Chapitre X

Endomorphismes d'un espace euclidien

Table des matières

Dans ce chapitre, E désigne un espace vectoriel réel (pas forcément de dimension finie).

Partie $*$

Rappels sur les espaces préhilbertiens réels

1. Rappels sur le produit scalaire

a. Produit scalaire

Définition $*$1. Produit scalaire

Une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est appelée **produit scalaire** sur E si φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

Remarque $*$1.

Usuellement, on note un produit scalaire de deux vecteurs $(u|v)$, $\langle u|v\rangle$, $\langle u, v\rangle$ ou même $u \cdot v$. Dans la suite, on utilisera principalement la notation $(\cdot|\cdot)$.

Exercice $*$1.

Donner des exemples de produits scalaires sur les espaces : $\mathbb{R}^n$, $\ell^2(\mathbb{R})$, $C(I)$ où I est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et $M_n(\mathbb{R})$.

Correction.

— pour $x = (x_1, ..., x_n)$ et $y = (y_1, ..., y_n)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, le produit scalaire canonique est donné par :

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

— pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des vecteurs de $\ell^2(\mathbb{R})$, le produit scalaire canonique est donné par :

$$(u|v) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i v_i$$

— pour f et g des vecteurs de $C(I)$, le produit scalaire canonique est donné par :

$$(f|g) = \int_I f(t)g(t)dt$$

— pour A et B des vecteurs de $M_n(\mathbb{R})$, le produit scalaire canonique est donné par :

$$(A|B) = \mathrm{Tr}({}^t\!AB) = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}b_{i,j}$$

Définition ∗2. Espace préhilbertien

Soit $(\cdot|\cdot)$ un produit scalaire sur E. Le couple $(E,(\cdot|\cdot))$, ou simplement E s'il n'y a pas d'ambiguïté, est appelé **espace préhilbertien**.
Si de plus E est de dimension finie, on dit que $(E,(\cdot|\cdot))$ est un **espace euclidien**.

Exemple ∗1. Important

L'espace vectoriel $M_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ où, pour tous $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$,

$$\langle X, Y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = {}^tXY,$$

est un espace euclidien. Le produit scalaire précédent est souvent désigné comme le produit scalaire **canonique** de $M_{n,1}$.

b. Norme associée à un produit scalaire

Définition ∗3. Norme associé au produit scalaire

Soit E un espace préhilbertien réel. On note $\|\cdot\|$ et on appelle **norme associée au produit scalaire** $(\cdot|\cdot)$, l'application :

$$\|\cdot\| : \left| \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \|x\| = \sqrt{(x|x)}. \end{array} \right.$$

De plus, on note $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ et on appelle distance associée à $\|\cdot\|$, l'application définie, pour $x, y \in E$, par :

$$d(x,y) = \|x-y\|.$$

Théorème ∗1. Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit E un espace préhilbertien réel. On a l'inégalité suivante, pour tous $x, y \in E$:

$$|(x|y)| \leq \|x\|\|y\|$$

Et de plus, on a $|(x|y)| = \|x\|\|y\|$ si, et seulement si, x et y sont colinéaires.

Démonstration.

Soit $x, y \in E$ et $t \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour $t \in \mathbb{R}$, par :

$$f(t) = \|tx + y\|^2 = (tx + y|tx + y).$$

Alors on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = t^2(x|x) + 2(x|y) + (y|y) = t^2\|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2.$$

Pour $x \neq 0_E$, f est une fonction polynomiale de degré 2 et on a $f(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc son discriminant Δ est négatif i.e.

$$\Delta = 4(x|y)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0.$$

Par suite,

$$(x|y)^2 \leq (\|x\|\|y\|)^2$$

Et cette inégalité est trivialement vraie pour $x = 0_E$ - et c'est même une égalité dans ce cas. La fonction racine étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, il en résulte que pour tous $x, y \in E$:

$$|(x|y)| \leq \|x\|\|y\|.$$

De plus, si $x \neq 0_E$ et y colinéaire à x, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = \lambda x$ et

$$|(x|y)| = |\lambda|\|x\|^2 = \pm\|x\|.|\lambda|\|x\| = \|x\|\|y\|.$$

Réciproquement, pour $x \neq 0_E$, si l'égalité est vérifiée, alors $\Delta = 4(x|y)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 = 0$ donc f possède une racine λ i.e.

$$(\lambda x + y|\lambda x + y) = f(\lambda) = 0.$$

Donc par définie positivité du produit scalaire, $\lambda x + y = 0_E$; d'où x et y sont colinéaires. $\square$

Proposition $*$1.

Soit E un espace préhilbertien réel. La norme $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire est une norme sur E.

Démonstration.

- $\|\cdot\|$ est positive par positivité du produit scalaire).
- Soit $x \in E$. Si $\|x\| = 0$, alors $(x|x) = 0$ donc $x = 0_E$ car le produit scalaire est défini positif.
- Soit $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par bilinéarité de $(\cdot|\cdot)$, on a :

  $$\|\lambda x\|^2 = (\lambda x|\lambda x) = \lambda^2(x|x) = \lambda^2\|x\|^2,$$

  d'où l'homogénéité.
- Soit $x, y \in E$. On a :

  $$\|x + y\|^2 = (x + y|x + y) = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2,$$

donc, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 .$$

d'où l'inégalité triangulaire.

□

Exercice ∗2.

Soit $x, y \in E$. Démontrer les égalités suivantes :

1. $d(x,y) = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x|y)}$.
2. $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$ *(Identité du parallélogramme).*
3. $(x|y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$ *(Identité de polarisation).*

Correction.

Tout cet exerice repose sur les égalités :

$$\|x \pm y\|^2 = (x \pm y | x \pm y) = \|x\|^2 \pm 2(x|y) + \|y\|^2.$$

1. On a :
$$\begin{aligned} d(x,y)^2 &= \|x-y\|^2 \\ &= \|x\|^2 - 2(x|y) + \|y\|^2 \end{aligned}$$
d'où le résultat.
2. On a :
$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2 + (\|x\|^2 - 2(x|y) + \|y\|^2) \\ &= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \\ &= 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \end{aligned}$$
3. On a :
$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 &= \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2 - (\|x\|^2 - 2(x|y) + \|y\|^2) \\ &= 4(x|y) \end{aligned}$$
d'où le résultat.

2. Rappels et compléments sur l'orthogonalité

Définition ∗4. Orthogonalité

Soit E un espace préhilbertien réel.

— Soit $x, y \in E$. On dit que x et y sont **orthogonaux** et on note $x \perp y$ si $(x|y) = 0$.

