

## Chapitre XIII

# Ensembles dénombrables et familles sommables

### Table des matières

<b>Partie A : Dénombrabilité</b>	<b>2</b>
1. Définition, exemples et premières propriétés . . . . .	2
2. Caractérisations des ensembles au plus dénombrables . . . . .	9
3. Opérations sur les ensembles dénombrables . . . . .	10
4. Ensembles infinis non dénombrables . . . . .	13
<b>Partie B : Familles sommables</b>	<b>19</b>
1. Familles sommables de nombres réels positifs . . . . .	19
2. Familles sommables de nombres complexes . . . . .	23
3. Applications des familles sommables . . . . .	26
4. Exercices . . . . .	30
<b>Exercices et problèmes</b>	<b>36</b>

## Partie A

### Dénombrabilité

Dans cette partie,  $E$  et  $F$  désignent des ensembles quelconques.

#### 1. Définition, exemples et premières propriétés

##### Définition 1. Dénombrabilité

- On dit que  $E$  est **au plus dénombrable** s'il est en bijection avec une partie de  $\mathbb{N}$ .
- On dit que  $E$  est **dénombrable** s'il est en bijection avec  $\mathbb{N}$ .

##### Exemple 1.

- L'ensemble  $\mathbb{N}$  et  $\mathbb{N}^*$  sont dénombrables.

Pour la dénombrabilité de  $\mathbb{N}$ , il suffit de considérer l'identité. Quant à  $\mathbb{N}^*$ , l'application  $f : n \mapsto n + 1$  est une bijection de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}^*$  (sa réciproque est  $g : n \mapsto n - 1$ ).

- L'ensemble  $\mathbb{Z}$  est dénombrable.

On définit l'application  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  telle que, pour  $n \in \mathbb{N}$

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

i.e.  $f(0) = 0, f(1) = -1, f(2) = 1, f(3) = -2, f(4) = 2, \text{ etc...}$

$f$  est bijective de réciproque  $f^{-1} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$  :

$$f^{-1}(n) = \begin{cases} 2k & \text{si } k \geq 0 \\ -(2k + 1) & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

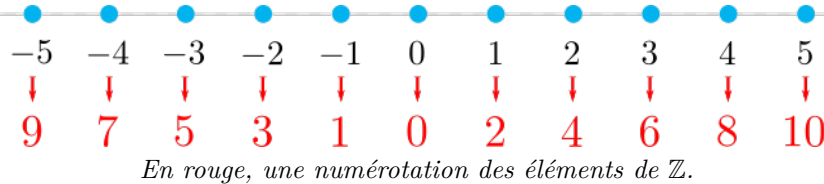
- Un ensemble fini est au plus dénombrable.

En effet, si son cardinal est  $n \in \mathbb{N}$ , alors il est en bijection avec la partie finie de  $\mathbb{N}$  des nombres entiers compris entre 1 et  $n$  i.e.  $\llbracket 1, n \rrbracket$  (si  $n = 0$ , il s'agit de l'ensemble vide qui est bien une sous-partie de  $\mathbb{N}$ ).

### Remarque 1.

Déterminer une bijection entre  $E$  et  $\mathbb{N}$  revient à *numéroter* de manière unique tous les éléments de  $E$  avec les nombres entiers naturels.

Voici graphiquement ce que donne la numérotation de  $\mathbb{Z}$  de l'exemple précédent (le sens des flèches dans la figure représente la fonction  $f^{-1}$  de l'exemple) :



### Exercice 1.

Montrer que  $2\mathbb{N}$  est un ensemble dénombrable.

#### Correction.

On définit  $f : \mathbb{N} \rightarrow 2\mathbb{N}$  par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = 2n$$

Alors  $f$  est bijective : sa réciproque est  $g : 2\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  où, pour tout  $k \in 2\mathbb{N}$ ,  $g(k) = \frac{k}{2}$ .

En fait, on peut montrer plus généralement le résultat suivant :

### Proposition 1.

Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{N}$ . Si  $A$  est infinie, alors  $A$  est dénombrable.

#### Démonstration.

Soit  $A$  une partie infinie de  $\mathbb{N}$ . Alors  $A$  est non vide - car l'ensemble vide est un ensemble fini (de cardinal 0), et  $A$  est non majoré dans  $\mathbb{N}$  car, si on suppose par l'absurde qu'il est majoré par  $n \in \mathbb{N}$ , alors  $A \subset \llbracket 0, n \rrbracket$  qui est fini, contradiction.

On construit par récurrence une suite strictement croissante  $(u_n)$  à valeurs dans  $A$  qui parcourt, dans l'ordre, tous les éléments de  $A$  :

- **Initialisation.** Comme  $A$  est une partie non vide de  $\mathbb{N}$ ,  $A$  possède un plus petit élément  $\min(A)$ . On note alors  $u_0 = \min(A)$ .
- **Hérédité.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose  $u_0, \dots, u_n$  construits. Comme  $A$  n'est pas majoré par  $u_n$ , l'ensemble  $\{k \in A \mid k > u_n\}$  est une partie non vide de  $\mathbb{N}$  et donc possède un plus petit élément que l'on note  $u_{n+1}$  i.e.

$$u_{n+1} = \min(\{k \in A \mid k > u_n\}).$$

Ainsi la fonction de  $\mathbb{N}$  dans  $A$  associée à la suite  $(u_n)$ ,  $\varphi : n \mapsto u_n$ , est une bijection.

En effet, elle est :

- *injective.* Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par construction, on a  $u_{n+1} > u_n$ . Par suite la suite  $(u_n)$  est strictement croissante et donc la fonction  $\varphi$  l'est aussi. Ainsi,  $\varphi$  est injective.

— *surjective*. Soit  $k \in A$ . Comme la suite  $(u_n)$  est strictement croissante, il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $u_{m+1} > k$ . L'ensemble de ces  $m$  est une partie non vide de  $\mathbb{N}$ , donc il en existe un plus petit que l'on note  $n$  i.e.  $u_{n+1} > k$  et  $k \geq u_n$ .

Or, par définition,  $u_{n+1}$  est le plus petit élément de  $A$  strictement plus grand que  $u_n$  donc l'inégalité  $u_{n+1} > k > u_n$  est impossible. Ainsi,  $\varphi(n) = u_n = k$ . Par suite,  $\varphi$  est surjective.  $\square$

### Corollaire 1.

Si  $E$  est au plus dénombrable et infini, alors  $E$  est dénombrable.

#### Démonstration.

On suppose  $E$  au plus dénombrable et infini. Comme  $E$  est au plus dénombrable, il existe une partie  $A$  de  $\mathbb{N}$  en bijection avec  $E$ . De plus,  $E$  étant infini, alors  $A$  l'est aussi car  $E$  et  $A$  sont en bijection. Ainsi,  $A$  est une partie infinie de  $\mathbb{N}$  et donc en bijection avec  $\mathbb{N}$  d'après la proposition précédente. Par suite, par transitivité de la relation "être en bijection",  $E$  est en bijection avec  $\mathbb{N}$  et donc  $E$  est dénombrable.  $\square$

### Exercice 2. $\mathbb{N}^2$ est dénombrable : première preuve.

On note, pour  $k \in \mathbb{N}$  :

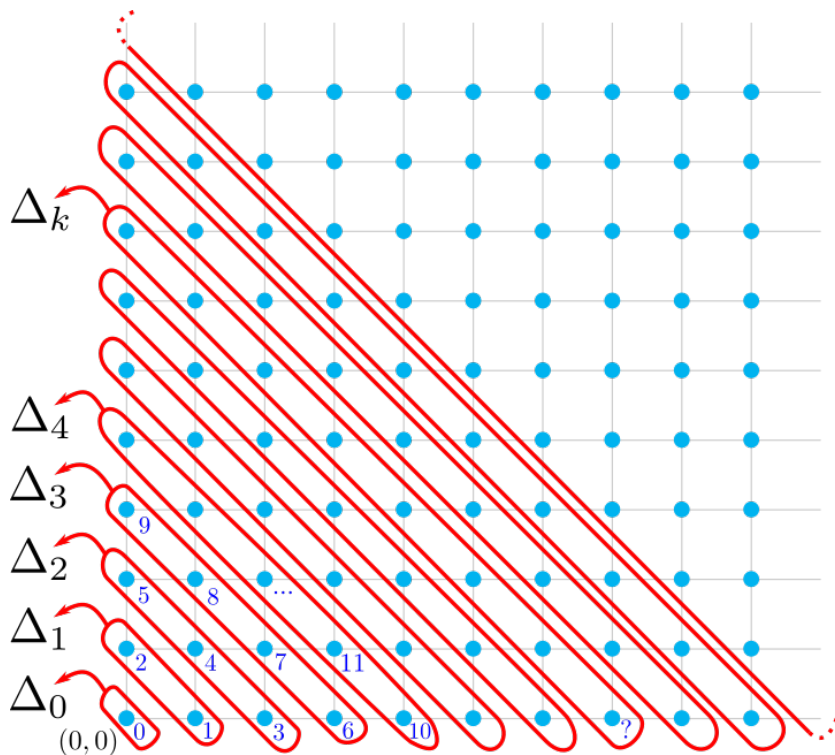
$$\Delta_k = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid n + m = k\}.$$

- (a) Montrer que  $(\Delta_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une partition de  $\mathbb{N}^2$ .
- (b) Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Montrer que

$$\Delta_k = \{(n, k - n) \mid n \in \llbracket 0, k \rrbracket\}.$$

puis déterminer le cardinal de  $\Delta_k$ .

