{\mathbb{D}(0,1)} \setminus \{1\}$.

Partie B

Propriétés des séries entières

1. Opérations sur les séries entières

a. Combinaisons linéaires

Proposition 5. *Produit par un scalaire*

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Alors $\sum \lambda a_n z^n$ et $\sum a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

Démonstration.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Comme $\lambda \neq 0$, la suite $(\lambda a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si, et seulement si, $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Il en résulte que $\sum \lambda a_n z^n$ et $\sum a_n z^n$ ont même rayon de convergence. $\square$

Proposition 6. *Somme*

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières et R_a, R_b leurs rayons de convergence respectifs. Alors le rayon de convergence R de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie :

- si $R_a \neq R_b$, $R = \min(R_a, R_b)$
- si $R_a = R_b$, $R \geq R_a (= R_b)$.

Démonstration.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites bornées, alors la suite $((a_n + b_n) z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc $|z| \leq R$. Ceci étant vrai pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$, on obtient :

$$R \geq \min(R_a, R_b).$$

Supposons que $R_a \neq R_b$. Quitte à échanger R_a et R_b, on suppose que $R_a < R_b$.
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $R_a < |z| < R_b$. Alors la suite $((a_n + b_n) z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée car $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée et $(b_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

> *Remarque :* pour démontrer le fait précédent, on peut utiliser la contraposée de l'assertion : "si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées, alors $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Ainsi, on a $|z| \geq R$. Ceci étant vrai pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $\mathbf{R_a} < |\mathbf{z}| < R_b$, on obtient $\min(R_a, R_b) = R_a \geq R$.

Il en résulte que, si $R_a \neq R_b$,
$$R = \min(R_a, R_b).$$
□

Proposition 7. *Somme d'une combinaison linéaire de séries entières*

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières de rayon de convergence respectifs R_a, R_b et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. On pose $R = \min(R_a, R_b)$. Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, on a :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

Démonstration.

Les séries entières $\sum \lambda a_n z^n$ et $\sum \mu b_n z^n$ sont de rayons de convergences supérieurs à respectivement R_a et R_b (égaux si $\lambda, \mu \neq 0$ (proposition 5) et $+\infty$ sinon) donc, d'après la proposition 6, la série entière $\sum(\lambda a_n + \mu b_n) z^n$ est de rayon de convergence supérieur à $R = \min(R_a, R_b)$. Par suite, pour tout $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $|\omega| < R$, ω appartient au disque ouvert de convergence de la série entière $\sum(\lambda a_n + \mu b_n) z^n$ et donc, d'après la proposition 1, $\sum(\lambda a_n + \mu b_n)\omega^n$ converge absolument et donc converge ; de plus, comme $|\omega| < R \leq R_a$, et $|\omega| < R \leq R_b$, par un raisonnement similaire, les séries numériques $\sum a_n \omega^n$ et $\sum b_n \omega^n$ convergent.
Ainsi, par linéarité de la somme d'une série, on obtient, pour tout $\omega \in \mathbb{C}$ avec $|\omega| < R$:
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) \omega^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \omega^n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \omega^n.$$
□

Exercice 8.

Déterminer les rayons de convergence et la somme dans le disque ouvert de convergence des séries entières suivantes :
$$\sum \mathrm{ch}(n) z^n \qquad \sum \sin(n\theta) z^n \quad (\text{où } \theta \in \mathbb{R}).$$

Correction.

1. On a, par définition, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
La série entière $\sum e^n z^n$ a pour rayon de convergence $\frac{1}{e}$ et la série entière $\sum e^{-n} z^n$ a pour rayon de convergence e donc la série entière $\sum \mathrm{ch}(n) z^n$ a pour rayon de convergence $R = \min(\frac{1}{e}, e) = \frac{1}{e}$ et on a, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \frac{1}{e}$:
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{ch}(n) z^n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} e^n z^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} z^n = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - ez} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{z}{e}}.$$

2. On a, par définition, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$.
Les séries entières $\sum e^{in\theta} z^n$ et $\sum e^{-in\theta} z^n$ ont pour rayons de convergence 1 donc la série entière $\sum \sin(n\theta) z^n$ a pour rayon de convergence $R \geq 1$ et on a, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$:
$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(n\theta) z^n &= \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{in\theta} z^n - \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-in\theta} z^n \\ &= \frac{1}{2i} \frac{1}{1 - e^{i\theta} z} - \frac{1}{2i} \frac{1}{1 - e^{-i\theta} z} \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(n\theta) z^n &= \frac{\sin(\theta) z}{1 - 2\cos(\theta) z + z^2}. \end{aligned}$$
Maintenant, déterminons exactement le rayon de convergence R de $\sum \sin(n\theta) z^n$.
Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors $\sin(n\theta) = 0$ pout tout $n \in \mathbb{N}$. Donc dans ce cas, $R = +\infty$.
Supposons $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Comme la suite $(\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 alors la suite $(\sin(n\theta)1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas le terme général d'une série convergente et donc $R \leq 1$.
Il en résulte que $R = 1$.

b. Produit de Cauchy

On adapte ici la notion de produit de Cauchy au cas de séries entières :

Définition 4. *Produit de Cauchy de deux séries entières*

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières. On appelle **produit de Cauchy** des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$, la série entière $\sum c_n z^n$ où, pour $n \in \mathbb{N}$,
$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Proposition 8. *Produit de Cauchy*

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières et R_a, R_b leurs rayons de convergence respectifs. Alors le rayon de convergence R du produit de Cauchy $\sum c_n z^n$ des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ vérifie $R \geq \min(R_a, R_b)$ et on a, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$:
$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right).$$

Démonstration.

On rappelle le résultat de Sup' suivant sur le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes :

Soit $\sum A_n$, $\sum B_n$ des séries numériques et on pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $C_n = \sum_{k=0}^{n} A_k B_{n-k}$. Si $\sum A_n$ et $\sum B_n$ convergent absolument, alors $\sum C_n$ converge absolument et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} C_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} A_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} B_n\right).$$

Preuve succincte : Comme $\sum A_n$, $\sum B_n$ converge absolument, les familles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont sommables et donc, d'après le théorème de sommation par paquets appliqués aux partitions $\mathbb{N}^2 = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n$ où $\Delta_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid p+q = n\}$ et $\mathbb{N}^2 = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$ où $H_n = \{(n,m) \in \mathbb{N}^2\}$, la famille $(A_n B_m)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} C_n = \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} A_n B_m = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} A_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} B_n\right).$$

Le résultat précédent reste valable en supposant qu'une des deux séries converge et l'autre converge absolument : il s'agit du théorème de Mertens (voire une preuve de ce théorème dans le chapitre "Séries numériques et vectorielles".

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$, d'après la proposition 1, les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergent absolument. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $A_n = a_n z^n$, $B_n = b_n z_n$ et $C_n = \sum_{k=0}^{n} A_k B_{n-k}$. On remarque alors que, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k b_{n-k} z^{n-k} = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n = c_n z^n.$$

D'après le résultat précédent, la série $\sum C_n = \sum c_n z^n$ converge absolument et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} A_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$$

De plus, comme $\sum c_n z^n$ converge absolument, on a $R \geq |z|$. Ceci étant vrai pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < \min(R_a, R_b)$, on obtient $R \geq \min(R_a, R_b)$. $\square$

Exercice 9.