— Soit $A \subset E$. On note $A^\perp$ et on appelle **orthogonal** de A, l'ensemble :

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall\, a \in A,\ (a|x) = 0\}.$$

— Soit F, G des sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont **orthogonaux** et on note $F \perp G$ si, pour tout $x \in F$ et tout $y \in G$, $(x|y) = 0$. Autrement dit si $F \subset G^\perp$ (ou de manière équivalente, $G \subset F^\perp$).

Exercice ∗3.

Soit E un espace préhilbertien réel et $A \subset E$.

— Montrer que $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E de deux façons.

— Montrer que $A^\perp$ est un fermé de E pour la norme $\|\cdot\|$.

Correction.

1. Pour la première façon, il s'agit d'utiliser la définition de sous-espace vectoriel.

   Pour la deuxième, on remarque que $A^\perp = \bigcap_{a\in A} \mathrm{Ker}(\varphi_a)$ où, pour $a \in A$, $\varphi_a : x \mapsto (a|x)$, donc $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E comme intersection de sous-espaces vectoriels de E.

2. On reprend l'égalité $A^\perp = \bigcap_{a\in A} \mathrm{Ker}(\varphi_a)$ et on remarque que :

   — pour $a \in A$ et $x \in X$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

   $$|f_a(x)| = |(a|x)| \leq \|a\|\|x\|.$$

   Donc f_a est $\|a\|$-lipschitzienne et donc continue pour $\|\cdot\|$.

   — $\mathrm{Ker}(\varphi_a) = \varphi_a^{-1}(\{0\})$ donc $\mathrm{Ker}(\varphi_a)$ est un fermé pour $\|\cdot\|$ comme image réciproque d'un fermé par une application continue.

   Par suite, $A^\perp$ est fermé pour $\|\cdot\|$ comme intersection de fermé.

Exemple ∗2.

— Dans un espace préhilbertien réel E, on a : $E^\perp = \{0_E\}$ et $\{0_E\}^\perp = E$.

— Dans $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique, $\{(1,-1)\}^\perp = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

— Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique,

$$\mathrm{Vect}((1,1,1),(1,2,3)) \perp \mathrm{Vect}(1,-2,1).$$

Définition ∗5. Famille orthogonale/orthonormale

Soit E un espace préhilbertien réel et $\mathcal{F} = (x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. On dit que $\mathcal{F}$ est :

— **orthogonale** si, pour tous $i, j \in I$ avec $i \neq j$,

$$(x_i|x_j) = 0.$$

— **orthonormale** si, pour tous $i, j \in I$,

$$(x_i|x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$$

On dit qu'une famille de E est une **base orthonormale** si c'est une base et une famille orthonormale.

Exercice $*4$.

Soit E un espace préhilbertien réel et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer les proposition suivantes :

1. Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est libre.
2. On suppose que E admet une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$. Montrer que, pour tous $x, y \in E$ de décompositions dans $\mathcal{B}$, $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$ et $y = \sum_{i \in I} y_i e_i$ (sommes finies), on a :
$$(x|y) = \sum_{i \in I} x_i y_i \text{ et } x = \sum_{i \in I} (x|e_i) e_i.$$
3. (Théorème de Pythagore) Soit $(x_1, ...x_n)$ une famille finie orthogonale de vecteurs de E. Alors
$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2.$$

Proposition 1.

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien de dimension n, $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. Pour tous $x, y \in E$, on a :

$$(x|y) = {}^tXY \ \ (= \langle X, Y \rangle) \text{ où } X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x), Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y).$$

Démonstration.

Soit $x, y \in E$. On note $e_1, ..., e_n$ les vecteurs de $\mathcal{B}$. Alors, si on note $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ les décompositions de x, y dans $\mathcal{B}$, par bilinéarité du produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ et par orthonormalité de $\mathcal{B}$, on a, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et :

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = {}^tXY$$

□

Proposition *2. Matrice d'un endormrphisme dans une base orthonormale

Soit E un espace euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base **orthonormale** de E. Si on note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, alors :

$$A = ((u(e_j)|e_i))_{1 \leq i,j \leq n},$$

et, pour tous $x, y \in E$,

$$(u(x)|y) = {}^tX{}^tAY = {}^tYAX \text{ où } X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x), Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y).$$

Démonstration.

On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$.

— Soit $j \in [\![1, n]\!]$. D'une part, comme $\mathcal{B}$ est orthonormale, on a $u(e_j) = \sum_{i=1}^n (u(e_j)|e_i)e_i$ et d'autre part, par définition de A, $u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i$; ainsi, par unicité de la décomposition d'un vecteur dans une base, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_{ij} = (u(e_j)|e_i)$.

— Soit $x, y \in E$. On note $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x), Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u(x)) = AX$ et donc :

$$(u(x)|y) = {}^tAXY = {}^tX{}^tAY.$$

□

Proposition *3. Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit E un espace préhilbertien réel et $(x_1, ..., x_n)$ une famille libre de E. Alors il existe une famille $(e_1, ..., e_n)$ orthonormale de E telle que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_k) = \mathrm{Vect}(x_1, ..., x_k).$$

Plus précisément, on peut construire un telle famille $(e_1, ..., e_n)$ par le procédé de Gram-Schmidt : pour $k = 1, ..., n$

$$e_k = \frac{\varepsilon_k}{\|\varepsilon_k\|} \text{ où } \varepsilon_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} (x_k|e_i)e_i.$$

Démonstration.

On raisonne par récurrence finie sur $k \in [\![1, n]\!]$ pour montrer que $\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_k) = \mathrm{Vect}(x_1, ..., x_k)$ où les e_i sont donnés par le procédé de Gram-Schmidt :

- *Initialisation.* Pour $k = 1$, la propriété est vraie car

$$e_1 = \frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|} = \frac{x_1}{\|x_1\|}.$$

- *Hérédité.* Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose la propriété vraie pour k. On a, par hypothèse de récurrence :

$$\varepsilon_{k+1} = x_{k+1} + \underbrace{\sum_{i=1}^{k} (x_{k+1}|e_i)e_i}_{\in \mathrm{Vect}(x_1,...,x_k)} \in \mathrm{Vect}(x_1, ..., x_{k+1}).$$