- On cherche à construire une bijection  $f$  de  $\mathbb{N}^2$  dans  $\mathbb{N}$  en s'appuyant sur l'idée de numérotation suivante :



- (a) 1ère étape : déterminer la numérotation  $f(k, 0)$  de  $(0, k)$  pour  $k \in \mathbb{N}$ .
- (b) 2ème étape : fixons  $k \in \mathbb{N}$  et l'ensemble  $\Delta_k$  associé. Si  $\alpha = f(k, 0)$ , quelle est la numérotation  $f(n, m)$  de  $(n, m) \in \Delta_k$  ?
- (c) Exprimer  $f(n, m)$  pour tout  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$  puis montrer que  $f$  est une bijection de  $\mathbb{N}^2$  dans  $\mathbb{N}$ .
- (d) Montrer que la fonction  $f$  ainsi construite est une bijection de  $\mathbb{N}^2$  dans  $\mathbb{N}$  puis conclure.

Correction.

1. (a) Soit  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ . Alors, pour  $k = n + m \in \mathbb{N}$ , on a  $(n, m) \in \Delta_k$ . Ainsi,  $\mathbb{N}^2 \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Delta_k$ . L'inclusion réciproque étant immédiate, on a donc :

$$\mathbb{N}^2 = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Delta_k.$$

Soit  $k, l \in \mathbb{N}$ .

Supposons  $\Delta_k \cap \Delta_l \neq \emptyset$ . Alors il existe  $(n, m) \in \Delta_k \cap \Delta_l$ . Ainsi, comme  $(n, m) \in \Delta_k$  et  $(n, m) \in \Delta_l$ , on a :

$$k = n + m = l$$

Par suite, par contraposée, si  $k \neq l$ , alors  $\Delta_k \cap \Delta_l = \emptyset$ .

Il en résulte que  $(\Delta_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une partition de  $\mathbb{N}^2$ .

- (b) Soit  $k \in \mathbb{N}$ . On note  $\delta_k = \{(n, k - n) \mid n \in \llbracket 0, k \rrbracket\}$ . Soit  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ .

Si  $(n, m) \in \Delta_k$ , alors  $n + m = k$  d'où  $m = k - n$  et comme  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq n \leq n + m = k$  et donc  $n \in \llbracket 0, k \rrbracket$ . Ainsi,  $(n, m) \in \delta_k$ .

Réciproquement, si  $(n, m) \in \delta_k$ , alors  $m = k - n$  donc  $n + m = k$  et ainsi,  $(n, m) \in \Delta_k$ . Il en résulte que  $\Delta_k = \delta_k$ .

La fonction  $n \mapsto (n, k - n)$  est une bijection de  $\llbracket 0, k \rrbracket$  dans  $\Delta_k$  donc  $\#\Delta_k = k + 1$ .

2. (a) Soit  $k \in \mathbb{N}$ . On remarque sur la figure que  $f(k, 0) = \# \left( \bigcup_{l=0}^{k-1} \Delta_l \right)$ . Par suite, on a, d'après les questions 1. (a) et 1. (b) :

$$\begin{aligned} f(k, 0) &= \# \left( \bigcup_{l=0}^{k-1} \Delta_l \right) \\ &= \sum_{l=0}^{k-1} \#\Delta_l \\ &= \sum_{l=0}^{k-1} (l + 1) = \sum_{l=1}^k l \\ f(k, 0) &= \frac{k(k + 1)}{2}. \end{aligned}$$

- (b) Soit  $k \in \mathbb{N}$  et  $(n, m) \in \Delta_k$ . On note  $\alpha = f(k, 0)$ . On remarque qu'en se déplaçant dans  $\Delta_k$  à partir de  $(k, 0)$  et en augmentant l'ordonnée de 1 (et donc en diminuant l'abscisse de 1), la numérotation augmente de 1. Ainsi, la numérotation de  $(n, m)$  est :

$$f(n, m) = \alpha + m.$$

- (c) Soit  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ . On pose  $k = n + m$ . Alors  $(n, m) \in \Delta_k$  et ainsi, en reprenant les deux questions précédentes, on obtient :

$$f(n, m) = f(k, 0) + m = \frac{k(k + 1)}{2} + m$$

et donc, au final :

$$f(n, m) = \frac{(n + m)(n + m + 1)}{2} + m.$$

- (d) — Montrons que  $f$  est injective. Soit  $(n, m), (p, q) \in \mathbb{N}^2$ . On suppose  $f(n, m) = f(p, q)$ . On note  $k = n + m$  et  $l = p + q$ . Quitte à échanger les couples, on peut supposer  $k \leq l$ .

Comme  $n, m \in \mathbb{N}$  et  $n + m \leq k$ , on a  $m \leq k$  et donc :

$$f(n, m) = \frac{k(k + 1)}{2} + m \leq \frac{k(k + 1)}{2} + k = \frac{k(k + 3)}{2}.$$

et comme  $q \geq 0$ , on a :

$$f(p, q) = \frac{l(l + 1)}{2} + q \geq \frac{l(l + 1)}{2},$$

donc :

$$l^2 + l = l(l + 1) \leq 2f(p, q) = 2f(n, m) \leq k(k + 3).$$

Supposons par l'absurde que  $k < l$ . Alors, comme  $k, l$  sont entiers,  $k \leq l - 1$  et donc :

$$l^2 + l \leq (l - 1)(l + 2) = l^2 + l - 2$$

d'où  $0 \leq -2$ . Contradiction !

Ainsi  $k = l$ .

On a alors :

$$\frac{k(k+1)}{2} + m = f(n, m) = f(p, q) = \frac{l(l+1)}{2} + q = \frac{k(k+1)}{2} + q$$

d'où  $m = q$ ; puis, comme  $n + m = k = l = p + q$ , on obtient  $n = p$ .

Par suite,  $(n, m) = (p, q)$  et donc  $f$  est injective.

- Montrons que  $f$  est surjective. Soit  $a \in \mathbb{N}$ . L'application  $x \mapsto x^2 + x - 2a$  admet pour racine dans  $\mathbb{R}_+$  le nombre  $r = \frac{-1 + \sqrt{1+8a}}{2}$  et on pose  $k = \lfloor r \rfloor \in \mathbb{N}$ . Alors, par définition de la partie entière, on a  $k \leq r < k + 1$  et donc :

$$k(k+1) \leq r(r+1) = r^2 + r = 2a \text{ et } (k+1)(k+2) > r(r+1) = r^2 + r = 2a$$

Ainsi, on a :

$$\frac{k(k+1)}{2} \leq a < \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

On pose alors  $m = a - \frac{k(k+1)}{2}$  et  $n = k - m$ .

D'après ce qui précède,  $m \geq 0$  et est un entier car  $a, \frac{k(k+1)}{2}$  le sont (pour ce dernier, soit on peut le voir comme la somme des  $k$  premiers entiers naturels non nuls, soit on remarque que le produit de deux entiers consécutifs est pair). De plus, toujours d'après ce qui précède, on a :

$$\begin{aligned} m &= a - \frac{k(k+1)}{2} \\ m &< \frac{(k+1)(k+2)}{2} - \frac{k(k+1)}{2} = \frac{(k+1)}{2} \times (k+2-k) = k+1 \end{aligned}$$

d'où, comme  $m, k$  sont entiers,  $m \leq k$ . Par suite,  $n = k - m$  est un entier positif.

Ainsi,  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ ,  $n + m = k$  et on a :

$$f(n, m) = \frac{(n+m)(n+m+1)}{2} + m = \frac{k(k+1)}{2} + a - \frac{k(k+1)}{2} = a.$$

Il en résulte que  $f$  est surjective.

Ainsi,  $f$  est une bijection de  $\mathbb{N}^2$  dans  $\mathbb{N}$  et donc  $\mathbb{N}^2$  est un ensemble dénombrable car en bijection avec  $\mathbb{N}$ .

### Exercice 3.

En utilisant le fait que  $\mathbb{N}^2$  est dénombrable, montrer que  $\mathbb{N}^3$  est dénombrable, puis, plus généralement, que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{N}^k$  est dénombrable.

Correction.

Soit  $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  une bijection (d'après l'exercice précédent,  $\mathbb{N}^2$  est dénombrable donc une telle bijection existe).

- On pose, pour  $(p, q, r) \in \mathbb{N}^3$  :

$$g(p, q, r) = f(f(p, q), r),$$

et on considère la fonction  $g : \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$  ainsi définie.

— Montrons que  $g$  est injective. Soit  $(p, q, r), (p', q', r') \in \mathbb{N}^3$ . On suppose  $g(p, q, r) = g(p', q', r')$ . Alors, par injectivité de  $f$ , on a  $f(p, q) = f(p', q')$  et  $r = r'$ , puis, toujours par injectivité de  $f$ ,  $p = p'$  et  $q = q'$ . Par suite,  $(p, q, r) = (p', q', r')$ .

Il en résulte que  $g$  est injective.

— Montrons que  $g$  est surjective. Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Comme  $f$  est surjective, il existe  $(n, r) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $k = f(n, r)$  puis, toujours par surjectivité de  $f$ , il existe  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $n = f(p, q)$ .

Par suite,  $(p, q, r) \in \mathbb{N}^3$  et :

$$k = f(n, r) = f(f(p, q), r) = g(p, q, r).$$

Il en résulte que  $g$  est surjective.

Ainsi,  $g$  est une bijection de  $\mathbb{N}^3$  dans  $\mathbb{N}$  et donc  $\mathbb{N}^3$  est dénombrable.

- On montre, par récurrence sur  $\mathbb{N}^*$ , que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{N}^k$  est dénombrable.

— *Initialisation.* Pour  $k = 1$ ,  $\mathbb{N}$  est dénombrable car en bijection avec lui-même via l'identité.

— *Hérédité.* Soit un  $k \in \mathbb{N}^*$ . On suppose  $\mathbb{N}^k$  dénombrable. Alors il existe une bijection  $f_k : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ .

On pose, pour  $p = (p_1, \dots, p_{k+1}) \in \mathbb{N}^{k+1}$  :

$$g(p) = f(f_k(p_1, \dots, p_k), p_{k+1}),$$

où  $f$  est la bijection initiale de  $\mathbb{N}^2$  dans  $\mathbb{N}$  et on considère la fonction  $g : \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$  ainsi définie.

— Montrons que  $g$  est injective. Soit  $p = (p_1, \dots, p_{k+1}), p' = (p'_1, \dots, p'_{k+1}) \in \mathbb{N}^{k+1}$ . On suppose  $g(p) = g(p')$ . Alors, par injectivité de  $f$ , on a  $f_k(p_1, \dots, p_k) = f_k(p'_1, \dots, p'_k)$  et  $p_{k+1} = p'_{k+1}$ , puis, par injectivité de  $f_k$ , pour tout  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ ,  $p_i = p'_i$ . Par suite,  $p = p'$ .

Il en résulte que  $g$  est injective.

— Montrons que  $g$  est surjective. Soit  $m \in \mathbb{N}$ . Comme  $f$  est surjective, il existe  $(n, r) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $m = f(n, r)$  puis, par surjectivité de  $f_k$ , il existe  $(p_1, \dots, p_k) \in \mathbb{N}^k$  tel que  $n = f_k(p_1, \dots, p_k)$ .

Par suite,  $p = (p_1, \dots, p_k, r) \in \mathbb{N}^{k+1}$  et :

$$m = f(n, r) = f(f_k(p_1, \dots, p_k), r) = g(p).$$

Il en résulte que  $g$  est surjective.

Ainsi,  $g$  est une bijection de  $\mathbb{N}^{k+1}$  dans  $\mathbb{N}$  et donc  $\mathbb{N}^{k+1}$  est dénombrable.

Il en résulte que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{N}^k$  est dénombrable.

*Remarque :* si on ne regarde pas la démonstration de la récurrence précédente, on pourrait penser qu'elle permet de montrer d'elle-même que  $\mathbb{N}^2$  est dénombrable : il n'en est rien ! La démonstration repose cruciallement sur le fait qu'on possède à l'avance une bijection de  $\mathbb{N}^2$  dans  $\mathbb{N}$  !

### Proposition 2.

On suppose que  $E$  et  $F$  sont en bijection. Si  $E$  est au plus dénombrable (respectivement dénombrable), alors  $F$  l'est aussi.

#### Correction.

On suppose que  $E$  et  $F$  sont en bijection et que  $E$  est au plus dénombrable. Alors il existe une bijection  $f$  de  $E$  dans  $F$  et il existe  $A \subset \mathbb{N}$  et  $g$  une bijection de  $A$  dans  $E$ . La composée de deux bijections étant une bijection,  $f \circ g$  est une bijection de  $A$  dans  $F$ . Ainsi,  $F$  est en bijection avec la partie  $A$  de  $\mathbb{N}$ , donc  $F$  est au plus dénombrable. La preuve pour l'énoncé "respectivement" est la même en remplaçant  $A$  par  $\mathbb{N}$ .

### Proposition 3.

Soit  $F \subset E$ . Si  $E$  est au plus dénombrable, alors  $F$  est au plus dénombrable.

#### Démonstration.

On suppose  $E$  au plus dénombrable. Alors il existe une bijection  $f : E \rightarrow A$  où  $A \subset \mathbb{N}$ . Alors la restriction  $f|_F : F \rightarrow A$  de  $f$  à  $F$  est injective et surjective de  $F$  dans  $f(F) \subset A \subset \mathbb{N}$ . Par suite,  $F$  est en bijection avec une partie de  $\mathbb{N}$ , d'où  $F$  est au plus dénombrable.  $\square$

### Proposition 4.

Soit  $A$  une partie finie de  $E$ . Si  $E$  est dénombrable, alors  $E \setminus A$  l'est aussi.

#### Démonstration.

Soit  $A$  une partie finie de  $E$ . On suppose  $E$  dénombrable. Alors  $E \setminus A \subset E$  est au plus dénombrable d'après la proposition 3 et  $E \setminus A$  est infini car  $E$  est infini et  $A$  est finie. Par suite, d'après le corollaire 1,  $E \setminus A$  est dénombrable.  $\square$

## 2. Caractérisations des ensembles au plus dénombrables

### Proposition 5.

L'ensemble  $E$  est au plus dénombrable si, et seulement si, il existe une injection de  $E$  dans  $\mathbb{N}$ .

#### Démonstration.

Si  $E$  est au plus dénombrable, alors il existe une bijection  $f$  de  $E$  dans  $A \subset \mathbb{N}$ . Par suite,  $f : E \rightarrow \mathbb{N}$  est injective.

Réciproquement, s'il existe une injection  $f$  de  $E$  dans  $\mathbb{N}$ , alors  $f : E \rightarrow f(E)$  est une bijection de

$E$  dans la partie  $f(E)$  de  $\mathbb{N}$ . Donc  $E$  est au plus dénombrable.  $\square$

**Exemple 2.**  $\mathbb{N}^2$  est dénombrable : deuxième preuve

L'ensemble  $\mathbb{N}^2$  est dénombrable : en effet, l'application  $(n, m) \rightarrow 2^n 3^m$  est injective par unicité de la décomposition d'un nombre entier en facteurs premiers et de plus,  $\mathbb{N}^2$  est infini.

**Proposition 6.**

On suppose  $E$  non vide. Alors  $E$  est au plus dénombrable si, et seulement si, il existe une surjection de  $\mathbb{N}$  sur  $E$ .

*Démonstration.*

- ( $\Rightarrow$ ). On suppose  $E$  au plus dénombrable. Alors il existe  $A \subset \mathbb{N}$  et  $f : A \rightarrow E$  une bijection. Comme  $E$  est non vide, on choisit  $x_0 \in E$  et on construit l'application  $\tilde{f} : \mathbb{N} \rightarrow E$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\tilde{f}(n) = \begin{cases} f(n) & \text{si } n \in A \\ x_0 & \text{si } n \notin A. \end{cases}$$

Alors on a  $\tilde{f}(\mathbb{N}) = f(A) \cup \{x_0\} = f(A) = E$ . Donc  $\tilde{f}$  est une surjection de  $\mathbb{N}$  sur  $E$ .

- ( $\Leftarrow$ ). On suppose qu'il existe  $f : \mathbb{N} \rightarrow E$  une surjection. Montrons qu'il existe une application injective  $g$  de  $E$  dans  $\mathbb{N}$ . Comme  $f$  est surjective, pour tout  $x \in E$ ,  $f^{-1}(\{x\})$  est une partie non vide de  $\mathbb{N}$ . Ainsi, la fonction de  $E$  dans  $\mathbb{N}$  :

$$g : x \mapsto \min(f^{-1}(\{x\}))$$

est injective. En effet, pour  $x, y \in E$  tels que  $g(x) = g(y)$ , on a  $x = f(g(x)) = f(g(y)) = y$ .  $\square$

### 3. Opérations sur les ensembles dénombrables

**Proposition 7.** *Produit cartésien*

Si  $E, F$  sont au plus dénombrables, alors  $E \times F$  est au plus dénombrable.

*Démonstration.*

On suppose  $E, F$  au plus dénombrables. Alors il existe des injections  $f : E \rightarrow \mathbb{N}$  et  $g : F \rightarrow \mathbb{N}$ . Alors la fonction  $(x, y) \mapsto (f(x), g(y))$  est une injection de  $E \times F$  dans  $\mathbb{N}^2$  qui est en bijection avec  $\mathbb{N}$  d'après l'exemple 2. La composée de deux injections étant injective, on construit donc une injection  $E \times F$  dans  $\mathbb{N}$ . Par suite,  $E \times F$  est au plus dénombrable.  $\square$

### Corollaire 2.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $E_1, \dots, E_n$  des ensembles. Si  $E_1, \dots, E_n$  sont au plus dénombrables, alors  $E_1 \times \dots \times E_n$  est au plus dénombrable.

#### Démonstration.

On procède par récurrence sur  $\mathbb{N}^*$  pour montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la propriété  $\mathcal{P}_n =$  "pour tous ensembles  $E_1, \dots, E_n$ , si  $E_1, \dots, E_n$  sont au plus dénombrables, alors  $E_1 \times \dots \times E_n$  est au plus dénombrable".

- *Initialisation.* Soit  $E$  un ensemble. Si  $E$  est au plus dénombrable, alors...  $E$  est au plus dénombrable. D'où  $\mathcal{P}_1$ .
- *Hérédité.* Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On suppose  $\mathcal{P}_n$  vraie. Soit  $E_1, \dots, E_{n+1}$  des ensembles. On suppose  $E_1, \dots, E_{n+1}$  au plus dénombrables. Alors, par hypothèse de récurrence,  $E_1 \times \dots \times E_n$  est au plus dénombrable. De plus, on a :

$$E_1 \times \dots \times E_n \times E_{n+1} = (E_1 \times \dots \times E_n) \times E_{n+1}$$

*En réalité, il y a plutôt une bijection entre ces deux ensembles... mais c'est juste une histoire de parenthèses !*

Ainsi,  $E_1 \times \dots \times E_n$  et  $E_{n+1}$  étant au plus dénombrable d'après la proposition 7,  $E_1 \times \dots \times E_{n+1}$  est au plus dénombrable. D'où  $\mathcal{P}_{n+1}$ .

Ce qui achève le raisonnement par récurrence. Par suite, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tous ensembles  $E_1, \dots, E_n$ , si  $E_1, \dots, E_n$  sont au plus dénombrables, alors  $E_1 \times \dots \times E_n$  est au plus dénombrable.  $\square$

### Exemple 3.

L'ensemble  $\mathbb{Q}$  des nombres rationnels est dénombrable.