Déterminer le rayon de convergence et la somme du produit de Cauchy de $\sum z^n$ et $1 - z$. Qu'en conclure ?

Correction.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = 1$; $b_n = 0$ si $n \geq 2$; $b_0 = 1$ et $b_1 = -1$. Alors $\sum a_n z^n = \sum z^n$ et $\sum b_n z^n = 1 - z$. Le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est $R_a = 1$ et celui de $\sum b_n z^n$ est $R_b = +\infty$ donc, d'après la proposition 8, le rayon de convergence R du produit de Cauchy $\sum c_n z^n$ des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ vérifie $R \geq \min(1, +\infty) = 1$ et on a, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right) = \frac{1}{1-z}.(1-z) = 1.$$

De plus, on remarque que $c_0 = a_0 b_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_n.b_0 + a_{n-1} b_1 = 1.1 + 1.(-1) = 0.$$

La suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant stationnaire en 0, le rayon de convergence de $\sum c_n z^n$ est donc $R = +\infty$. On rmarque alors que dans ce cas $R > \min(R_a, R_b)$: le rayon de convergence du produit de Cauchy peut donc "augmenter" par rapport au minimum des rayons des séries entières dont il est issu.

2. Régularité d'une série entière

a. Convergence normale

Théorème 3.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors :

— la série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{D}(0, R)$ ($= \mathbb{C}$ si $R = +\infty$) ;

— la série entière $\sum a_n x^n$ converge normalement sur tout segment de $]-R, R[$ ($= \mathbb{R}$ si $R = +\infty$).

Démonstration.

— Soit $a > 0$ avec $a < R$. Montrons la série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement $\overline{\mathbb{D}}(0, a)$. On note $f_n : z \mapsto a_n z^n$.

On a, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{z \in \overline{\mathbb{D}}(0,a)} (|a_n||z|^n) \leq |a_n| a^n.$$

Or $R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \mid \sum |a_n| r^n \text{ converge}\}$, donc comme $a < R$, $|a_n| a^n$ est le terme général d'une série convergente.

Par suite, pour tout $0 < a < R$, la série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{\mathbb{D}}(0, a)$.

Ainsi, comme tout compact de $\mathbb{D}(0, R)$ est inclus dans un disque $\overline{\mathbb{D}}(0, a)$ avec $a < R$, on a convergence normale de $\sum a_n z^n$ sur tout compact de $\mathbb{D}(0, R)$.

— Soit $a > 0$ avec $a < R$. Montrons la série entière $\sum a_n x^n$ converge normalement $[-a, a]$. On note $f_n : x \mapsto a_n x^n$.

On a, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in [-a,a]} (|a_n||x|^n) \leq |a_n| a^n.$$

Or $R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \mid \sum |a_n| r^n \text{ converge}\}$, donc comme $a < R$, $|a_n|a^n$ est le terme général d'une série convergente.
Par suite, pour tout $0 < a < R$, la série entière $\sum a_n x^n$ converge normalement sur $[-a, a]$.

Ainsi, comme tout segment de $]-R, R[$ est inclus dans un intervalle $[-a, a]$ avec $0 < a < R$, on a convergence normale de $\sum a_n x^n$ sur tout segment $[-R, R]$.

Remarque : on aurait bien-sur pu utiliser le point précédent pour démontrer le cas réel.

□

Remarque 4.

Sur le disque $\mathbb{D}(0, R)$, la convergence n'est pas normale en général : par exemple, les séries entières $\sum z^n$ ou $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$ ne convergent pas normalement sur $\mathbb{D}(0, 1)$.

b. Continuité

Théorème 4.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors sa somme

$$S : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

est continue sur le disque ouvert de convergence $\mathbb{D}(0, R)$.
En particulier, S est continue sur l'intervalle $]-R, R[$.

Démonstration.

— D'après le théorème précédent, la série de fonctions $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{D}(0, R)$ et les fonctions $z \mapsto a_n z^n$ sont continues sur $\mathbb{C}$ et donc sur $\mathbb{D}(0, R)$ car polynomiales.
Ainsi, d'après le théorème de continuité des séries de fonctions, $S : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur $\mathbb{D}(0, \mathbb{R})$.

— *Cas réel :* D'après le théorème précédent, la série de fonctions $\sum a_n x^n$ converge normalement sur tout segment de $]-R, R[$ et les fonctions $z \mapsto a_n x^n$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et donc sur $]-R, R[$ car polynomiales.
Ainsi, d'après le théorème de continuité des séries de fonctions, $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur $]-R, R[$.
Remarque : on aurait bien-sur pu utiliser le point précédent pour démontrer le cas réel.

□

On se pose alors la question de la continuité de la somme d'une série entière de rayon de convergence R aux bornes de l'intervalle $]-R, R[$. Le théorème suivant nous fournit la réponse :

Théorème 5. *Théorème d'Abel radial*

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S. Si $\sum a_n R^n$ converge, alors

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow[x \to R^-]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n,$$

i.e. S est définie et continue à gauche en R.

Démonstration Hors programme.

Quitte à changer la variable x en x/R, on peut supposer que la rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est $R = 1$.
On suppose que $\sum a_n$ converge vers un certain $S \in \mathbb{C}$. Montrons que $S(x) \xrightarrow[x \to 1^-]{} S$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note S_n la somme partielle d'ordre n et R_n le reste d'ordre n de la série (convergente) $\sum a_n$. Rappelons que $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Soit $x \in]-1, 1[$ et $N \in \mathbb{N}$. On note $S_N(x)$ la somme partielle d'ordre N de la série $\sum a_n x^n$.

On s'inspire de la technique utilisée dans l'exercice 6 pour obtenir la transformation d'Abel, en se basant sur l'égalité $a_n = R_{n-1} - R_n$:

$$\begin{aligned}
S_N(x) - S_N &= \sum_{n=1}^{N} \underbrace{a_n}_{=R_{n-1}-R_n} (x^n - 1) \\
&= \sum_{n=1}^{N} R_{n-1}(x^n - 1) - \sum_{n=1}^{N} R_n(x^n - 1) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} R_n(x^{n+1} - 1) - \sum_{n=0}^{N} R_n(x^n - 1) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} R_n(x^{n+1} - x^n) - (x^N - 1)R_N \\
S_N(x) - S_N &= (x-1)\sum_{n=0}^{N-1} R_n x^n + (1 - x^N)R_N
\end{aligned}$$

En passant à la limite quand N tend vers l'infini dans l'égalité précédente, on déduit que $\sum R_n x^n$ converge et on obtient :

$$S(x) - S = (x-1)\sum_{n=0}^{+\infty} R_n x^n.$$

De plus, cela implique que le rayon de convergence de la série entière la série entière $\sum R_n z^n$ est supérieur ou égal à 1 et donc, en particulier, pour tout $x \in]-1, 1[$, $\sum R_n x^n$ converge absolument.

Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|R_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et donc, pour $x \in [0, 1[$,

$$\begin{aligned}
|S(x) - S| &\leq |x-1| \sum_{n=0}^{+\infty} |R_n| x^n \\
&\leq (1-x) \left(\sum_{n=0}^{N-1} |R_n| x^n + \frac{\varepsilon}{2} \underbrace{\sum_{n=N}^{+\infty} x^n}_{= \frac{x^N}{1-x}} \right) \\
&\leq (1-x) \sum_{n=0}^{N-1} |R_n| x^n + \frac{\varepsilon}{2} x^N \\
|S(x) - S| &\leq (1-x) \sum_{n=0}^{N-1} |R_n| x^n + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Or, on a $(1-x) \sum_{n=0}^{N-1} |R_n| x^n \xrightarrow[x \to 1^-]{} 0$, donc il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in [0, 1[$ vérifiant $|x - 1| \leq \delta$, on a :

$$(1-x) \sum_{n=0}^{N-1} |R_n| x^n \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par suite, pour tout $x \in [0, 1[$ tel que $|x - 1| \leq \delta$, on a :

$$|S(x) - S| \leq (1-x) \sum_{n=0}^{N-1} |R_n| x^n + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Il en résulte que $|S(x) - S| \xrightarrow[x \to 1^-]{} 0$. $\square$

Corollaire 1. *Théorème d'Abel radial*

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S. S'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\sum a_n (Re^{i\theta})^n$ converge, alors

$$S(xe^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{in\theta} a_n x^n \xrightarrow[x \to R^-]{} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{in\theta} a_n R^n,$$

En particulier, si $\sum (-1)^n a_n R^n$ converge, alors $S(x) \xrightarrow[x \to -R^+]{} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n R^n$.

Démonstration.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = a_n e^{in\theta}$. Considérons la série entière $\sum b_n z^n$ de somme f. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|b_n| = |a_n|$, $\sum b_n z^n$ est de rayon de convergence R et, par hypothèse, $\sum b_n R^n = \sum a_n (Re^{i\theta})^n$ converge.
Par suite, d'après le théorème d'Abel radial, on a :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \xrightarrow[x \to R^-]{} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n R^n = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{in\theta} a_n R^n.$$

De plus, on a, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{in\theta} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{in\theta} a_n (xe^{i\theta})^n = S(xe^{i\theta}),$$

donc :

$$S(xe^{i\theta}) = f(x) \xrightarrow[x \to R^-]{} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{in\theta} a_n R^n.$$

□

Corollaire 2.

Si $\sum a_n x^n$ est une série entière de la variable réelle, alors sa somme est continue sur l'intervalle de convergence de la série entière.

Démonstration.

On considère une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R et de somme S. D'après le théorème 4, S est continue sur $]-R, R[$. De plus, si S est définie en R (resp. en $-R$), $\sum a_n R^n$ (resp. $\sum (-1)^n a_n R^n$) converge et ainsi S est continue en R (resp. en $-R$) d'après le théorème d'Abel radial.
Il en résulte que S est continue sur son domaine de convergence. □

Remarque 5.

— Attention ! Si la somme S de la série entière $\sum a_n x^n$ admet une limite en R^-, cela n'implique pas que la série $\sum a_n R^n$ converge !
Par exemple, on a $S(x) = \sum_{n=0} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \xrightarrow[x \to 1^-]{} \frac{1}{2}$ et la série $\sum (-1)^n$ diverge.

— Les théorèmes taubériens sont des réciproques partielles du théorème d'Abel radial : voire l'exercice 18

Exercice 10.

1. Montrer que $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ est continue sur $[-1, 1]$.

2. Montrer que $g : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{\ln(n)}$ est continue sur $[-1, 1[$.

Correction.

1. La fonction f est la somme de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ qui est de rayon de convergence 1. Ainsi, f est continue sur $]-1,1[$. De plus, par comparaison à l'intégrale de Riemann convergente $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ $(2 > 1)$, les séries $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ sont absolument convergentes et donc convergentes. Par suite, d'après le théorème d'Abel radial est continue en ± 1 et donc sur $[-1, 1]$.
2. La fonction g est la somme de la série entière $\sum_{n\geq 2} \frac{z^n}{\ln(n)}$ qui est de rayon de convergence 1. Ainsi, g est continue sur $]-1, 1[$. De plus, comme la suite $(\frac{1}{\ln(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0, d'après le critère des séries alternées, la série $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ convergente. Par suite, d'après le théorème d'Abel radial est continue en -1 et donc sur $[-1, 1[$.
Remarque : la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\ln(n)}$ est divergente (car, par exemple, pour $n \geq 2$, $\frac{1}{\ln(n)} \geq \frac{1}{n}$) donc g n'est pas définie en 1 et on peut montrer (voire exercice suivant) que $g(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty$.

Exercice 11.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que la série entière $\sum a_n z^n$ est de rayon de convergence 1. On note S la somme de la série entière. Montrer que si $\sum a_n$ diverge, alors $S(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty$.

Correction.

On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de $\sum a_n$.
On suppose que $\sum a_n$ diverge. Montrons que $S(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty$ i.e. $\forall\ M \in \mathbb{R}_+$, $\exists\ \delta > 0$, $\forall\ x \in]-1, 1[$, $|1-x| \leq \delta$, $S(x) \geq M$.

Soit $M \in \mathbb{R}_+$. La série étant divergente et à terme positifs, on a $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Par suite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $S_N \geq M + 33\,(> M)$.
On pose alors $\delta = 1 - \sqrt[N]{\frac{M}{S_N}}$. Alors $\delta \in]0, 1[$ et donc, pour tout $x \in]-1, 1[$ tel que $|1-x| \leq \delta$, on a $0 < 1-\delta \leq x < 1$, d'où, pour tout $n \leq N$,

$$x^n \geq x^N \geq (1-\delta)^N = \frac{M}{S_N}.$$

et donc :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \geq \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \geq \frac{M}{S_N} \underbrace{\sum_{n=0}^{N} a_n}_{S_N} = M.$$

Il en résulte que $S(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty$.

c. Série entière dérivée

Définition 5. *Série entière dérivée*

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On appelle **série entière dérivée** de $\sum a_n z^n$, la série entière

$$\sum (n+1)a_{n+1}z^n.$$

Lemme 2.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sum a_n z^n$ et la série entière $\sum a_{n+k} z^n$ ont même rayon de convergence.

Démonstration.

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+k}z^n = a_{n+k}z^{n+k}.\frac{1}{z^k}$$

Donc la suite $(a_{n+k}z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si, et seulement si, la suite $(a_{n+k}z^{n+k})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Or cette dernière est bornée si, et seulement si, la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ (car il s'agit de la "même" suite à laquelle on a "ajouté" un nombre fini de terme).
Par suite, $\sum a_n z^n$ et $\sum a_{n+k} z^n$ ont même rayon de convergence. □

Proposition 9.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Alors $\sum a_n z^n$ et sa série entière dérivée $\sum (n+1)a_{n+1}z^n$ ont même rayon de convergence.

Démonstration.