Par suite, $e_{k+1} = \dfrac{\varepsilon_{k+1}}{\|\varepsilon_{k+1}\|} \in \mathrm{Vect}(x_1, ..., x_{k+1})$. De plus, on a, pour $l \in [\![1, k]\!]$,

$$\begin{aligned}
(\varepsilon_{k+1}|\varepsilon_l) &= (x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k}(x_{k+1}|e_i)e_i | x_l - \sum_{i=1}^{l-1}(x_l|e_i)e_i) \\
&= (x_{k+1}|x_l) - \sum_{i=1}^{k}(x_{k+1}|e_i)(x_l|e_i) - \sum_{i=1}^{l-1}(x_l|e_i)(x_{k+1}|e_i) + \sum_{i=1}^{l-1}\sum_{j=1}^{k}(x_l|e_i)(x_{k+1}|e_j)\underbrace{(e_i|e_j)}_{=0 \text{ si } j\neq i} \\
&= (x_{k+1}|x_l) - \sum_{i=1}^{k}(x_{k+1}|e_i)(x_l|e_i) - \sum_{i=1}^{l-1}(x_l|e_i)(x_{k+1}|e_i) + \sum_{i=1}^{l-1}(x_l|e_i)(x_{k+1}|e_i) \\
&= (x_{k+1}|x_l) - \sum_{i=1}^{k}(x_{k+1}|e_i)(x_l|e_i) - \sum_{i=1}^{l-1}(x_l|e_i)(x_{k+1}|e_i) + \sum_{i=1}^{l-1}(x_l|e_i)(x_{k+1}|e_i)
\end{aligned}$$

□

Corollaire ∗1.

Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie. Alors F admet une base orthonormale.

Démonstration.

Comme F est de dimension finie (disons p), il existe une base $\mathcal{B} = (x_1, ..., x_p)$ de F. Alors on orthonormalise cette base grâce au procédé de Gram-Schmidt pour obtenir une base $\mathcal{B}'$ orthonormale de F. □

Exercice ∗5.

On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique. Déterminer, grâce au procédé de Gram-Schmidt, la base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ obtenue à partir de la base formée des vecteurs :

$$(1, 1, 1), \quad (1, 2, 3), \quad (1, -2, 1).$$

Remarque ∗2.

Pour $A, B \subset E$ et F un sous-espace vectoriel de E, on a les propriétés suivantes :

— Si $A \subset B$ alors $B^\perp \subset A^\perp$,

— $A \subset (A^\perp)^\perp$.

Définition-Proposition ∗6. Somme directe orthogonale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, E un espace préhilbertien réel et $(F_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E.

Si $F_1, ..., F_n$ sont deux à deux orthogonaux, alors ils sont en somme directe.

Dans ce cas, on dit que $F_1, ..., F_n$ sont en **somme directe orthogonale** et on note $F_1 \overset{\perp}{\oplus} ... \overset{\perp}{\oplus} F_n$ la somme $F_1 \oplus ... \oplus F_n$.

Démonstration.

On suppose que, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, $F_i \perp F_j$.
Soit $y = x_1 + ... + x_n \in \sum_{i=1}^n F_i$ où, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i \in F_i$. On suppose $y = 0_E$. Alors, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a, par linéarité par rapport à la première variable du produit scalaire :

$$0 = (y|x_j) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \mid x_j \right) = \sum_{i=1}^n \underbrace{(x_i|x_j)}_{=0 \text{ si } i \neq j} = (x_j|x_j),$$

et donc $x_j = 0_E$ par définie positivité du produit scalaire.
Il en résulte que $F_1, ..., F_n$ sont en somme directe. □

Proposition ∗4.

Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E. Les sous-espaces vectoriels F et $F^\perp$ sont en somme directe orthogonale.

Démonstration.

Soit $x \in F \cap F^\perp$. Alors $(\underbrace{x}_{\in F} | \underbrace{x}_{\in F^\perp}) = 0$ donc par définie positivité de $(\cdot|\cdot)$, $x = 0_E$.
De plus, par définition, $F \perp F^\perp$.
Par suite, F et $F^\perp$ sont en somme directe orthogonale. □

Définition ∗7. Supplémentaire orthogonal

Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E.

On dit que F **admet un supplémentaire orthogonale** dans E si $F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp = E$ et dans ce cas, on dit que $F^\perp$ est **le supplémentaire orthogonal** de F dans E.

Proposition ∗5.

Soit E un espace préhilbertien réel et F, G des sous-espaces vectoriels de E.

— On suppose que F et G sont supplémentaires. Alors $F \perp G$ si, et seulement si, $G = F^\perp$.

— Si $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$, alors $(F^\perp)^\perp = F$.

Démonstration.

- On suppose $F \perp G$. Alors $G \subset F^{\perp}$. Montrons l'inclusion réciproque.
  Soit $x \in F^{\perp} = E = F \oplus G$. Alors $x = \underbrace{x_F}_{\in F} + \underbrace{x_G}_{\in G}$ et on a :

$$\begin{aligned}(x - x_G | x - x_G) &= (x - x_G | x_F) \\ &= \underbrace{(x|x_F)}_{=0} - \underbrace{(x|x_G)}_{=0} \\ &= 0.\end{aligned}$$

  Donc, par définie positivité de $(\cdot|\cdot)$, $x - x_G = 0_E$, d'où $x = x_G \in G$.
  Par suite, $G = F^{\perp}$.
  La réciproque est immédiate car $F^{\perp} \perp F$.
- On applique le point précédent à "F" $= F^{\perp}$ et "G" $= F$. Comme $F^{\perp} \perp F$, on obtient alors $F = (F^{\perp})^{\perp}$.

$\square$

Exemple $*$3.

On considère les espaces vectoriels suivants munis de leurs produits scalaires canoniques respectifs.

- Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $\mathcal{P} : x+y = 0$. Alors la droite $\mathcal{P}^{\perp} = \mathrm{Vect}(1,1,0)$ est le supplémentaire orthogonal de $\mathcal{P}$.
- Dans $C([0,1],\mathbb{R})$, on considère le sous-espace vectoriel F des fonctions constantes. Alors le sous-espace des fonctions d'intégrale nulle est le supplémentaire orthogonal de F.
- Dans $\ell^2(\mathbb{N})$, on considère le sous-espace vectoriel F des suites stationnaires en 0. Alors $F^{\perp} = \{0_{\ell^2(\mathbb{N})}\}$ et donc F n'admet pas de supplémentaire orthogonal.