En effet, l'application  $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q}$  telle que, pour  $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ ,  $f(p, q) = \frac{p}{q}$  est surjective et l'ensemble  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  est dénombrable car infini et produit cartésien d'ensembles dénombrables. Par suite, il existe une surjection de  $\mathbb{N}$  sur  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{Q}$  est infini, d'où  $\mathbb{Q}$  est dénombrable.

### Exercice 4.

Soit  $A, B$  des parties de  $E$ . Montrer que si  $A, B$  sont au plus dénombrables, alors  $A \cup B$  est au plus dénombrable.

#### Correction.

On suppose  $A, B$  au plus dénombrables. Alors, d'après la proposition 6, il existe  $f_A, f_B$  des surjections de  $\mathbb{N}$  dans  $A$  et de  $\mathbb{N}$  dans  $B$  respectivement. On considère alors l'application  $f : \{0, 1\} \times \mathbb{N}$  dans  $A \cup B$  définie de la manière suivante : pour  $(\varepsilon, n) \in \{0, 1\} \times \mathbb{N}$ ,

$$f(\varepsilon, n) = \begin{cases} f_A(n) & \text{si } \varepsilon = 0 \\ f_B(n) & \text{si } \varepsilon = 1 \end{cases}$$

Pour tout  $x \in A \cup B$ , si  $x \in A$ , alors, par surjectivité de  $f_A$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $x = f_A(n) = f(0, n)$  et si  $x \in B$ , alors, par surjectivité de  $f_B$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $x = f_B(n) = f(1, n)$ . Ainsi,  $x$  possède un antécédent par  $f$ . Par suite,  $f$  est surjective de  $\{0, 1\} \times \mathbb{N}$  dans  $A \cup B$ .

Or,  $\{0, 1\} \times \mathbb{N}$  est infini et produit cartésien d'ensembles au plus dénombrables, donc il est dénombrable (Corollaire 1 et Proposition 7). Ainsi,  $\{0, 1\} \times \mathbb{N}$  et  $\mathbb{N}$  sont en bijection et donc il existe en particulier une surjection  $g$  de  $\mathbb{N}$  sur  $\{0, 1\} \times \mathbb{N}$ .

Par suite,  $f \circ g$  est une surjection de  $\mathbb{N}$  sur  $A \cup B$  comme composée d'applications surjectives et donc  $A \cup B$  est au plus dénombrable d'après la proposition 6.

La proposition suivante généralise l'exercice précédent au cas d'une union au plus dénombrable d'ensemble au plus dénombrable :

**Proposition 8.** Réunion

Soit  $(A_i)_{i \in I}$  une famille de parties de  $E$ . Si  $I$  est au plus dénombrable et si, pour tout  $i \in I$ ,  $A_i$  est au plus dénombrable, alors  $\bigcup_{i \in I} A_i$  est au plus dénombrable.

De plus, s'il existe  $i \in I$  tel que  $A_i$  est dénombrable, alors  $\bigcup_{i \in I} A_i$  est dénombrable.

Démonstration.

On suppose  $I$  non vide, au plus dénombrable et pour tout  $i \in I$ ,  $A_i$  au plus dénombrable. Alors, pour chaque  $i \in I$ , il existe une surjection  $f_i$  de  $\mathbb{N}$  dans  $A_i$  (quitte à le supprimer de la liste, on peut supposer  $A_i$  non vide). Alors la fonction  $f : I \times \mathbb{N} \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$  telle quel, pour  $(i, n) \in I \times \mathbb{N}$  :

$$f(i, n) = f_i(n).$$

est surjective. En effet, pour tout  $a \in \bigcup_{i \in I} A_i$ , il existe  $i \in I$  tel que  $a \in A_i$  et il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $a = f_i(n)$ ; par suite,  $a = f(i, n)$ .

Ainsi, comme  $I \times \mathbb{N}$  est dénombrable, il en résulte que  $\bigcup_{i \in I} A_i$  est dénombrable.  $\square$

**Exercice 5.** Deuxième preuve de la dénombrabilité de  $\mathbb{Q}$

On considère  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \right\}$ .

1. Soit  $x \in \mathbb{Q}$ . Montrer que  $x$  s'écrit de manière unique sous forme de fraction irréductible i.e. qu'il existe un unique couple  $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  tel que  $x = \frac{p}{q}$  et  $p \wedge q = 1$ .

On appelle alors *hauteur* de  $x$  et on note  $h(x)$  l'entier naturel non nul :

$$h(x) = |p| + q.$$

2. Montrer que les ensembles de niveaux  $H_n = \{x \mid h(x) = n\}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$  de la fonction hauteur  $h : x \mapsto h(x)$  de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{N}^*$  sont finis puis en déduire que  $\mathbb{Q}$  est dénombrable.

Correction.

1. Soit  $x \in \mathbb{Q}$ . Alors il existe  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  tels que  $x = \frac{a}{b}$ . Comme  $(a, b) \neq (0, 0)$ , le pgcd de  $a$  et  $b$  est bien défini et on note  $d = a \wedge b$ . Alors il existe  $p \in \mathbb{Z}$  et  $q \in \mathbb{N}^*$  tels que  $a = pd$ ,  $b = qd$  et  $p \wedge q = 1$ . Par suite,  $x = \frac{a}{b} = \frac{pd}{qd} = \frac{p}{q}$ , d'où l'existence de la forme irréductible de  $x$ .

De plus, si  $\frac{p}{q} = x = \frac{p'}{q'}$  avec  $(p, q), (p', q') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  et  $p \wedge q = 1, p' \wedge q' = 1$ , alors  $pq' = qp'$  d'où  $q$  divise  $pq'$  et donc, d'après le théorème de Gauss,  $q$  divise  $q'$  et de manière analogue,  $q'$  divise  $q$ . Ainsi  $q = |q| = |q'| = q'$  et comme  $q \neq 0$  et  $pq = qp'$ , on obtient  $p = p'$ ; donc  $(p, q) = (p', q')$ . D'où l'unicité de la forme irréductible de  $x$ .

2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{Q}$  de forme irréductible  $x = \frac{p}{q}$ .

Si  $x \in H_n$ , alors  $|p| + q = h(x) = n$  donc  $|p| \leq n$  et  $q \leq n$  d'où  $p \in \llbracket -n, n \rrbracket$  et  $q \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Par suite,

$$H_n \subset \left\{ \frac{p}{q} \mid p \wedge q = 1 \text{ et } (p, q) \in \llbracket -n, n \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket \right\}$$

Ainsi, il y a au plus  $(2n + 1)n = \#(\llbracket -n, n \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket)$  éléments dans  $H_n$  et ainsi,  $H_n$  est un ensemble fini.

On remarque alors que :

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} H_n.$$

Ainsi,  $\mathbb{Q}$  est au plus dénombrable comme union au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables car finis (Proposition 8) et de plus,  $\mathbb{Q}$  est infini car, par exemple,  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$  donc  $\mathbb{Q}$  est dénombrable.

**Exercice 6.**

Montrer que  $\mathbb{Q}[X]$  est dénombrable.

Correction.

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on considère  $\mathbb{Q}_n[X]$  l'ensemble des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{Q}$  de degré au plus  $n$ . Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'application  $\varphi_n : \mathbb{Q}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Q}_n[X]$  telle que :

$$\varphi_n : (a_0, \dots, a_n) \mapsto P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$$

est une bijection - tout polynôme de  $\mathbb{Q}[X]$  de degré au plus  $n$  admet un unique  $n$ -uplet de coefficients rationnels.

Or, d'après l'exemple 3,  $\mathbb{Q}$  est dénombrable et donc, d'après le corollaire 2,  $\mathbb{Q}^{n+1}$  l'est aussi. Par suite,  $\mathbb{Q}_n[X]$  est au plus dénombrable d'après la proposition 2.

De plus, on a :

$$\mathbb{Q}[X] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}_n[X]$$

donc, par réunion dénombrable d'ensembles dénombrables (Proposition 8),  $\mathbb{Q}[X]$  est dénombrable.

## 4. Ensembles infinis non dénombrables

Jusque là, nous avons étudié les ensembles au plus dénombrables. Parmi eux, on peut distinguer deux types d'ensembles : les ensembles finis et les ensembles dénombrables (infinis, donc). Un ensemble qui ne serait pas au plus dénombrable serait donc infini et non dénombrable, mais... existe-t-il de tels ensembles ? La réponse arrive sous peu !

### a. Constructions d'ensembles infinis non dénombrables

#### Proposition 9.

On suppose que  $E$  et  $F$  sont en bijection. Si  $F$  est infini non dénombrable, alors  $E$  l'est aussi.

#### Démonstration.

Il s'agit de la contraposée de la proposition 2. □

#### Proposition 10.

On suppose que  $F \subset E$ . Si  $F$  est infini non dénombrable, alors  $E$  l'est aussi.

#### Démonstration.

Il s'agit de la contraposée de la proposition 3. □

### b. Exemples d'ensembles infinis non dénombrables

#### Lemme 1.

Il n'existe aucune surjection de  $E$  sur l'ensemble  $\mathcal{P}(E)$  des parties de  $E$ .

#### Démonstration.

Soit  $f : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$  une application. On note  $A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$ . Alors  $A \subset \mathcal{P}(E)$  n'a pas d'antécédent par  $f$ . En effet, pour  $x \in E$  on a :

— 1er cas :  $x \in A$ . Alors  $f(x) \neq A$  car comme  $x \in A$ , par définition de  $A$ ,  $x \notin f(x)$ .

— 2nd cas :  $x \notin A$ . Alors  $f(x) \neq A$  car comme  $x \notin A$ , par définition de  $A$ ,  $x \in f(x)$ .