On note R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ et R' celui de $\sum (n+1)a_{n+1}z^n$. D'après le lemme précédent, $\sum (n+1)a_{n+1}z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence R'.
Soit $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $|z| < R'$. Alors la suite $(na_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et donc $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi ; d'où $|z| \leq R$. Ceci étant vrai pour tout z tel que $|z| < R'$, on a $R' \leq R$. Montrons l'inégalité dans l'autre sens :

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $|z| < R$ et $\rho \in \mathbb{R}$ tel que $|z| < \rho < R$. Alors la suite $(a_n \rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, disons par une constante $M \geq 0$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a, comme $0 \leq \frac{|z|}{\rho} < 1$, par croissances comparées :

$$|na_n z^n| = n\left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n \underbrace{|a_n \rho^n|}_{\leq M} \leq Mn\left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Il en résulte que $|z| \leq R'$. Ceci étant vrai pour tout z tel que $|z| < R$, on a $R \leq R'$.
Ainsi, $R' = R$. □

Corollaire 3.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ ont même rayon de convergence.

Démonstration.

Les séries entières $\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{a_{n-1}}{n} z^n$ sont "égales" donc ont le même rayon de convergence.
De plus, la série dérivée de $\sum_{n\geq 1} \frac{a_{n-1}}{n} z^n$ est $\sum_{n\geq 1}(n+1)\frac{a_n}{n+1} z^n = \sum_{n\geq 1} a_n z^n$ donc, d'après la proposition précédente, $\sum_{n\geq 1} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{a_{n-1}}{n} z^n$ ont même rayon de convergence.
Il en résulte que $\sum a_n z^n$ et $\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ ont même rayon de convergence. □

Corollaire 4.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et $k \in \mathbb{Z}$. Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n^k a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Démonstration.

Pour le cas $k \in \mathbb{N}$, on raisonne par récurrence en utilisant la proposition 9 et le lemme 2. Puis, pour le cas négatif, on raisonne de nouveau par récurrence en utilisant le corollaire 3 et le lemme 2. □

Exercice 12.

Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, Les séries entières $\sum a_n z^n$ et la série entière $\sum_{n\geq 1} n^\alpha a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Correction.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $k = \lfloor \alpha \rfloor$. Alors on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^k \leq n^\alpha \leq n^{k+1}$ si $\alpha \geq 0$ et $n^{k+1} \leq n^\alpha \leq n^k$ si $\alpha < 0$. D'après le corollaire 4, $\sum_{n\geq 1} n^k a_n z^n$, $\sum_{n\geq 1} n^{k+1} a_n z^n$ et $\sum a_n z^n$ ont même rayon de convergence, donc par comparaison, $\sum a_n z^n$ et la série entière $\sum_{n\geq 1} n^\alpha a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

3. Dérivée de la somme d'une série entière réelle

Théorème 6. *Dérivation d'une série entière réelle*

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle de rayon de convergence $R > 0$. Alors sa somme f est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et on a, pour $k\in\mathbb{N}$ et pour tout $x\in\,]-R,R[$:

$$f^{(k)}(x)=k!\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}a_nx^{n-k}.$$

En particulier, on a, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Démonstration.

D'après la proposition 9, $\sum_{n\geq1}na_nx^{n-1}=\sum(n+1)a_{n+1}x^n$ a pour rayon de convergence R. Par suite, les séries entières $\sum a_nx^n$ et $\sum_{n\geq1}na_nx^{n-1}$ convergent normalement sur tout segment de $]-R,R[$. On peut alors vérifier les hypothèses du théorème d'interversion dérivation/somme :

- pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n : x\mapsto a_nx^n$ est une fonction polynomiale et donc est de classe C^1 sur $]-R,R[$ et on a, pour tout $x\in\,]-R,R[$:

$$f_n'(x)=\begin{cases}0 & \text{si } n=0\\ na_nx^{n-1} & \text{si } n\geq1\end{cases}$$

- $\sum f_n$ converge simplement sur $]-R,R[$ car $\sum f_n$ converge normalement sur tout segment de $]-R,R[$.
- $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de $]-R,R[$ car $\sum f_n'=\sum_{n\geq1}na_nx^{n-1}$ converge normalement sur tout segment de $]-R,R[$.

Ainsi, d'après le théorème d'interversion dérivation/somme, $f : x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ est de classe C^1 sur $]-R,R[$ et, pour tout $x\in\,]-R,R[$:

$$f'(x)=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}f_n\right)'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}.$$

On obtient alors, par récurrence en utilisant le résultat que l'on vient de démontrer (ou on aurait pu directement utiliser le théorème d'interversion dérivation/somme version C^∞ dès le départ !) que f est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et, pour tout $k\in\mathbb{N}$, pour tout $x\in\,]-R,R[$:

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}x^n=\sum_{n=k}^{+\infty}n(n-1)...(n-k+1)a_nx^{n-k}=k!\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}a_nx^{n-k}.$$

Par suite, on obtient, en évaluant l'égalité précédente en $x=0$:

$$f^{(k)}(0)=a_k.k!$$

D'où, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

□

Exemple 3.

$\sum_{n\geq 1} nx^n$ a pour rayon de convergence 1, et pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

La série entière $\sum_{n\geq 1} nz^n$ a pour de rayon de convergence 1 car elle a le même rayon de convergence que la série entière $\sum z^n$ (Corollaire 4). De plus en appliquant le théorème 6 à la série $\sum z^n$, la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ est de classe C^∞ sur $]-1,1[$ et, comme, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n = nx^{n-1},$$

on a, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} \end{aligned}$$

et on avait, par somme géométrique, $f(x) = \frac{1}{1-x}$; donc :

$$\frac{1}{(1-x)^2} = f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}.$$

On remarque alors que, pour $x \in]-1,1[$, $nx^n = xnx^{n-1}$ pour obtenir :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = xf'(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Exercice 13.

Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} x^n.$$

Montrer que la formule est encore valable pour $z \in \mathbb{D}(0,1)$ à la place de $x \in]-1,1[$.

Correction.

— La série entière $\sum z^n$ est de rayon de convergence 1 donc $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ est de classe C^∞ sur $]-1,1[$ (mais ça, on le sait déjà puisque f coïncide sur $]-1,1[$ avec une fonction bien connue !) et, comme, pour tous $k, n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} x^n = \begin{cases} 0 & \text{si } n < k \\ \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} & \text{si } n \geq k \end{cases}$$

on a, pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1,1[$:

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} x^n \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \\ &= k! \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} \\ f^{(k)}(x) &= k! \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} x^n. \end{aligned}$$

De plus, on remarque que, pour $x \in]-1,1[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ et donc que, pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1,1[$:

$$\frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = f^{(k)}(x) = k! \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} x^n.$$

D'où le résultat annoncé en simplifiant par $k!$.

— Soit $z \in \mathbb{D}(0,1) \setminus \{0\}$. Considérons la série entière $\sum z^n x^n$ de la variable réelle (ici x). Alors la rayon de convergence de cette série entière est $R = \frac{1}{|z|}$. Par suite, la fonction donc $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} z^n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-1,1[$ et on a, pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $x \in]-R,R[$, de manière analogue au calcul précédent :

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \sum_{n=0}^{+\infty} z^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} x^n \\ &= k! \sum_{n=k}^{+\infty} z^n \binom{n}{k} x^{n-k} \\ f^{(k)}(x) &= k! z^k \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} (xz)^n. \end{aligned}$$

De plus, on remarque que, pour tout $x \in]-R,R[$, on a $|zx| < 1$ donc :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (xz)^n = \frac{1}{1-xz}$$

et ainsi, par dérivation successives, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-R,R[$:

$$\frac{k! z^k}{(1-xz)^{k+1}} = f^{(k)}(x) = k! z^k \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} x^n.$$

D'où, en simplifiant par $k! z^k \neq 0$, on obtient :

$$\frac{1}{(1-xz)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} (xz)^n$$

On évalue alors en $x = 1 \in]-R,R[$ (car, comme $|z| < 1$, $R = \frac{1}{|z|} > 1$) et on obtient :

$$\frac{1}{(1-z)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} z^n$$

avec $z \in \mathbb{D}(0,1)$ (la formule étant vraie également pour $z = 0$).