- Comme l'équation de $\mathcal{P}$ est $x + y = 0$, le vecteur $(1,1,0)$ est normal (i.e. orthogonal) à $\mathcal{P}$. Ainsi, $\mathrm{Vect}(1,1,0) \perp \mathcal{P}$ et ils sont donc en somme directe d'après la définition-proposition 6. De plus, on a $\dim(\mathcal{P}) + \dim(\mathrm{Vect}(1,1,0)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ donc ils sont supplémentaires. Il en résulte, d'après la proposition 5, que $\mathrm{Vect}(1,1,0)$ est le supplémentaire orthogonal de $\mathcal{P}$.
- En analysant le problème, on remarque que si $f \in F^{\perp}$, alors $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = (f|\mathbf{1}) = 0$.
  On conjecture donc que :

$$F^{\perp} = \{f \in E \mid \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0\} = \{\mathbf{1}\}^{\perp}.$$

  Montrons le par double inclusion :
  $\subset$. Soit $f \in F^{\perp}$. Alors, en particulier, on a $\mathbf{1} \in F$ donc :

$$(\underbrace{f}_{\in F^{\perp}} | \underbrace{\mathbf{1}}_{\in F}) = 0$$

  D'où $f \in \{\mathbf{1}\}^{\perp} = \{f \in E \mid \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0\}$.
  $\supset$. Soit $f \in \{\mathbf{1}\}^{\perp}$. Pour tout $g \in F$, g est constante sur $[0,1]$ donc il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $g = c\mathbf{1}$, d'où :

$$(f|g) = (f|c\mathbf{1}) = c(f|\mathbf{1}) = 0$$

Par suite, pour tout $g \in F$, $(f|g) = 0$ et donc $f \in F^{\perp}$.

Notre conjecture est donc vérifiée.

— Pour $k \in \mathbb{N}$, on considère la suite $u(k) = (u(k)_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par :

$$u(k)_n = \delta_{kn} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k \\ 0 & \text{si } n \neq k \end{cases}$$

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $u(k) \in F$ car $u(k)$ est stationnaire en 0 à partir du rang $k+1$.

Soit $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\perp}$. On a alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$0 = (u(k)|v) = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta_{kn} v_n = v_k,$$

donc v est la suite nulle.
Il en résulte que $F^{\perp} = \{0_{\ell^2(\mathbb{N})}\}$.

Proposition ∗6.

Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.

Alors $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$ et $(F^{\perp})^{\perp} = F$.

Démonstration.

D'après la proposition 4, F et $F^{\perp}$ sont en somme directe orthogonale. Montrons alors que $E = F + F^{\perp}$.

Soit $x \in E$. Le sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie alors on peut considérer une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ de F. On pose $x_F = \sum_{i=1}^{p} (x|e_i)e_i \in F$. Alors on a, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$:

$$\begin{aligned} (x - x_F|e_j) &= (x|e_j) - (x_F|e_j) \\ &= (x|e_j) - \sum_{i=1}^{p} (x|e_i)(e_i|e_j) \\ &= (x|e_j) - (x|e_j) = 0. \end{aligned}$$

Par suite, $x - x_F$ est orthogonal avec chacun des éléments d'une base de F, donc $x - x_F \in F^{\perp}$.
Ainsi, $x = x_F + (x - x_F) \in F + F^{\perp}$.

Il en résulte que $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$.

De plus, d'après ce qui précède, on a $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$ et on applique alors la proposition 5. □

Corollaire ∗2.

Soit E un espace **euclidien** et F un sous-espace vectoriel de E. Alors

$$\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E).$$

Démonstration.

Comme E est de dimension finie, alors F et $F^\perp$ sont de dimension finie et donc d'après la proposition précédente, on a $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$, d'où le résultat. □

Exercice ∗6.

Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique. On pose

$$F = \{f \in E \mid \forall\, t \in [0,1],\ f(1-t) = f(t)\} \text{ et } G = \{f \in E \mid f(0) = 0\}.$$

1. Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Déterminer $F^\perp$ et $G^\perp$.
3. Que peut-on dire alors des supplémentaires orthogonaux des sous-espaces de dimension inifnie ?

Correction.

1. — On a $F = \mathrm{Ker}(u)$ où $u : E \to E$ est l'application linéaire $u : f \mapsto u(f) : t \mapsto f(t) - f(1-t)$, donc F est une sous-espace vectoriel de E comme noyau d'une application linéaire d'espace de départ E.
   — On a $G = \mathrm{Ker}(\varphi)$ où $\varphi : E \to \mathbb{R}$ est la forme linéaire $\varphi : f \mapsto f(0)$, donc G est une sous-espace vectoriel de E comme noyau d'une application linéaire d'espace de départ E.

2. — Analysons le problème : si $g \in E$, alors, pour tout $f \in F$, on a, en effectuant le changement de variable $x = 1 - t$:

$$\begin{aligned}
(f|g) &= \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t - \int_{\frac{1}{2}}^0 \underbrace{f(1-t)}_{=f(t)} g(1-t)\,\mathrm{d}t \\
(f|g) &= \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)(g(t) + g(1-t))\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Si $g \in F^\perp$, cette quantité doit être nulle et comme la fonction f peut prendre toutes les valeurs possibles sur $[0, \frac{1}{2}]$, on conjecture que :

$$F^\perp = \{g \in E \mid \forall\, t \in [0,1],\ g(1-t) = -g(t)\}.$$

Montrons la par double inclusion :

$\subset$. Soit $g \in F^\perp$. On considère la fonction $f : t \mapsto g(t) + g(1-t)$. Celle-ci est continue sur E car g l'est et on a, pour tout $t \in [0,1]$, $f(1-t) = g(1-t) + g(t) = f(t)$; d'où $f \in F$.
Alors, d'après la calcul effectué dans l'analyse précédente, on a :

$$0 = (f|g) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)(g(1-t) + g(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)^2\,\mathrm{d}t$$

La fonction f est ainsi continue, positive et d'intégrale nulle sur $[0, \frac{1}{2}]$ et donc, f est nulle sur $[0, \frac{1}{2}]$.
De plus, pour tout $t \in [\frac{1}{2}, 1]$, $1-t \in [0, \frac{1}{2}]$ donc, comme $f \in F$, on a $f(t) = f(1-t) = 0$.
Il en résulte que $f = 0_E$ i.e. pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) = 0$ et donc $g(1-t) = -g(t)$.
D'où $F^\perp \subset \{g \in E \mid \forall\, t \in [0,1],\ g(1-t) = -g(t)\}$.

$\supset$. Soit $g \in E$ telle que, pour tout $t \in [0,1]$, $g(1-t) = -g(t)$. Alors, pour tout $f \in F$, on a, en utilisant le calcul effectué dans l'analyse initiale :

$$(f|g) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\underbrace{(g(t) + g(1-t))}_{=0}\,\mathrm{d}t = 0.$$

Par suite, $g \in F^\perp$. Ainsi, $\{g \in E \mid \forall\, t \in [0,1],\ g(1-t) = -g(t)\} \subset F^\perp$.