Dans tous les cas,  $f(x) \neq A$ .

Il en résulte que  $f$  n'est pas surjective. □

#### Proposition 11.

L'ensemble  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  est infini non dénombrable.

Démonstration.

$\mathcal{P}(\mathbb{N})$  est infini car, par exemple, il contient l'ensemble infini des singletons d'entiers naturels. De plus, d'après le lemme 1, il n'existe pas de surjection de  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  dans  $\mathbb{N}$  et donc, a fortiori, il n'existe pas de bijection entre  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  dans  $\mathbb{N}$ . Par suite,  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  n'est pas dénombrable.  $\square$

### Lemme 2.

Les ensembles  $\mathcal{P}(E)$  et  $\{0, 1\}^E$  sont en bijection.

Démonstration.

On considère la fonction  $f : \{0, 1\}^E \rightarrow \mathcal{P}(E)$  définie de la façon suivante :

$$\text{pour } \varepsilon \in \{0, 1\}^E, f(\varepsilon) = \{x \in E \mid \varepsilon(x) = 1\}.$$

Montrons que  $f$  est une bijection de  $\{0, 1\}^E$  dans  $\mathcal{P}(E)$ .

Pour tout  $A \in \mathcal{P}(E)$ , on considère la fonction indicatrice  $\mathbb{1}_A \in \{0, 1\}^E$  de  $A$  i.e.

$$\mathbb{1}_A : x \mapsto \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose alors  $g : A \mapsto \mathbb{1}_A$  de  $\mathcal{P}(E)$  dans  $\{0, 1\}^E$ . Montrons que  $g$  est la fonction réciproque de  $f$ .

— Calculons  $f \circ g$ . On a, pour tout  $A \in \mathcal{P}(E)$ , par définition de  $\varepsilon_A$  :

$$f \circ g(A) = f(\mathbb{1}_A) = \{x \in E \mid \mathbb{1}_A(x) = 1\} = A.$$

D'où  $f \circ g = \text{Id}_{\mathcal{P}(E)}$ .

— Calculons  $g \circ f$ . Soit  $\varepsilon \in \{0, 1\}^E$ . On pose  $A = f(\varepsilon) = \{x \in E \mid \varepsilon(x) = 1\}$ . Alors on a, pour tout  $x \in E$  : si  $x \in A$ ,  $\mathbb{1}_A(x) = 1 = \varepsilon(x)$  et si  $x \notin A$ ,  $\mathbb{1}_A(x) = 0 = \varepsilon(x)$ . Ainsi,  $\mathbb{1}_A = \varepsilon$  et donc :

$$g \circ f(\varepsilon) = g(A) = \mathbb{1}_A = \varepsilon.$$

D'où  $g \circ f = \text{Id}_{\{0, 1\}^E}$ .

Il en résulte que  $f$  est bijective de  $\{0, 1\}^E$  dans  $\mathcal{P}(E)$  et donc  $\{0, 1\}^E$  et  $\mathcal{P}(E)$  sont en bijection.  $\square$

### Proposition 12.

L'ensemble  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  des suites à valeurs dans la paire  $\{0, 1\}$  est infini non dénombrable.

Démonstration.

D'après le lemme 2,  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  et  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  sont en bijection. Or, d'après la proposition 11,  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  est infini non dénombrable, donc  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  l'est aussi d'après la proposition 9.  $\square$

L'exercice suivant propose de montrer la proposition précédente sans utiliser la bijection entre  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  et  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  en utilisant un raisonnement devenu classique et développé par le mathématicien Georg Cantor

qui est le père de la théorie que nous étudions dans cette partie. Nous utiliserons ce raisonnement pour prouver que  $]0, 1[$  est infini non dénombrable dans la suite :

**Exercice 7.** *Argument diagonal de Cantor*

Montrer que  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  infini non dénombrable grâce à l'argument diagonal de Cantor : supposer par l'absurde qu'il existe une énumération (indexée par  $\mathbb{N}$ ) de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , et construire un élément de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  qui ne peut pas être dans cette énumération (indice : argument "diagonal"!).

En déduire qu'un produit cartésien dénombrable d'ensembles au plus dénombrables n'est pas dénombrable en général.

**Correction.**

Posons  $E = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . On suppose par l'absurde que  $E$  est au plus dénombrable. Alors  $E$  est dénombrable car  $E$  est infini : en effet, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la suite dont tous les termes sont nuls sauf celui d'indice  $n$  qui vaut 1 appartient à  $E$  et ces suites sont deux à deux différentes. Par suite, il existe une bijection  $e : k \mapsto e(k) = (e(k)_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{N}$  dans  $E$ . On a ainsi une numérotation des éléments de  $E$  illustrée ci-dessous :

$$\begin{aligned} e(0) &= (0, 1, 0, 1, 0, 0, \dots) \\ e(1) &= (0, 0, 0, 0, 0, 1, \dots) \\ e(2) &= (1, 1, 1, 0, 1, 1, \dots) \\ e(3) &= (1, 1, 0, 0, 1, 1, \dots) \\ e(4) &= (0, 1, 1, 0, 1, 0, \dots) \\ e(5) &= (0, 0, 0, 1, 1, 1, \dots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

On pose alors  $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie, pour  $n \in \mathbb{N}$ , par :

$$\varepsilon_n = 1 - e(n)_n \in \{0, 1\} \text{ car } e(n)_n \in \{0, 1\}$$

Dans l'illustration précédente, cela donnerait  $\varepsilon = (0, 0, 1, 0, 1, 1, \dots)$

Ainsi,  $\varepsilon$  appartient à  $E = e(\mathbb{N}) = \{e(k) \mid k \in \mathbb{N}\}$ . Or, par construction,  $\varepsilon$  est différent de  $e(k)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  : en effet, pour tout  $\mathbb{N}$ ,  $\varepsilon_n = 1 - e(n)_n \neq e(n)_n$ . Contradiction!

Par suite,  $E = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  n'est pas au plus dénombrable i.e.  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  est infini non dénombrable.

Pour répondre à l'ultime question :  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  est ainsi un produit cartésien dénombrable d'ensembles finis (et donc au plus dénombrables) et n'est pas au plus dénombrable!

**Lemme 3.**

$]0, 1[$  est infini non dénombrable.

### Démonstration.

Pour cette preuve, nous allons utiliser le développement décimal des nombres réels sans rentrer trop avant dans le détail de cette notion qui n'est pas si anodine même si elle semble naturelle (pour plus de rigueur sur le sujet, on pourra se reporter au problème 1).

Ici, nous identifierons un nombre réel  $x$  de  $]0, 1[$  avec son développement décimal "propre" qui est de la forme  $x = 0, x_0 x_1 x_2 \dots x_n \dots$  (complété par une infinité des zéros si celui est fini) où la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est à valeurs dans  $\llbracket 0, 9 \rrbracket^{\mathbb{N}}$  et n'est pas stationnaire en 9. Pour ce qui est du développement propre : on admet que ici que tout nombre réel de  $]0, 1[$  admet au plus deux écritures décimales possibles et donc deux suites associées potentielles ; et dans ce cas (on peut montrer qu'il s'agit des nombres décimaux justement), l'une est stationnaire en 0 et l'autre en 9. On définit alors le développement propre de  $x$  comme étant son unique développement s'il n'en a qu'un et celui qui est stationnaire en 0 s'il en a deux. On renvoie de nouveau au problème 1 qui traite le cas similaire des nombres dyadiques pour plus de précisions.

On s'inspire de l'argument diagonal de Cantor utilisé dans l'exercice précédent pour démontrer que  $]0, 1[$  est infini non dénombrable.

On suppose par l'absurde que  $]0, 1[$  est dénombrable (comme  $]0, 1[$  est infini, on peut tout de suite dire "dénombrable" au lieu de "au plus dénombrable" !). Il existe donc une bijection  $f$  entre  $\mathbb{N}$  et  $]0, 1[$  et donc une numérotation des éléments de  $]0, 1[$  disons  $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, \dots$  où  $x^{(k)} = 0, x_0^{(k)} x_1^{(k)} \dots x_n^{(k)} \dots$ . Par exemple, cela pourrait donner :

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= 0, \mathbf{2} 0 2 0 5 6 \dots \\ x^{(1)} &= 0, 7 \mathbf{1} 8 2 8 1 \dots \\ x^{(2)} &= 0, 3 2 \mathbf{4} 7 1 7 \dots \\ x^{(3)} &= 0, 5 7 7 \mathbf{2} 1 5 \dots \\ x^{(4)} &= 0, 1 4 1 5 \mathbf{9} 2 \dots \\ x^{(5)} &= 0, 4 6 6 9 2 \mathbf{0} \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

On définit alors un réel  $x = 0, x_0 x_1 x_2 \dots x_n \dots$  de la façon suivante : pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

- si  $x_n^{(n)} = 2$ , on pose  $x_n = 1$  ;
- si  $x_n^{(n)} \neq 2$ , on pose  $x_n = 2$ .

Dans l'illustration précédente, cela donnerait :  $x = 0, 12211 \dots$

L'élément  $x$  ainsi défini est bien dans  $]0, 1[$  car compris entre 0, 1 et 0, 3 et... est différent de tous les  $x^{(k)}$  : en effet, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $x_k^{(k)} \neq x_k$  par construction ! Donc  $x$  n'appartient pas à  $]0, 1[$  puisque les  $x^{(k)}$  forment une numérotation exhaustive des éléments de  $]0, 1[$ . Contradiction ! Ainsi,  $]0, 1[$  est infini non dénombrable.  $\square$

### **Théorème 1.**

L'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels est infini non dénombrable.

Plus généralement, toute partie de  $\mathbb{R}$  contenant un intervalle d'intérieur non vide est infini non dénombrable.

Correction.