4. Primitive de la somme d'une série entière réelle

Théorème 7. *Primitive d'une série entière réelle*

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle de rayon de convergence $R > 0$, F une primitive sur $]-R,R[$ de sa somme f. Alors, pour tout $t \in]-R,R[$, on a :

$$F(x) = F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Exemple 4.

On a, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

En effet, $\ln(1-x) = -\int_0^x \frac{dt}{1-t}$, d'où

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

D'où on déduit :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2).$$

En effet, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge d'après le critère des séries alternées et donc, d'après le théorème d'Abel radial, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \lim_{x\to -1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\lim_{x\to -1} \ln(1-x) = -\ln(2).$$

Exercice 14.

On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ de somme notée S.

1. Montrer que S est une primitive de $x \mapsto -\dfrac{\ln(1-x)}{x}$ sur $]-1,1[$.
2. En déduire que :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t = -\zeta(2).$$

Correction.

1. La série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{x^{n-1}}{n}$ est de rayon de convergence 1 donc, en notant f sa somme sur $]-1,1[$, on a, pour tout $x \in\,]-1,1[$,

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x \frac{t^{n-1}}{n}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} = S(x)$$

De plus, on a, pour tout $x \in\,]-1,1[\setminus\{0\}$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\frac{\ln(1-x)}{x}.$$

La fonction $x \mapsto -\frac{\ln(1-x)}{x}$ étant de limite 0 en 0, l'intégrale $\int_0^x -\frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge et on a alors, pour tout $x \in\,]-1,1[$:

$$S(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x -\frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Par suite, S est une primitive de $x \mapsto -\frac{\ln(1-x)}{x}$ (prolongé par 0 en 0) sur $]-1,1[$.

2. La série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente car $2 > 1$ donc S est définie et continue en 1 d'après le théorème d'Abel radial. De plus, l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est bien définie car

$x \mapsto -\frac{\ln(1-x)}{x}$ (prolongé par 0 en 0) est continue sur le segment $[0,1]$. Par suite :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to 1^-}\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to 1^-} -S(x) = -S(1) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Exercice 15.

Déterminer une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $x \in\,]-1,1[$,

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

puis en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Correction.

On connaît bien la dérivée de arctan et, par sommation d'uné série géométrique, on sait également que cette dérivée est, sur $]-1,1[$ la somme de la série entière $\sum(-1)^n z^{2n}$ qui est de rayon de convergence 1 (par exemple en remarquant que, pour $z=1$, la suite est bornée mais est le terme général d'une série divergente).
Ainsi, comme arctan est, sur $]-1,1[$, une primitive de la somme de la série entière $\sum(-1)^n x^{2n}$, d'après le théorème 7, pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\arctan(x) = \arctan(0) + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}.$$

Ainsi, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ recherchée est de terme général :

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair,}\\ \frac{(-1)^k}{n}x^n & \text{si } n = 2k+1 \text{ est impair,}\end{cases}$$

Comme $\sum\frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge (d'après la critère des séries alternées), d'après le théorème d'Abel radial (Théorème 1), la somme de la série entière $\sum(-1)^n x^{2n}$ est continue en 1 et vaut, en 1, la somme de $\sum\frac{(-1)^n}{2n+1}$. De plus, cette valeur en 1 coïncide avec arctan(1) puisque la fonction arctan est continue en 1 également ! Par suite, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \arctan(x) = \frac{\pi}{4}.$$

Partie C
Développements en série entière

Dans cette partie, U désigne un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$.

1. Développement en série entière d'une fonction d'une variable réelle

a. Définition et premier exemple

Définition 6. *Fonction développable en série entière*

Soit $r > 0$ et $f :]-r, r[\to \mathbb{C}$. On dit que f est **développable en série entière sur** $]-r, r[$ s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ telle que, pour tout $x \in]-r, r[$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Soit $f : U \to \mathbb{C}$. On dit que f est **développable en série entière** s'il existe $r > 0$ tel que f est développable en série entière sur $]-r, r[$.

Remarque 6.

Attention, le développement en série entière d'une fonction n'est pas, en général, valable sur tout l'ensemble de définition de la fonction !

Exemple 5.

Les fonctions suivantes sont développables en série entière :

— $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$

— $x \mapsto \ln(1-x)$.

— On a pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

donc $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ est développable en série entière sur $]-1, 1[$.

— On remarque tout d'abord, que pour tout $x \in]-1, +\infty[$,

$$\ln(1-x) = -\int_0^x \frac{1}{1-t} dt.$$

Considérons alors la série entière $\sum x^n$ de rayon de convergence égal à 1 et notons f sa somme.

Alors f admet une primitive sur $]-1,1[$. On considère la primitive F de f qui s'annule en 0. Par le théorème d'interversion intégrale/somme, on a, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^x t^n dt\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Or, pour $t \in]-1,1[$, $f(t) = \dfrac{1}{1-t}$, donc pour $x \in]-1,1[$

$$\ln(1-x) = -\int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -F(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Par suite, $x \mapsto \ln(1-x)$ est développable en série entière sur $]-1,1[$.

Exercice 16.

1. Montrer que $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$.
2. Montrer que $x \mapsto \dfrac{1}{(i-x)^2}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$.

Correction.

1. D'après l'exercice 13 avec $k=2$, on a, pour tout $x \in]-1,1[$:
$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$$
donc $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$.
2. On remarque que, pour tout $x \in]-1,1[$, $|-ix| = |x| < 1$ et :
$$\frac{1}{i-x} = \frac{1}{i}.\frac{1}{1+ix} = -i\sum_{n=0}^{+\infty} (-ix)^n = -i\sum_{n=0}^{+\infty} (-i)^n x^n.$$
La série entière $\sum (-i)^n z^n$ est de rayon de convergence 1 donc d'après la théorème de dérivation des sommes de séries entières (Théorème 6), sa somme f est dérivable sur $]-1,1[$ et on a, pour tout $x \in]-1,1[$:
$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=0}^{+\infty} (-i)^n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-i)^n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-i)^n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-i)^n n x^{n-1}.$$
Et de plus, on a, pour $x \in]-1,1[$, comme $f(x) = \frac{i}{i-x}$,
$$f'(x) = \frac{i}{(i-x)^2}.$$

Il en résulte que, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\frac{1}{(i-x)^2} = -if'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-i)^{n+1}nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-i)^{n+2}(n+1)x^n.$$

Par suite, $x \mapsto \dfrac{1}{(i-x)^2}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$.

b. Unicité du développement en série entière

Proposition 10. *Unicité du développement en série entière*

Soit $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ des séries entières de la variable réelle. S'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in]-r,r[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n,$$

alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.

c. Séries de Taylor

Définition 7. *Série de Taylor-MacLaurin*

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞. On appelle **série de Taylor-MacLaurin** de f, la série entière :

$$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

Théorème 8.