Notre conjecture est donc vérifiée.

— En analysant le problème, on se rend compte que si $f \in G^\perp$, f doit être nulle sur $]0,1]$ et donc, par continuité de f en 0, que $f = 0_E$.
On conjecture ainsi que $G^\perp = \{0_E\}$. Montrons l'inclusion $G^\perp \subset \{0_E\}$; la seconde inclusion étant immédiate car $G^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.
Soit $f \in G^\perp$. On considère $g : t \mapsto tf(t)$. Alors g est continue sur $[0,1]$ comme produit de fonctions continues sur $[0,1]$ et $g(0) = 0f(0) = 0$ donc $g \in G$.
Par suite, on a, d'une part, $(f|g) = 0$ et d'autre part :

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 tf(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

Par suite, la fonction $t \mapsto tf(t)^2$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur $[0,1]$, donc elle est égale à la fonction nulle sur $[0,1]$.
Ainsi, pour tout $t \in]0,1]$, $f(t) = 0$ car $tf(t)^2 = 0$.
De plus, f est continue en 0 et $\lim_{x\to 0^+} f(t) = \lim_{x\to 0^+} 0 = 0$ donc $f(0) = 0$.
Par suite, f est égal à 0_E.
Il en résulte que $G^\perp = \{0_E\}$.

3. Les espaces F et G sont des sous-espaces de dimension infinie de E (la famille $(t \mapsto (t(1-t)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille libre de F et $(t \mapsto t^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille libre de G) et, d'après ce qui précède, F possède un supplémentaire orthogonal (et on remarque que ce supplémentaire est de dimension infinie lui aussi) alors que G n'en admet pas.
Conclusion : pour les sous-espaces de dimension infinie, on ne peut rien dire quant à l'existence d'un supplémentaire orthogonal en général !

Partie $**$

Projection orthogonale

Dans cette partie, E désigne un espace préhilbertien réel de produit scalaire noté $(\cdot|\cdot)$, de norme associée notée $\|\cdot\|$ et de distance associée notée d.

1. Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

Définition $ $1.** Projection orthogonale

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. On appelle **projection orthogonale** sur F et on note p_F, la projection sur F parallèlement à son supplémentaire orthogonal $F^\perp$. L'image $p_F(x)$ d'un vecteur $x \in E$ par la projection orthogonale sur F est appelée **projeté orthogonal** de x sur F.

Remarque $ $1.**

Pour F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, on a $\mathrm{Im}(p_F) = F$ et $\mathrm{Ker}(p_F) = F^\perp$.

Proposition $ $1.**

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie p, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base orthonormale de F et $x \in E$. Alors la projection orthogonale de x sur F vérifie :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} (x|e_i)e_i.$$

Démonstration.

Comme dans la démonstration de 6, on décompose $x = y + z$ avec $y = \sum_{i=1}^{p}(x|e_i)e_i \in F$ et $z \in F^\perp$. Par suite,

$$p_F(x) = \underbrace{p_F(y)}_{=y} + \underbrace{p_F(z)}_{=0_E} = \sum_{i=1}^{p} (x|e_i)e_i.$$

$\square$

Remarque $ $2.**

La famille orthonormale $(e_1, ..., e_n)$ obtenue à partir d'une famille $(x_1, ...x_n)$ libre de E grâce au procédé de Gram-Schmidt peut alors s'exprimer de la façon suivante : pour $k = 1, ..., n-1$, on

note
$$F_k = \mathrm{Vect}(x_1, ...x_k) \ \ (= \mathrm{Vect}(e_1, ...e_k)) \,.$$
et on a :
$$e_{k+1} = \frac{1}{\|\varepsilon_{k+1}\|}\varepsilon_{k+1} \text{ où } \varepsilon_{k+1} = x_{k+1} - p_{F_k}(x_{k+1});$$
de plus,
$$\|\varepsilon_{k+1}\| = \sqrt{\|x_{k+1}\|^2 - \|p_{F_k}(x_{k+1})\|^2}.$$

Proposition $ $2.**

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et $(x_1, ..., x_k)$ une famille génératrice de F. Pour $x, y \in E$, on a :
$$y = p_F(x) \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} y \in F \\ (x - y|x_i) = 0 \ \forall i \in [\![1, k]\!]. \end{cases}$$

Exercice $ $1.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire
$$(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$
Déterminer la projection orthogonale de X^n sur $F = \mathbb{R}_1[X]$.

Correction.

On a $\deg(p_F(X^n)) = 1$ donc $p_F(X^n) = aX + b$. De plus, on a :
$$\begin{cases} (X^n - p_F(X^n)|1) = 0 \\ (X^n - p_F(X^n)|X) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{a+2b}{2} \\ \dfrac{1}{n+2} = \dfrac{2a+3b}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{6n}{(n+1)(n+2)} \\ b = \dfrac{2-2n}{(n+1)(n+2)} \end{cases}$$
d'où $p_F(X^n) = \frac{1}{(n+1)(n+2)}(6nX + 2 - 2n)$.

2. Distance à un sous-espace de dimension finie

On rappelle ici la définition de distance à une partie de E :

Définition $ $2.** Distance à une partie

Soit $x \in E$ et $A \subset E$. On appelle **distance** de x à A et on note $d(x, A)$ la quantité
$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Proposition **3.

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et $x \in E$. Alors la distance $d(x,F)$ de x à F est atteinte en un unique point de F : le projeté orthogonale $p_F(x)$ de x sur F. Autrement dit :

— $d(x,F) = \|x - p_F(x)\|$ et ;

— pour tout $y \in F$, $d(x,F) = \|x-y\|$ implique $y = p_F(x)$.

Démonstration.

Soit $y \in F$. Alors on a $x - y = \underbrace{x - p_F(x)}_{\in F^\perp} + \underbrace{p_F(x) - y}_{\in F}$.

D'après le théorème de Pythagore, on a

$$\|x-y\|^2 = \|x-p_F(x)\|^2 + \|p_F(x)-y\|^2 \geq \|x-p_F(x)\|^2.$$

Ceci étant vrai pour tout $y \in F$, on a : $d(x,F) \geq \|x - p_F(x)\|$. Or, $p_F(x) \in F$ donc $d(x,F) \leq \|x-p_F(x)\|$. Il en résulte que $d(x,F) = \|x-p_F(x)\|$.