On prouve tout d'abord la première assertion : comme  $]0, 1[$  est infini non dénombrable (Lemme 3) et  $]0, 1[ \subset \mathbb{R}$ , d'après la proposition 10,  $\mathbb{R}$  est infini non dénombrable.

Ou encore, l'application  $x \mapsto \operatorname{argth}(2x - 1)$  est une bijection de  $]0, 1[$  dans  $\mathbb{R}$  donc, comme  $]0, 1[$  est infini non dénombrable (toujours d'après le lemme 3), d'après la proposition 9,  $\mathbb{R}$  est infini non dénombrable.

Passons au cas général.

Soit  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$ . Alors l'application affine  $x \mapsto (b - a)x + a$  est une bijection de  $]0, 1[$  dans  $]a, b[$  (car  $b - a \neq 0$ ), d'où, d'après la proposition 9 et le lemme 3,  $]a, b[$  est infini non dénombrable.

Soit  $X$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$  contenant un intervalle  $I$  d'intérieur non vide. Comme  $I$  est un intervalle d'intérieur non vide, il existe  $a, b \in I$  avec  $a < b$  et  $]a, b[ \subset I$ . D'après ce qui précède,  $]a, b[$  est infini non dénombrable, d'où, comme  $]a, b[ \subset I \subset X$ , d'après la proposition 10,  $X$  est infini non dénombrable.

Exercice 8.

1. Montrer que l'ensemble  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  des nombres irrationnels est infini non dénombrable.
2. On appelle *nombre algébrique*, tout réel qui est racine d'un polynôme non nul à coefficients dans  $\mathbb{Q}$ . On note  $\mathcal{A}$  l'ensemble des nombres réels algébriques.  
On appelle *nombre transcendant*, tout réel qui n'est pas algébrique. On note  $\mathcal{T}$  l'ensemble des nombre transcendants.

- (a) Montrer que  $\mathcal{A}$  est dénombrable.
- (b) En déduire que  $\mathcal{T}$  est infini non dénombrable.

Correction.

1. On a  $\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}$ . Supposons par l'absurde que  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  est au plus dénombrable. Alors, comme  $\mathbb{Q}$  est dénombrable (Exemple 3),  $\mathbb{R}$  est au plus dénombrable comme union d'ensembles au plus dénombrables (Proposition 8). Contradiction ! car  $\mathbb{R}$  n'est pas au plus dénombrable (Théorème 1).  
Par suite,  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  n'est pas au plus dénombrable i.e. est infini non dénombrable.

2. (a) On a, par définition de  $\mathcal{A}$  :

$$\mathcal{A} = \bigcup_{P \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}} Z_P \text{ où } Z_P = \{x \in \mathbb{R} \mid P(x) = 0\}.$$

Par suite,  $\mathcal{A}$  est au plus dénombrable comme réunion dénombrable d'ensembles au plus dénombrables (Proposition 8). En effet, d'après la proposition 4,  $\mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}$  est dénombrable car  $\mathbb{Q}[X]$  l'est (Exercice 6) et, pour tout  $P \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}$ ,  $P$  admet un nombre fini de racines, d'où  $Z_P$  est un ensemble fini et donc au plus dénombrable.

De plus,  $\mathcal{A}$  est infini car, par exemple,  $\mathbb{Z} \subset \mathcal{A}$  (pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n$  est racine de  $X - n \in \mathbb{Q}[X]$ ).

Il en résulte que  $\mathcal{A}$  est dénombrable.

- (b) On a  $\mathbb{R} = \mathcal{A} \cup \mathcal{T}$  d'où  $\mathcal{T}$  est infini non dénombrable car  $\mathbb{R}$  est infini non dénombrable et  $\mathcal{A}$  est dénombrable (même preuve que pour la question 1.)

## Partie B

### Familles sommables

#### 1. Familles sommables de nombres réels positifs

Dans ce paragraphe,  $I$  désigne un ensemble quelconque.

Avant de parler de familles sommables, faisons quelques rappels et compléments sur l'intervalle achevé  $[0, +\infty]$  :

- On connaît bien l'ensemble ordonné  $([0, +\infty[, \leq)$  : on prolonge alors cet ordre sur le "sur"-ensemble  $[0, +\infty] = [0, +\infty[ \sqcup \{+\infty\}$  en décrétant que, pour tout  $x \in [0, +\infty]$ ,  $x \leq +\infty$ .
- On peut alors définir, dans  $[0, +\infty]$ , la borne supérieure  $\sup(A)$  d'un ensemble d'une partie  $A$ , comme on le fait dans  $\mathbb{R}$  : si  $A$  non vide est majorée, il s'agit de la borne supérieure usuelle dans  $[0, +\infty[$ ; si elle n'est pas majorée,  $\sup(A)$  vaut  $+\infty$ .  
Et si  $A = \emptyset$ ,  $\sup(A) = 0$  dans  $[0, +\infty]$  - c'est dans  $\mathbb{R}$  que  $\emptyset$  ne possède pas de borne supérieure!
- Sur  $[0, +\infty]$ , on étend les lois de compositions internes  $+$  et  $\times$  de  $[0, +\infty[$  :
  - pour tout  $x \in [0, +\infty]$ ,  $x + (+\infty) = +\infty = (+\infty) + x$ ;
  - pour tout  $x \in ]0, +\infty]$ ,  $x \times (+\infty) = +\infty = (+\infty) \times x$  et  $0 \times (+\infty) = 0 = (+\infty) \times 0$ .

Pour mieux comprendre pourquoi nous prenons ces conventions d'opérations avec  $+\infty$ , il suffit de voir que les propriétés de la borne supérieure sur  $[0, +\infty[$  sont encore valables sur  $[0, +\infty]$ ; notamment, pour  $A, B \subset [0, +\infty]$  et  $c \in [0, +\infty]$  :

- si  $A \subset B$ , alors  $\sup(A) \leq \sup(B)$ ;
- $\sup(cA) = c \sup(A)$  et ;
- $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$  si  $A, B$  non vides.

#### a. Définition

##### Définition 2. *Famille sommable*

Soit  $(a_i)_{i \in I}$  une famille de réels positifs.

On appelle **somme** de la famille  $(a_i)_{i \in I}$ , l'élément noté  $\sum_{i \in I} a_i$  de  $[0, +\infty]$  défini par :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sup \left( \left\{ \sum_{j \in J} a_j \mid J \subset I \text{ et } J \text{ fini} \right\} \right).$$

On dit que  $(a_i)_{i \in I}$  est une **famille sommable** si  $\sum_{i \in I} a_i < +\infty$ ; autrement dit, si  $\sum_{i \in I} a_i \in [0, +\infty[$ .

### Remarque 2.

Une famille  $(a_i)_{i \in I}$  non sommable est une famille qui vérifie  $\sum_{i \in I} a_i = +\infty$ .

### Exemple 4.

La famille  $(\frac{1}{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$  est sommable et la famille  $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas sommable.

— En effet, pour toute partie finie  $J$  de  $\mathbb{N}$ , on a  $J \subset \llbracket 0, m \rrbracket$  où  $m = \max(J)$ , donc :

$$\sum_{j \in J} \frac{1}{2^j} \leq \sum_{i=0}^m \frac{1}{2^i} = 2 - \frac{1}{2^m} \leq 2.$$

(Démontrer que la somme de la famille est en fait bien égale à 2 grâce à la définition précédente).

— On a, pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$  :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n} \geq H_N = \sum_{n \in \llbracket 1, N \rrbracket} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}.$$

Or  $H_N = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$  car la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  diverge, donc  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n} = +\infty$ .

## b. Support d'une famille sommable

### Définition 3. *Support*

Soit  $(a_i)_{i \in I}$  une famille de nombres complexes. On appelle **support** de la famille  $(a_i)_{i \in I}$  et on note  $\text{supp}((a_i)_{i \in I})$  l'ensemble :

$$\text{supp}((a_i)_{i \in I}) = \{i \in I \mid a_i \neq 0\};$$

autrement dit, il s'agit de l'ensemble des indices des termes non nuls de la famille.

### Proposition 13.

Soit  $(a_i)_{i \in I}$  une famille de réels positifs. Si la famille  $(a_i)_{i \in I}$  est sommable, alors son support  $\text{supp}((a_i)_{i \in I})$  est un ensemble au plus dénombrable.

#### Démonstration.

On suppose la famille  $(a_i)_{i \in I}$  sommable. Notons  $S = \sum_{i \in I} a_i$ .

Pour  $\varepsilon$  un réel strictement positif, on note  $J_\varepsilon = \{i \in I \mid a_i > \varepsilon\}$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Supposons par l'absurde que  $J_\varepsilon$  est infini. Alors, pour tout ensemble fini  $J$  inclus dans

$J_\varepsilon$ , la famille étant sommable, on a :

$$\#J \times \varepsilon < \sum_{j \in J} a_j \leq S.$$

L'ensemble  $J_\varepsilon$  étant infini, il existe  $J \subset J_\varepsilon$  de cardinal plus grand ou égal à  $\frac{S}{\varepsilon}$ . Contradiction avec l'inégalité précédente!

Il en résulte que, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $J_\varepsilon$  est un ensemble fini.

Montrons que  $\text{supp}((a_i)_{i \in I}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} J_{\frac{1}{n}}$ .

Soit  $i \in I$ .