Soit $r > 0$ et $f :]-r,r[\to \mathbb{C}$. Si f est développable en série entière, alors f est C^∞ sur $]-r,r[$ et f coïncide avec sa série de Taylor-MacLaurin sur $]-r,r[$ i.e., pour tout $x \in]-r,r[$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Remarque 7.

Attention ! La réciproque du théorème précédent est fausse ! Par exemple, la fonction $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ (prolongée par continuité en 0 par $f(0) = 0$) est C^∞ sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas égale à sa série de Taylor-MacLaurin au voisinage de 0.

Exemple 6.

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x+\ln(1-x)}{x^2}$ est prolongeable en une fonction de classe C^∞ sur $]-\infty, 1[$.

La fonction f est de classe C^∞ sur $]-\infty,1[\setminus\{0\}$ comme quotient de fonctions bien définie et de classe C^∞ sur $]-\infty,1[\setminus\{0\}$ dont le dénominateur ne s'annule pas.
Mais en 0 ? Comment s'y prendre ? Le théorème de la limite de la dérivée peut être pratique pour réaliser un prolongement mais encore faut-il pouvoir calculer la dérivée k-ième de la fonction pour $k \in \mathbb{N}$ (mais ce n'est pas hors d'atteinte ici tout de même !)
Une nouvelle option s'ouvre à nous grâce au théorème 8 : si une fonction est développable en série entière sur $]-r,r[$, alors elle est de classe C^∞ sur $]-r,r[$.
Il suffirait donc d'écrire notre fonction f comme somme de série entière sur un certain intervalle privé de 0 et de prolonger f en 0 par la valeur en 0 de la somme !
Allons-y ! On a vu précédemment que, pour $x \in]-1,1[$, $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$; d'où, pour tout $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$:

$$f(x) = \frac{x+\ln(1-x)}{x^2} = \frac{x - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}}{x^2} = -\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-2}}{n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{n+2} x^n.$$

Et de plus, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{n+2} 0^n = -\frac{1}{2}$; donc, en prolongeant f en 0 par $f(0) = -\frac{1}{2}$, la fonction f est développable en série entière comme somme de la série entière $\sum \frac{-1}{n+2} x^n$ sur $]-1,1[$ et donc, d'après le théorème 8, f ainsi prolongée est de classe C^∞ sur $]-1,1[$ et donc sur $]-\infty,1[$.

d. Opérations sur les développements en série entière

Proposition 11.

Soit f, g des fonctions de U dans $\mathbb{C}$. On suppose que f et g sont développables en série entière sur $]-r_f, r_f[$ et $]-r_g, r_g[$ respectivement où $r_f, r_g > 0$. Alors, en posant $r = \min(r_f, r_g)$,

- pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est développable en série entière sur $]-r,r[$;
- la fonction fg est développable en série entière sur $]-r,r[$.

2. Développements en série entière usuels

a. L'exponentielle, les fonctions trigonométriques et hyperboliques

Théorème 9.

La fonction $x \mapsto e^x$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \exp(x)$.

Définition 8. *Les fonctions cosinus et sinus complexes*

On définit les fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ notées cos et sin, pour $z \in \mathbb{C}$, par :

$$\cos(z) = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} \quad \text{et} \quad \sin(z) = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}.$$

À toujours savoir retrouver ! Les développements en série entières sur $\mathbb{R}$ des fonctions trigonométriques et hyperboliques :

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \qquad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Correction.

Montrons que sin est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et déterminons ce développement. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sin(x) = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i}.$$

Or, les fonctions $x \mapsto e^{\pm ix}$ sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$, et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$e^{\pm ix} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\pm ix)^n}{n!}$$

La série entière $\sum a_n x^n$ avec $a_n = \dfrac{(ix)^n - (-ix)^n}{n!}$ est de rayon de convergence égal à $+\infty$ car il s'agit de la somme des séries entières $\sum \frac{(ix)^n}{n!}$ et $\sum -\frac{(-ix)^n}{n!}$ qui ont un rayon de convergence égal à $+\infty$. Et de plus, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{(-ix)^n}{n!} = \exp(ix) - \exp(-ix) = 2i\sin(x).$$

Ainsi, sin est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
2i\sin(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n - (-ix)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} i^n(1-(-1)^n)\frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n \text{ impair}} 2i^n \frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} 2 \underbrace{i^{2k+1}}_{=i((i)^2)^k = i(-1)^k} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} 2i(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},
\end{aligned}$$

d'où

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Exercice 17.

Montrer que la fonction sinc : $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est prolongeable en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Correction.

Montrons qu'en dehors de 0, la fonction sinc coïncide avec la somme d'une série entière.
La fonction sinus est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et on a, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Par suite, sinc coïncide sur $\mathbb{R}^*$ avec la somme de la série entière $\sum (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$ donc, en prolongeant sinc en 0 par :

$$\operatorname{sinc}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{0^{2n}}{(2n+1)!} = 1,$$

on obtient que la fonction sinc est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et donc que sinc ainsi prolongée est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème 8.

b. Les fonctions $x \mapsto (1+x)^\alpha$

Théorème 10.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et on a, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

À toujours savoir retrouver ! Les développements en série entières sur $]-1,1[$ de :

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} x^n \qquad \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$$

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \qquad \arcsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Correction Pour le arcsinus !.

On se rappelle que pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Remarque : il se serait bien de savoir démontrer ce résultat... donc : Exercice, montrer l'égalité précédente !
Indication : on sait que arcsin est la fonction réciproque de sin restreinte à $[-\pi/2, \pi/2]$ (la fonction sin est bien une bijection de $[-\pi/2, \pi/2]$ dans $[-1,1]$ car elle est strictement croissante sur $[-\pi/2, \pi/2]$). De plus, on connaît (ou on sait retrouver) la formule qui relie la dérivée de la réciproque d'une fonction et la dérivée de la fonction. Et on conclut grâce à la formule de trigonométrie la plus connue du monde qui relie le cosinus et le sinus !

La fonction $y \mapsto (1+y)^{-\frac{1}{2}}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et on a, pour tout $y \in]-1,1[$:

$$\begin{aligned}
(1+y)^{-\frac{1}{2}} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)...(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} y^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \times 1 \times 3 \times 5 \times ... \times (2n-1)}{2^n n!} y^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(2 \times 4 \times ... \times 2n) 2^n n!} y^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2} y^n
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in]-1,1[$, on a $y = -x^2 \in]-1,0[\subset]-1,1[$, donc :

$$
\begin{aligned}
(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2} (-x^2)^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} x^{2n}
\end{aligned}
$$

Il en résulte que $x \mapsto (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$. De plus, le rayon de convergence R de la série entière associée à ce développement est $R=1$ (on peut obtenir ce résultat en utilisant la règle de D'Alembert pour les séries **tout court** puisqu'il s'agit d'une série entière lacunaire).