De plus, pour $y \in F$, si $d(x,F) = \|x-y\|$, alors, d'après le théorème de Pythagore,

$$\|y-p_F(x)\|^2 = \|x-y\|^2 - \|x-p_F(x)\|^2 = \|x-y\|^2 - d(x,F)^2 = 0.$$

□

Exercice **2.

Déterminer la quantité $A = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt$.

Correction.

On remarque, en considérant $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ et en notant $\mathbb{R}_1[X]$, que

$$A = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2-at-b)^2 dt = d(X^2,F)^2 = d(X^2, p_F(X^2))^2$$

En reprenant le résultat de l'exercice **1, on obtient $p_F(X^2) = X - \frac{1}{6}$, d'où

$$A = \int_0^1 (t^2 - t + \frac{1}{6})^2 dt = \frac{1}{180}.$$

Corollaire **1.

Soit F un sous-espace de dimension finie k, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_k)$ une base orthonormale de F et $x \in E$. Alors on a :

$$d(x,F)^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^k (e_i|x)^2.$$

Démonstration.

On a $p_F(x) = \sum_{i=1}^{k} (e_i|x)e_i$, et $x - p_F(x) \perp p_F(x)$, donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$d(x,F)^2 = \|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{k} (e_i|x)^2.$$

□

Théorème ∗∗1.

Soit $(e_1, ..., e_k)$ une famille orthonormale de E. Alors on a :

$$\sum_{i=1}^{k} (e_i|x)^2 \leq \|x\|^2.$$

Démonstration.

On applique le corollaire précédent à $F = \text{Vect}(e_1, ..., e_k)$. Alors on a :

$$\|x\|^2 = d(x,F)^2 + \sum_{i=1}^{k} (e_i|x)^2 \geq \sum_{i=1}^{k} (e_i|x)^2.$$

□

Partie A

Adjoint d'un endomorphisme

Dans cette partie, n désigne un entier naturel et E désigne un espace **euclidien** de dimension n de produit scalaire noté $(\cdot|\cdot)$, de norme associée notée $\|\cdot\|$ et de distance associée notée d.

1. Représentation des formes linéaires

Théorème 1. *Théorème de représentation de Riesz*

Soit φ une forme linéaire sur l'espace euclidien E. Alors il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que, pour tout $x \in E$,

$$\varphi(x) = (a|x).$$

Démonstration.

On considère une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ de E.

- **Existence :** On pose $a = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i)e_i$. Alors, pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$, on a, par linéarité de f :
$$(a|x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i) = \varphi(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \varphi(x).$$
- **Unicité :** Soit $a, b \in E$ tels que, pour tous $x \in E$, $(a|x) = \varphi(x) = (b|x)$. Alors, pour tous $x \in E$:
$$(a - b|x) = (a|x) - (b|x) = \varphi(x) - \varphi(x) = 0.$$
Ainsi, $a - b$ appartient à l'orthogonal de E d'où $a - b = 0_E$ i.e. $a = b$.

$\square$

Corollaire 1.

Soit H un hyperplan de E. Il existe un vecteur non nul $n \in E$ tel que $H = \{n\}^{\perp}$.

Démonstration.

Soit H un hyperplan de E. Alors il existe une forme linéaire non nulle φ telle que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$. D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe (un unique) $n \in E$ tel que $\varphi : x \mapsto (n|x)$; de plus, comme $\varphi \neq \mathbf{0}$, $n \neq 0_E$ et on a :

$$H = \mathrm{Ker}(\varphi) = \{x \in E \mid (n|x) = \varphi(x) = 0\} = \{n\}^{\perp}.$$

$\square$

Remarque 1.

Un tel vecteur n est appelé *vecteur normal* à H ; il n'y a pas unicité d'un vecteur normal : en effet, si n est normal à H, pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, λn est normal à H.

Exercice 1.

Soit φ une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$,

$$\varphi(M) = \mathrm{Tr}(AM).$$

Démonstration.

On munit $M_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $(M|N) = \mathrm{Tr}({}^tMN)$. Comme φ est une forme linéaire, d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique $B \in M_n(\mathbb{R})$ tel que pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, $\varphi(M) = (B|M) = \mathrm{Tr}({}^tBM)$. Ainsi, en posant $A = {}^tB$, on obtient :

$$\varphi(M) = \mathrm{Tr}(AM),$$

et de plus, A est unique par unicité de B. □

2. Adjoint d'un endomorphisme

Lemme 1.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tous $x, y \in E$:

$$(u(x)|y) = (x|v(y)).$$

Démonstration.

- **Existence :** Soit $y \in E$. On note $\varphi : E \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour $x \in E$ par $\varphi_y(x) = (u(x)|y)$. Par linéarité de u et du produit scalaire par rapport à sa première variable, φ est une forme linéaire sur l'espace euclidien E. Ainsi, d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique vecteur $a_y \in E$ tel que $\varphi_y(x) = (a_y|x)$ pour tous $x \in E$.

  Par suite, l'application $v : y \mapsto a_y$ est bien définie de E dans lui-même et on a alors, pour tous $x, y \in E$:
  $$(u(x)|y) = \varphi_y(x) = (a_y|x) = (x|a_y) = (x|v(y)).$$
  De plus, pour $y, z \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a, pour tout $x \in E$, par linéarité du produit scalaire par rapport à la seconde variable :
  $$\begin{array}{rcl} (x|v(\lambda y + \mu z)) & = & (u(x)|\lambda y + \mu z) \\ & = & \lambda(u(x)|y) + \mu(u(x)|z) \\ & = & \lambda(x|v(y)) + \mu(x|v(z)) \\ (x|v(\lambda y + \mu z)) & = & (x|\lambda v(y) + \mu v(z)); \end{array}$$

donc $(x|v(\lambda y+\mu z)-(\lambda v(y)+\mu v(z)))=0$, pour tout $x\in E$, d'où :

$$v(\lambda y+\mu z)=\lambda v(y)+\mu v(z).$$

Ainsi, v est un endomorphisme de E.
Ce qui prouve l'existence.

- **Unicité :** Soit $v,w\in\mathcal{L}(E)$ tels que, pour tous $x,y\in E$:

$$(x|v(y))=(u(x)|y)=(x|w(y)).$$

Soit $y\in E$. alors pour tout $x\in E$:

$$(x|v(y)-w(y))=(x|v(y))-(x|w(y))=(u(x)|y)-(u(x)|y)=0.$$

Par suite, $v(y)=w(y)$.
Donc $v=w$. Ce qui prouve l'unicité.

$\square$

Le lemme précédent légitime la définition suivante :

Définition 1.