- Si  $i \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} J_{\frac{1}{n}}$ , alors il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $i \in J_{\frac{1}{n}}$  et donc,  $a_i > \frac{1}{n} > 0$ . D'où  $a_i \neq 0$  et ainsi,  $i \in \text{supp}((a_i)_{i \in I})$ .
- Si  $i \in \text{supp}((a_i)_{i \in I})$ , alors  $a_i \neq 0$  et comme la famille est composée de réels positifs,  $a_i > 0$ . On pose  $n = \lfloor \frac{1}{a_i} \rfloor + 1$ . Alors, par définition de la partie entière,  $n \in \mathbb{N}^*$  car  $\frac{1}{a_i} \geq 0$  et  $n > \frac{1}{a_i}$ , donc

$$a_i > \frac{1}{n}.$$

Ainsi,  $i \in J_{\frac{1}{n}} \subset \bigcup_{n' \in \mathbb{N}^*} J_{\frac{1}{n'}}$ .

D'où l'égalité annoncée entre les deux ensembles.

Ainsi, le support  $\text{supp}((a_i)_{i \in I})$  est égal à une réunion au plus dénombrable (car  $\mathbb{N}^*$  est dénombrable) d'ensembles au plus dénombrables (car les  $J_{\frac{1}{n}}$  sont finis) donc, d'après la proposition 8,  $\text{supp}((a_i)_{i \in I})$  est au plus dénombrable.  $\square$

### c. Propriétés

#### Proposition 14.

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels positifs. Alors la famille  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est sommable si, et seulement si,  $\sum u_n$  converge. Dans ce cas, on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

#### Proposition 15. Sous-familles sommable

Soit  $(a_i)_{i \in I}$  une famille de réels positifs. Pour tout  $J \subset I$ , on a :

$$\sum_{j \in J} a_j \leq \sum_{i \in I} a_i,$$

et, en particulier, si  $(a_i)_{i \in I}$  est sommable, alors, la sous-famille  $(a_j)_{j \in J}$  est sommable.

**Proposition 16.**

Soit  $(a_i)_{i \in I}$  et  $(b_i)_{i \in I}$  des familles de réels positifs telles que pour tout  $i \in I$ ,  $a_i \leq b_i$ . On a :

$$\sum_{i \in I} a_i \leq \sum_{i \in I} b_i,$$

et, en particulier, si  $(b_i)_{i \in I}$  est sommable, alors  $(a_i)_{i \in I}$  est sommable.

**Proposition 17.**

Soit  $(a_i)_{i \in I}$  et  $(b_i)_{i \in I}$  des familles de réels positifs et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$ . On a :

$$\sum_{i \in I} (\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \sum_{i \in I} a_i + \mu \sum_{i \in I} b_i,$$

et, en particulier, si  $(a_i)_{i \in I}$  et  $(b_i)_{i \in I}$  sont sommables, alors la famille  $(\lambda a_i + \mu b_i)_{i \in I}$  est sommable.

**Proposition 18.** Changement d'indice

Soit  $\sigma$  une bijection d'un ensemble  $J$  sur  $I$  et  $(a_i)_{i \in I}$  une famille de réels positifs. On a :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} a_{\sigma(j)},$$

et, en particulier,  $(a_i)_{i \in I}$  est sommable si, et seulement si,  $(a_{\sigma(j)})_{j \in J}$  est sommable.

**d. Sommation par paquets****Définition 4.** Partition

Soit  $(I_\omega)_{\omega \in \Omega}$  une famille de parties non vides de  $I$ . On dit que  $(I_\omega)_{\omega \in \Omega}$  est une **partition** de  $I$  si  $\bigcup_{\omega \in \Omega} I_\omega = I$  et pour tout  $\omega, \omega' \in \Omega$  avec  $\omega \neq \omega'$ ,  $I_\omega \cap I_{\omega'} = \emptyset$ .

**Exemple 5.**

Les ensembles  $2\mathbb{N}$  et  $2\mathbb{N} + 1$  forment une partition de  $\mathbb{N}$ .

**Proposition 19.** Sommation par deux paquets

Soit  $J, K$  des parties de  $I$  tels que  $(J, K)$  est une partition de  $I$  et  $(a_i)_{i \in I}$  une famille de réels positifs. On a :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} a_j + \sum_{k \in K} a_k,$$

et, en particulier,  $(a_i)_{i \in I}$  est sommable si, et seulement si  $(a_j)_{j \in J}$  et  $(a_k)_{k \in K}$  sont sommables.

### Exercice 9.

On admet l'égalité  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ . En déduire que  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n+1)^2}$  converge et déterminer sa somme.

On peut généraliser la proposition précédente de la façon suivante :

### **Théorème 2.** Sommation par paquets

Soit  $(I_\omega)_{\omega \in \Omega}$  une partition au plus dénombrable de  $I$  et  $(a_i)_{i \in I}$  une famille de réels positifs. On a :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{\omega \in \Omega} \left( \sum_{i \in I_\omega} a_i \right),$$

et, en particulier,  $(a_i)_{i \in I}$  est sommable, si, et seulement si,

- pour tout  $\omega \in \Omega$ , la famille  $(a_i)_{i \in I_\omega}$  est sommable de somme  $\alpha_\omega = \sum_{i \in I_\omega} a_i$ ,
- la famille  $(\alpha_\omega)_{\omega \in \Omega}$  est sommable.

Voici un corollaire bien utile du théorème de sommation par paquets :

### **Théorème 3.** Théorème de Fubini positif

Soit  $I, J$  des ensembles. Pour  $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$  une famille de réels positifs, on a, dans  $[0, +\infty]$  :

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_{i,j} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} a_{i,j}.$$

En particulier, la famille  $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$  est sommable si, et seulement si, l'un des termes de l'égalité précédente est fini.

Si  $(a_i)_{i \in I}$  et  $(b_j)_{j \in J}$  sont des familles de réels positifs, on a, dans  $[0, +\infty]$  :

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \sum_{i \in I} a_i \times \sum_{j \in J} b_j.$$

## 2. Familles sommables de nombres complexes

Dans ce paragraphe,  $I$  désigne un ensemble quelconque.

### a. Définitions

**Définition 5.** Famille sommable de nombres complexes

Soit  $(a_i)_{i \in I}$  une famille de nombres complexes. On dit que la famille  $(a_i)_{i \in I}$  est **sommable** si la famille  $(|a_i|)_{i \in I}$  de réels positifs est sommable.

**Remarque 3.**

Ainsi, d'après ce qu'on a vu précédemment, une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est sommable si, et seulement si, la série de terme général  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est absolument convergente.

**Définition 6.** Somme d'une famille sommable de réels

Soit  $(a_i)_{i \in I}$  une famille sommable de nombres réels. On pose, pour chaque  $i \in I$ ,  $a_i^+ = \max(0, a_i)$  et  $a_i^- = \min(0, a_i)$ . On appelle **somme** de la famille  $(a_i)_{i \in I}$  et on note  $\sum_{i \in I} a_i$  la quantité :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I} a_i^+ + \sum_{i \in I} a_i^-.$$

**Définition 7.** Somme d'une famille sommable de complexes

Soit  $(a_i)_{i \in I}$  une famille sommable de nombres complexes. On appelle **somme** de la famille  $(a_i)_{i \in I}$  et on note  $\sum_{i \in I} a_i$  la quantité :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I} \operatorname{Re}(a_i) + i \sum_{i \in I} \operatorname{Im}(a_i).$$

**Proposition 20.**

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres complexes. La famille  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est sommable si, et seulement si, la série  $\sum a_n$  est absolument convergente. Dans ce cas, on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sum_{i=0}^{+\infty} a_n.$$

**b. Propriétés**

**Proposition 21.** Changement d'indice

Soit  $\sigma$  une bijection d'un ensemble  $J$  sur  $I$  et  $(a_i)_{i \in I}$  une famille de nombres complexes. Alors

$(a_i)_{i \in I}$  est sommable si et seulement si,  $(a_{\sigma(j)})_{j \in J}$  est sommable. Dans ce cas, on a :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} a_{\sigma(j)}.$$

#### Remarque 4.

En combinant les deux précédentes propositions, on obtient que la somme d'une série absolument convergente est invariante par changement bijectif d'indice. Dans le cas d'une série semi-convergente, par exemple  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ , on peut, en appliquant une permutation d'indice bien choisie, faire converger la série obtenue vers n'importe quel nombre réel, et même la faire diverger !

#### Proposition 22. Inégalité triangulaire

$(a_i)_{i \in I}$  une famille de nombres complexes. Si  $(a_i)_{i \in I}$  est sommable, alors

$$\left| \sum_{i \in I} a_i \right| \leq \sum_{i \in I} |a_i|.$$

#### Proposition 23.

Soit  $(a_i)_{i \in I}$  et  $(b_i)_{i \in I}$  des familles à valeurs dans  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ . Si  $(a_i)_{i \in I}$  et  $(b_i)_{i \in I}$  sont sommables, alors la famille  $(\lambda a_i + \mu b_i)_{i \in I}$  est sommable et

$$\sum_{i \in I} (\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \sum_{i \in I} a_i + \mu \sum_{i \in I} b_i.$$

#### Question.

De quelle structure peut-on munir l'ensemble des familles sommables sur le corps  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  ?

### c. Sommation par paquets

#### Théorème 4. Sommation par paquets

Soit  $(I_\omega)_{\omega \in \Omega}$  une partition au plus dénombrable de  $I$  et  $(a_i)_{i \in I}$  une famille de complexes. Alors  $(a_i)_{i \in I}$  est sommable, si, et seulement si,

- pour tout  $\omega \in \Omega$ , la famille  $(a_i)_{i \in I_\omega}$  est sommable de somme  $\alpha_\omega = \sum_{i \in I_\omega} a_i$ ,
- la famille  $(\alpha_\omega)_{\omega \in \Omega}$  est sommable.