Ainsi, on peut primitiver sur $]-1,1[$ la somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} x^{2n}$, et on a, pour tout $x \in\,]-1,1[$:

$$
\begin{aligned}
\int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} t^{2n} dt &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \int_0^x t^{2n} dt \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}
\end{aligned}
$$

Ainsi, en remarquant que deux primitives sont égales à une constante près et que la primitive précédente s'annule en 0 tout comme $\arcsin(0)$, on obtient, pour tout $x \in\,]-1,1[$:

$$
\arcsin = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.
$$

et donc que arcsin est développable en série entière sur $]-1,1[$.

E&P

Exercices et problèmes

L'exercice suivant propose une réciproque partielle du théorème d'Abel radial :

Exercice 18. *Théorème taubérien faible*

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S. Si $a_n = \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ et S admet une limite finie ℓ en R^-.
Montrer que $\sum a_n R^n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n = \ell.$$

Correction.

Quitte à changer la variable x en x/R, on peut supposer que la rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est $R = 1$.

On note $(S_n)_{n \in \mathbb{N}} = \sum a_n$. On va montrer que la série converge vers ℓ avec la définition i.e. en montrant que $|S_N - \ell|$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$. L'idée est de "passer" par les termes d'une suite qui tend vers ℓ, la suite de terme général $S\left(1 - \frac{1}{N}\right)$. Allons-y :

On a, pour $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\left|S\left(1-\frac{1}{N}\right) - S_N\right| &= \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(1-\frac{1}{N}\right)^n - \sum_{n=0}^{N} a_n\right| \\
&= \left|\sum_{n=0}^{N} a_n \left(\left(1-\frac{1}{N}\right)^n - 1\right) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n \left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right| \\
\left|S\left(1-\frac{1}{N}\right) - S_N\right| &\leq \sum_{n=0}^{N} |a_n| \left|\left(1-\frac{1}{N}\right)^n - 1\right| + \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| \left(1-\frac{1}{N}\right)^n
\end{aligned}$$

— Traitons la somme de 0 à N. D'après la formule du binôme de Newton, on a $\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{N^k}$, d'où :

$$\left|\left(1-\frac{1}{N}\right)^n - 1\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{N^k}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{N^k} \leq \binom{n}{1} \frac{1}{N^1} = \frac{n}{N},$$

et ainsi :

$$\sum_{n=0}^{N} |a_n| \left|\left(1-\frac{1}{N}\right)^n - 1\right| \leq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} n|a_n|.$$

Comme $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$, on a $na_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc, d'après le lemme de Cesàro, $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} n|a_n| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$.

Par suite,

$$\sum_{n=0}^{N} |a_n| \left| \left(1-\frac{1}{N}\right)^n - 1 \right| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0.$$

— Traitons la seconde somme. De nouveau d'après l'hypothèse, la suite $(na_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (vers 0) et donc elle est bornée ; on note alors $M_N = \sup_{n\in\mathbb{N},\ n\geq N+1} (n|a_n|)$. On a :

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| \left(1-\frac{1}{N}\right)^n = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \underbrace{(n|a_n|)}_{\leq M_N} \underbrace{\frac{1}{n}}_{\leq \frac{1}{N}} \left(1-\frac{1}{N}\right)^n \leq M_N \times \frac{1}{N} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(1-\frac{1}{N}\right)^n$$

Or, on remarque que :

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(1-\frac{1}{N}\right)^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1-\frac{1}{N}\right)^n = \frac{1}{1-(1-\frac{1}{N})} = N$$

et donc :

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| \left(1-\frac{1}{N}\right)^n \leq M_N.$$

Montrons alors que la suite $(M_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(na_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, $n|a_n| \leq \varepsilon$.
Soit $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geq n_0$. Alors, pour tout entier $n \geq N+1$, on a $n \geq n_0$, donc $n|a_n| \leq \varepsilon$.
D'où $M_N = \sup_{n\in\mathbb{N},\ n\geq N+1}(n|a_n|) \leq \varepsilon$.
Il en résulte que $(M_N)_{N\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
En fait, si on connait les propriétés de la limite supérieure, on a $\lim M_N = \limsup n|a_n|$ *donc comme* $(n|a_n|)$ *converge,* $\lim M_N = \lim n|a_n|$.

Par suite :

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| \left(1-\frac{1}{N}\right)^n \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

Conclusion :

$$\left|S\left(1-\frac{1}{N}\right) - S_N\right| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0.$$

De plus, par hypothèse, $S(x) \xrightarrow[x\to1^-]{} \ell$, donc, d'après le caractérisation séquentielle de la limite, $S\left(1-\frac{1}{N}\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \ell$. Ainsi :

$$|S_N - \ell| \leq \left|S_N - S\left(1-\frac{1}{N}\right)\right| + \left|S\left(1-\frac{1}{N}\right) - \ell\right| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

et donc, $\sum a_n = (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{N\to+\infty} S_N = \ell.$$

Remarque : il existe également un théorème taubérien fort (ou théorème taubérien de Hardy-Littlewood - du nom de ceux qui l'ont démontré) dans lequel l'hypothèse petit o devient grand O - ce qui implique donc le théorème taubérien faible. La démonstration en est bien plus difficile !

Problème 1. *Somme des sinus cardinaux des entiers*

Questions préliminaires :

P1. (a) Soit $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$ converge en utilisant l'égalité, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $e^{in\theta} = S_n - S_{n-1}$ où S_n est la somme partielle d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ de la série $\sum_{n\geq 1} e^{in\theta}$.

(b) En déduire que $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n}$; $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(2n)}{n}$ et $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{\sin(n)}{n}$ sont des séries convergentes.

P2. En remarquant que, pour $x \in \mathbb{R}$, $\sin^2(x) \leq |\sin(x)|$, montrer que $\sum_{n\geq 1} \frac{|\sin(n)|}{n}$ diverge.

On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n} x^n$ de somme S sur son domaine de convergence.

1. Montrer que S est de classe C^∞ sur $]-1,1[$ et continue sur $[-1,1]$.
2. Exprimer S' puis S à l'aide de fonctions usuelles sur $]-1,1[$.
3. En déduire les valeurs des sommes de séries suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin(n)}{n}.$$

4. En déduire, après avoir justifié la convergence de la série associée, que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2n+1)}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Correction.

P1. (a) *Remarque : on a déjà prouvé ce résultat dans l'exercice 7 en utilisant le critère d'Abel (exercice 6). On refait ici la preuve directe, toujours grâce à une transformée d'Abel (exercice 6), mais sans le dire !.*

Soit $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}$ et on a $e^{in\theta} = S_n - S_{n-1}$. Ainsi, pour $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{e^{in\theta}}{n} &= \sum_{n=1}^{N} \frac{S_n}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{S_{n-1}}{n} \\
&= \frac{S_N}{N} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{S_n}{n} - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{S_n}{n+1} \\
\sum_{n=1}^{N} \frac{e^{in\theta}}{n} &= \frac{S_N}{N} - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{S_n}{n(n+1)}
\end{aligned}$$

De plus, comme $e^{i\theta} \neq 1$, on a :

$$|S_n| = \left| \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right| \leq \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|} = \frac{1}{|\sin(\theta)|}.$$

La suite (S_n) est alors bornée. Ainsi, la suite $(\frac{S_n}{n})$ converge (vers 0) et la série de terme

général $\frac{S_n}{n(n+1)}$ est absolument convergente par comparaison à une série de Riemann et donc convergente.
Par suite, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$ converge car la suite de ses sommes partielles converge.