Soit $u\in\mathcal{L}(E)$. On appelle **endomorphisme adjoint** - ou simplement **adjoint** - de u l'unique endomorphisme de E noté u^* tel que, pour tous $x,y\in E$:

$$(u(x)|y)=(x|u^*(y))$$

Exemple 1.

— Si u est une homothéthie de E, alors $u^*=u$.

> En effet, pour $u=\lambda\mathrm{Id}_E$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$, on a, pour tous $x,y\in E$:
>
> $$(u(x)|y)=(\lambda x|y)=\lambda(x|y)=(x|\lambda y)=(x|u(y)).$$
>
> Par suite, $u^*=u$.

— Pour $E=\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique et $f\in\mathcal{L}(E)$ tel que $f:(x,y)\mapsto(x+2y,x)$, on a $f^*=g:(x,y)\mapsto(x+y,2x)$.

> En effet, pour tous $(x,y),(a,b)\in E$:
>
> $$(f(x,y)|(a,b))=(x+2y)a+xb=x(a+b)+y.2a=((x,y)|g(a,b))$$
>
> Par suite, $f^*=g$.

3. Propriétés de l'adjoint

Proposition 2. *Matrice de l'adjoint dans une base orthonormale*

Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base **orthonormale** de E. On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$.
L'endomorphisme v est l'adjoint de u i.e. $v = u^*$ si, et seulement si, $B = {}^tA$.
En particulier, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = {}^tA$.

Démonstration.

Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$, u^* son adjoint, $\mathcal{B}$ une base **orthonormale** de E. On note $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$.

($\Rightarrow$) On suppose $v = u^*$. Comme $\mathcal{B}$ est orthonormale, on a, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$:

$$b_{ij} = (u^*(e_j)|e_i) = (e_j|u(e_i)) = (u(e_i)|e_j) = a_{ji}.$$

car u^* est l'adjoint de u.
Par suite, on a $B = {}^tA$.

($\Leftarrow$) On suppose $B = {}^tA$. Soit $x, y \in E$. On note $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$. On a :

$$(u(x)|y) = {}^t(AX)Y = {}^tX \underbrace{{}^tA}_{=B} Y = {}^tX(BY) = (x|v(y))$$

Par suite, par unicité de l'adjoint de u, on a $v = u^*$.

$\square$

Proposition 3.

L'application $u \mapsto u^*$ est un automorphisme involutif de $\mathcal{L}(E)$.

Démonstration.

Notons $\mathrm{Ad} : u \mapsto u^*$.

— *1ère façon : avec la définition.*
L'application Ad va bien de $\mathcal{L}(E)$ dans lui-même. Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a, pour tous $x, y \in E$:

$$\begin{aligned} ((\lambda u + \mu v)(x)|y) &= \lambda(u(x)|y) + \mu(v(x)|y) \\ &= \lambda(x|u^*(y)) + \mu(x|v^*(y)) \\ ((\lambda u + \mu v)(x)|y) &= (x|(\lambda u^* + \mu v^*)(y)). \end{aligned}$$

Donc, par unicité de l'adjoint :

$$\mathrm{Ad}\,(\lambda u + \mu v) = (\lambda u + \mu v)^* = \lambda u^* + \mu v^* = \lambda \mathrm{Ad}(u) + \mu \mathrm{Ad}(v).$$

Par suite Ad est linéaire.

Montrons que Ad est involutive. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $v = u^*$. Pour tous $x, y \in E$:

$$(v(x)|y) = (u^*(x)|y) = (x|u(y)),$$

donc $v^* = u$ par unicité de l'adjoint. Ainsi, $\mathrm{Ad}^2(u) = \mathrm{Ad}(v) = v^* = u$ i.e. Ad est une involution.
Ainsi, Ad est un élément inversible de l'anneau $(\mathcal{L}\left((\mathcal{L}(E))\right), +, \circ)$ car, étant une involution, il est sa propre inverse ; d'où Ad est bijective et donc un automorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

Il en résulte que Ad est un automorphisme involutif de $\mathcal{L}(E)$.

— *2nde façon : avec la proposition précédente.* Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. L'application $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} : \mathcal{L}(E) \to M_n(\mathbb{R})$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels (et même d'algèbres) et l'application $T : A \mapsto {}^tA$ est un automorphisme involutif de $M_n(\mathbb{R})$. Or, on a :
$$\mathrm{Ad} = M^{-1} \circ T \circ M,$$
en effet, pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, on a, d'après la proposition précédente :
$$M^{-1} \circ T \circ M(u) = M^{-1}(T(A)) = M^{-1}\left({}^tA\right) = u^* = \mathrm{Ad}(u).$$
Donc $\mathrm{Ad} : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels comme composée d'isomorphismes d'espces vectoriels.
De plus, comme T est involutif, on a :
$$\mathrm{Ad}^2 = \left(M^{-1} \circ T \circ M\right) \circ \left(M^{-1} \circ T \circ M\right) = M^{-1} \circ T^2 \circ M = M^{-1} \circ T \circ M = \mathrm{Ad}.$$
Il en résulte que Ad est un automorphisme involutif de $\mathcal{L}(E)$.

$\square$

Proposition 4.

Pour tous $u, v \in \mathcal{L}(E)$, $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.

Correction.

Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Pour tous $x, y \in E$, on a :
$$\begin{aligned}(u \circ v(x)|y) &= (u(v(x))|y)\\ &= (v(x)|u^*(y))\\ &= (x|v^*(u^*(y)))\\ (u \circ v(x)|y) &= (x|v^* \circ u^*(y)).\end{aligned}$$
Donc, par unicité de l'adjoint $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.

Remarque : on aurait pu également utiliser une base orthonormale et utiliser la caractérisation matricielle de l'adjoint en remarquant que, pour toutes matrices A, B, ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$.

Proposition 5.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a :
$$\mathrm{Ker}(u^*) = \mathrm{Im}(u)^{\perp} \text{ et } \mathrm{Im}(u^*) = \mathrm{Ker}(u)^{\perp}$$

Démonstration.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrons tout d'abord les inclusions suivantes :

— Montrons $\mathrm{Ker}(u^*) \subset \mathrm{Im}(u)^{\perp}$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(u^*)$. Alors, pour tout $y \in \mathrm{Im}(u)$, il existe

$x' \in E$ tel que $y = u(x')$ et on a :

$$(x|y) = (x|u(x')) = (\underbrace{u^*(x)}_{=0_E}|x') = 0$$

D'où $x \in \mathrm{Im}(u)^\perp$. Par suite, $\mathrm{Ker}(u^*) \subset \mathrm{Im}(u)^\perp$.

— Montrons que $\mathrm{Im}(u^*) \subset \mathrm{Ker}(u)^\perp$. Soit $y \in \mathrm{Im}(u^*)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = u^*(x)$ et on a, pour tout $x' \in \mathrm{Ker}(u)$:

$$(y|x') = (u^*(x)|x') = (x|\underbrace{u(x)}_{=0_E}) = 0$$

D'où $y \in \mathrm{Ker}(u)^\perp$. Par suite, $\mathrm{Im}(u^*) \subset \mathrm{Ker}(u)^\perp$.

Montrons les inclusions réciproques. On rappelle que si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E (comme E est euclidien ici, tout sous-espace vectoriel de E est de dimension finie), $(F^\perp)^\perp = F$ et si $A, B \subset E$ tels que $A \subset B$ alors $B^\perp \subset A^\perp$.
Ainsi, on a, d'après les inclusions précédentes appliquées à $v = (u^*)^* = u$ (car la passage à l'adjoint est involutif) :

—
$$\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}((u^*)^*) \subset \mathrm{Im}(u^*)^\perp$$

d'où :
$$\mathrm{Ker}(u)^\perp \supset \mathrm{Im}(u^*).$$

Par suite, $\mathrm{Im}(u^*) = \mathrm{Ker}(u)^\perp$.

—
$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}((u^*)^*) \subset \mathrm{Ker}(u^*)^\perp$$

d'où :
$$\mathrm{Im}(u)^\perp \supset \mathrm{Ker}(u^*).$$

Par suite, $\mathrm{Ker}(u^*) = \mathrm{Im}(u)^\perp$.

□

Exercice 2.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer (par forcément dans l'ordre indiqué) que :

$$\mathrm{rg}(u^*) = \mathrm{rg}(u) \quad \mathrm{Tr}(u^*) = \mathrm{Tr}(u) \quad \det(u^*) = \det(u)$$

et en terme de réduction :

$$\chi_{u^*} = \chi_u \quad \mathrm{Sp}(u^*) = \mathrm{Sp}(u) \quad \pi_{u^*} = \pi_u.$$

En déduire les liens potentiels entre diagonalisation/trigonalisation de u et u^*.

Proposition 6.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E. Si F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.

Démonstration.

On suppose F stable par u. Soit $x \in F^\perp$. Alors, pour tout $y \in F$, $u(y) \in F$ et :

$$(u^*(x)|y) = (\underbrace{x}_{\in F^\perp} | \underbrace{u(y)}_{\in F}) = 0$$

D'où $u^*(x) \in F^\perp$.
Il en résulte que $F^\perp$ est stable par u^*. $\square$

Partie B

Isométries vectorielles et matrices orthogonales

Dans cette partie, n désigne un entier naturel et E désigne un espace **euclidien** de dimension n de produit scalaire noté $(\cdot|\cdot)$, de norme associée notée $\|\cdot\|$ et de distance associée notée d.

1. Matrices orthogonales

a. Définitions

Définition 2. *Matrice orthogonale*

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. On dit M est une **matrice orthogonale** si ${}^tMM = I_n$.
On appelle **groupe orthogonal** d'ordre n et on note $O_n(\mathbb{R})$ (ou encore $O(n)$) l'ensemble des matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$ i.e.

$$O_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tMM = I_n\}.$$

Définition-Proposition 3.

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Si $M \in O_n(\mathbb{R})$ alors $\det(M) = \pm 1$;

— si $\det(M) = 1$, on dit M est une matrice orthogonale **directe** (ou **positive**) ;
— si $\det(M) = -1$, on dit M est une matrice orthogonale **indirecte** (ou **négative**) ;

On appelle **groupe spécial orthogonal** d'ordre n et on note $SO_n(\mathbb{R})$ (ou encore $SO(n)$) l'ensemble des matrices orthogonales directes i.e.

$$SO_n(\mathbb{R}) = \{M \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\}.$$

Définition 4. *Matrices orthogonalement semblables*

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. On dit que A et B sont **orthogonalement semblables** s'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $B = PA{}^tP$.

b. Propriétés des matrices orthogonales

On justifie ici la terminologie de "groupe" (spécial) orthogonal :

Proposition 7.

Le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ et le groupe spécial orthogonal $SO_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.
En particulier, si $M \in O_n(\mathbb{R})$, on a $M^{-1} = {}^tM$.

Proposition 8.

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. On note $C_1, ..., C_n$ ses colonnes.
La matrice M est une matrice orthogonale si, et seulement si, la famille $(C_1, ..., C_n)$ est une base orthonormale de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique.

Le même résultat est valable pour les lignes de M.

2. Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie

On rappelle que dans cette partie, E est en particulier un espace vectoriel réel de dimension finie.

Définition 5. *Orientation*

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. On dit que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ **définissent la même orientation de** E si $\det(P) > 0$ où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.

Orienter l'espace E revient à se fixer une base $\mathcal{B}$ de référence. Ce choix étant fait, on appelle **bases directes**, les bases qui définissent la même orientation que $\mathcal{B}$ et **bases indirectes**, les autres.

Exemple 2.

On oriente $\mathbb{R}^3$ grâce à sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Alors la base (e_2, e_3, e_1) est directe et la base (e_1, e_3, e_2) est indirecte.

Exercice 3.

Montrer que le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt ne change pas l'orientation d'une base.

Proposition 9.

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormales de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$. Alors $P \in O_n(\mathbb{R})$ et de plus, $P \in SO_n(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ définissent la même orientation de E.

Proposition 10.

On suppose que E est orienté. Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormales directes de E, alors $\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}'}$.

3. Isométries vectorielles

a. Définitions et premières propriétés

Définition 6. *Isométrie vectorielle*

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est une **isométrie vectorielle** (ou également un **automorphisme orthogonal**) si, pour tout $x \in E$,
$$\|u(x)\| = \|x\|.$$
On note $O(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E.

Proposition 11.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $u \in O(E)$ alors u est un automorphisme de E.

Démonstration.

On suppose $u \in O(E)$. Alors $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$; en effet, si $x \in \mathrm{Ker}(u)$, alors $\|x\| = \|u(x)\| = \|0_E\| = 0$, donc par séparation de la norme, $x = 0_E$. Par suite, u est un endomorphisme injectif en dimension finie : il est donc bijectif ; ainsi, u est un automorphisme de E. $\square$

Proposition 12.

Soit $u \in O(E)$. On a $\mathrm{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$.

Démonstration.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, alors, pour tout vecteur propre unitaire x associé à λ, on a :
$$1 = \|x\| = \|u(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|.$$
D'où $\lambda = \pm 1$. $\square$