(b) Pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, on a : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, $(\mathrm{Re}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.
Ainsi, en utilisant la convergence prouvée précédemment de $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$:
— pour $\theta = 1 \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n}$ converge car $\sin(n) = \mathrm{Im}(e^{in})$.
— pour $\theta = 2 \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(2n)}{n}$ converge car $\cos(2n) = \mathrm{Re}(e^{2in})$.
— pour $\theta = 1+\pi \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n(1+\pi))}{n}$ converge car $\sin(n(1+\pi)) = \mathrm{Im}(e^{in(1+\pi)})$.

Or, on remarque que $\sin(n(1+\pi)) = \sin(n+n\pi) = \sin(n)\cos(n\pi) = (-1)^n \sin(n)$; donc :
$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{\sin(n)}{n} = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n(1+\pi))}{n} \text{ converge.}$$

P2. Pour $x \in \mathbb{R}$, comme $|\sin(x)| \leq 1$, on a $\sin^2(x) \leq |\sin(x)|$; et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{\sin^2(n)}{n} \leq \frac{|\sin(n)|}{n}$.
De plus, pour $x \in \mathbb{R}$, on a $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\frac{|\sin(n)|}{n} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{\cos(2n)}{n}\right)$$
Or $\frac{1}{n}$ est le terme général d'une série divergente et d'après la question P1., $\frac{\cos(2n)}{n}$ est le terme général d'une série convergente. Par suite, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{\cos(2n)}{n}\right)$ diverge et donc, par comparaison, $\sum_{n\geq 1} \frac{|\sin(n)|}{n}$ diverge.

1. Notons R le rayon de convergence de la série.
On a $\frac{\sin(n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $R \geq 1$. De plus, d'après la question P2., la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n}$ ne converge pas absolument donc $R \leq 1$. Par suite $R = 1$.
Par suite, la fonction S est de classe C^∞ sur $]-1,1[$ comme somme de série entière de rayon de convergence 1.
D'après la question P1. (b) les séries numériques $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n}$ et $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{\sin(n)}{n}$ convergent donc, d'après le théorème d'Abel radial, S tend vers les sommes de ces séries en 1 et -1 respectivement et donc S est continue sur $[-1,1]$.

2. Comme S est la somme d'une série entière de rayon de convergence 1, on a, pour tout $x \in]-1,1[$:
$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} . \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(n) x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(n+1) x^n$$

De plus, comme $\sin(x) = \mathrm{Im}(e^{ix})$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient, pour tout $x \in \,]-1,1[$:

$$\begin{array}{rcl} S'(x) & = & \mathrm{Im}\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{i(n+1)}x^n\right) \\ & = & \mathrm{Im}\left(\dfrac{e^i}{1-e^i x}\right) \\ & = & \dfrac{\sin(1)}{x^2 - 2\cos(1)x + 1} \\ S'(x) & = & \dfrac{1}{\sin(1)} \dfrac{1}{1 + \left(\frac{x-\cos(1)}{\sin(1)}\right)^2}. \end{array}$$

Par suite, on a, pour tout $x \in \,]-1,1[$:

$$S(x) = S(0) + \int_0^x S'(t)\,\mathrm{d}t = \arctan\left(\frac{x-\cos(1)}{\sin(1)}\right) - \arctan\left(-\frac{1}{\tan(1)}\right).$$

On rappelle que pour tout $x \neq 0$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$, donc :

$$\begin{array}{rcl} S(x) & = & \arctan\left(\dfrac{x-\cos(1)}{\sin(1)}\right) + \arctan\left(\dfrac{1}{\tan(1)}\right) \\ & = & \arctan\left(\dfrac{x-\cos(1)}{\sin(1)}\right) + \dfrac{\pi}{2} - \arctan(\tan(1)) \\ S(x) & = & \dfrac{\pi}{2} - 1 + \arctan\left(\dfrac{x-\cos(1)}{\sin(1)}\right). \end{array}$$

3. La fonction $f : x \mapsto \frac{\pi}{2} - 1 + \arctan\left(\frac{x-\cos(1)}{\sin(1)}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et donc en ± 1. Ainsi, comme S est également continue en ± 1, on obtient $f(\pm 1) = S(\pm 1)$. Ce qui nous permet de calculer les sommes recherchées.
Pour ce faire, on utilise les formules usuelles :

$$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \text{ et}$$
$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

pour trouver, en écrivant $1 = \cos(0)$:

$$1 - \cos(1) = 2\sin^2\left(\frac{1}{2}\right) \text{ et } -1 - \cos(1) = -2\cos^2\left(\frac{1}{2}\right)$$

et on a également, par les formules d'additions du sinus, $\sin(1) = 2\sin\left(\frac{1}{2}\right)\cos\left(\frac{1}{2}\right)$.

En se basant sur ces résultats, on trouve :

— en 1 :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n)}{n} &= S(1)=f(1)\\ &= \frac{\pi}{2}-1+\arctan\left(\frac{1-\cos(1)}{\sin(1)}\right)\\ &= \frac{\pi}{2}-1+\arctan\left(\tan\left(\frac{1}{2}\right)\right)\\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n)}{n} &= \frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

— en -1 : en utilisant de nouveau la formule reliant $\arctan(x)$ et $\arctan(1/x)$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sin(n)}{n} &= S(-1)=f(-1)\\ &= \frac{\pi}{2}-1+\arctan\left(\frac{-1-\cos(1)}{\sin(1)}\right)\\ &= \frac{\pi}{2}-1+\arctan\left(-\frac{1}{\tan\left(\frac{1}{2}\right)}\right)\\ &= \frac{\pi}{2}-1-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\\ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sin(n)}{n} &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

On a donc trouvé :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n)}{n}=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\quad\text{et}\quad\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sin(n)}{n}=-\frac{1}{2}}.$$

4. La série de terme général $\frac{(1-(-1)^n)}{2}\frac{\sin(n)}{n}$ est convergente comme combinaison linéaire de séries convergentes et on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1-(-1)^n)}{2}\frac{\sin(n)}{n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n)}{n}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sin(n)}{n}=\frac{\pi}{4}$$

On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite somme partielle de la série précédente et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum\frac{\sin(2n+1)}{2n+1}$. Comme $(1-(-1)^n)=0$ pour tout entier pair, on a, pour tout $N\in\mathbb{N}$

$$S_{2N+1}=\sum_{\substack{n=1\\ n\text{impair}}}^{2N+1}\frac{\sin(n)}{n}\underbrace{=}_{n'=\frac{n-1}{2}}\sum_{n'=1}^{N}\frac{\sin(2n'+1)}{2n'+1}=T_N$$

Ainsi, la série $\sum \frac{\sin(2n+1)}{2n+1} = (T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de la série convergente $\sum_{n=1} \frac{(1-(-1)^n)}{2} \frac{\sin(n)}{n}$ et donc converge et ce, vers la même limite. Par suite, on a :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2n+1)}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.}$$