Dans ce cas, on a :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{\omega \in \Omega} \left( \sum_{i \in I_\omega} a_i \right).$$

**Théorème 5.** *Théorème de Fubini*

Soit  $I, J$  des ensembles. Pour  $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$  une famille de nombres complexes, on a :  $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$  est sommable si, et seulement si, pour tout  $j \in J$ ,  $(a_{i,j})_{i \in I}$  est sommable et  $\left( \sum_{i \in I} a_{i,j} \right)_{j \in J}$  est sommable. Et dans ce cas, on a :

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_{i,j} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} a_{i,j}.$$

En particulier, si  $(a_i)_{i \in I}$  et  $(b_j)_{j \in J}$  sont des familles sommables de nombres complexes, alors  $(a_i b_j)_{(i,j) \in I \times J}$  est sommable et on a :

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \sum_{i \in I} a_i \times \sum_{j \in J} b_j.$$

### 3. Applications des familles sommables

#### a. Sommes doubles

**Définition-Proposition 8.** *Partitions classiques de  $\mathbb{N}^2$*

On appelle :

- **Partition verticale** de  $\mathbb{N}^2$ , la partition  $(V_m)_{m \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{N}^2$  où, pour  $m \in \mathbb{N}$ ,

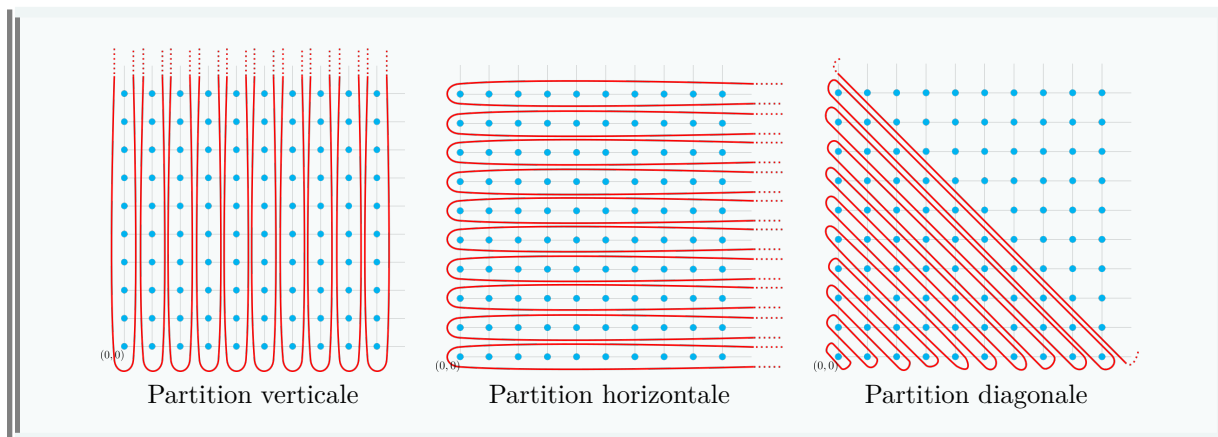
$$V_m = \{m\} \times \mathbb{N} = \{(m, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

- **Partition horizontale** de  $\mathbb{N}^2$ , la partition  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{N}^2$  où, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$H_n = \mathbb{N} \times \{n\} = \{(m, n) \mid m \in \mathbb{N}\}$$

- **Partition diagonale** de  $\mathbb{N}^2$ , la partition  $(\Delta_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{N}^2$  où, pour  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\Delta_k = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 \mid m + n = k\} = \{(p, k - p) \mid p \in \llbracket 0, k \rrbracket\}$$



**Théorème 6.** Somme double "verticale"

Soit  $(a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$  une famille de nombres complexes. Alors  $(a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$  est sommable si, et seulement si :

- pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , la série  $\sum_{n \geq 0} a_{m,n}$  converge absolument (somme sur  $V_m$ ) et
- la série  $\sum \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n} \right)$  converge absolument.

Dans ce cas, on a :

$$\sum_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} a_{m,n} = \sum_{m=0}^{+\infty} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n} \right).$$

**Théorème 7.** Somme double "horizontale"

Soit  $(a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$  une famille de nombres complexes. Alors  $(a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$  est sommable si, et seulement si :

- pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la série  $\sum_{m \geq 0} a_{m,n}$  converge absolument (somme sur  $H_n$ ) et
- la série  $\sum \left( \sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n} \right)$  converge absolument.

Dans ce cas, on a :

$$\sum_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n} \right).$$

**Théorème 8.** Somme double "diagonale"

Soit  $(a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$  une famille de nombres complexes. Alors  $(a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$  est sommable si, et seulement si :

— la série  $\sum \left( \underbrace{\sum_{p=0}^k a_{p,k-p}}_{\text{somme sur } \Delta_k} \right)$  converge absolument.

Dans ce cas, on a :

$$\sum_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} a_{m,n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \sum_{p=0}^k a_{p,n-p} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \sum_{m+n=k} a_{m,n} \right).$$

**Corollaire 3.** Somme double de complexes

Soit  $(a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$  une famille de complexes. Si  $(a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$  est sommable alors :

$$\begin{aligned} \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{m,n} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n} \right) \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \sum_{p=0}^k a_{p,n-p} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \sum_{m+n=k} a_{m,n} \right) \end{aligned}$$

**Exercice 10.**

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Étudier la sommabilité de la famille  $(a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$  où, pour  $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ ,

$$a_{m,n} = \frac{1}{(m+n+1)^\alpha}.$$

**Correction.**

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On utilise le théorème de sommation par paquets sur la partition diagonale de  $\mathbb{N}^2$  (ce choix est guidé par la "vue" du  $m+n$  qui sera constant sur les diagonales!) i.e.

$$\mathbb{N}^2 = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} \Delta_k \text{ où } \Delta_k = \{(n, k-n) \mid n \in \llbracket 0, k \rrbracket\}.$$

Testons les hypothèses de ce théorème :

La famille  $(a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$  est une famille de réels positifs.

— Somme sur chaque paquet : soit  $k \in \mathbb{N}$ . La famille  $(a_{m,n})_{(m,n) \in \Delta_k}$  est une famille finie,

donc elle est sommable et on pose :

$$s_k = \sum_{(m,n) \in \Delta_k} \frac{1}{(m+n+1)^\alpha} = \sum_{n=0}^k \frac{1}{(k+1)^\alpha} = \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}}.$$

— Somme des sommes des paquets : la famille  $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite, elle est donc sommable si, et seulement si,  $\sum s_k$  converge absolument.

On a  $|s_k| = \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{k^{\alpha-1}}$  ; or, d'après le critère de Riemann,  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{\alpha-1}}$  converge si, et seulement si,  $\alpha - 1 > 1$  i.e.  $\alpha > 2$ . D'où, par comparaison,  $\sum s_k$  converge absolument si, et seulement si,  $\alpha > 2$ .

Ainsi, la famille  $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est sommable si, et seulement si,  $\alpha > 2$ .

Par suite, d'après le théorème de sommation par paquets, la famille  $(a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$  est sommable si, et seulement si,  $\alpha > 2$ . Et dans ce cas, on a :

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{m,n} = \sum_{k=0}^{+\infty} s_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha-1}} = \zeta(\alpha - 1).$$

## b. Produit de Cauchy

### Proposition 24.

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des suites de nombres complexes. Si  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$  sont absolument convergentes, alors

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_m b_n = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right).$$

### Définition 9. Produit de Cauchy

Soit  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$  des séries de nombres complexes. On appelle **produit de Cauchy** des séries  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$  la série  $\sum c_n$  de terme général défini, pour  $n \in \mathbb{N}$ , par :

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

### Théorème 9.

Soit  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$  des séries de nombres complexes. Si  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$  sont absolument convergentes, alors leur produit de Cauchy  $\sum c_n$  est absolument convergent et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{p+q=n} a_p b_q \right).$$

**Exercice 11.**

Soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < 1$ . Montrer que  $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)z^n = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \right)^2$ . En déduire que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)z^n = \frac{1}{(z-1)^2}.$$

**4. Exercices****Exercice 12.**

Déterminer si la famille  $(a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$  est sommable où pour  $m, n \in \mathbb{N}$  :

$$(1) a_{m,n} = \frac{1}{2^{m+n}}; \quad (2) a_{m,n} = \frac{1}{2^{m-n}}; \quad (3) a_{m,n} = \frac{1}{2^{(m+1)(n+1)}}; \quad (4) a_{m,n} = \frac{1}{2^{mn}};$$

$$(5) a_{m,n} = \frac{1}{2^{\max(m,n)}}; \quad (6) a_{m,n} = \frac{1}{2^{\min(m,n)}};$$

Si c'est le cas, écrire la somme de la famille comme une somme de série (puis déterminer sa valeur si la série est connue!)

**Correction.**

On pose, pour  $m, n \in \mathbb{N}$ ,

$$V_m = \{(m, p) \in \mathbb{N}^2 \mid p \in \mathbb{N}\} \quad H_n = \{(p, n) \in \mathbb{N}^2 \mid p \in \mathbb{N}\} \quad \Delta_n = \{(p, n-p) \mid p \in \llbracket 0, n \rrbracket\}.$$

1. — **1ère façon** : en utilisant le théorème de Fubini positif.

Comme, pour tout  $(n, m) \in \mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ,  $\frac{1}{2^{m+n}} \geq 0$ , d'après le théorème de Fubini positif, on a, dans  $[0, +\infty]$  :

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{2^{m+n}} = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{m+n}}.$$

Or, on a :

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{m+n}} = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^m} \frac{1}{2^n} = \left( \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2^m} \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \right) = 4$$

$$\text{car } \left( \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2^m} \right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Le terme  $\sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{m+n}}$  étant fini de somme 4, la famille  $(\frac{1}{2^{m+n}})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$  est sommable et sa somme est égale à 4.

— **2ème façon** : En utilisant directement le théorème de sommation par paquets.

On applique le théorème de sommation par paquets en utilisant la partition  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{N}^2$ .

- Somme sur chaque paquet. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On considère la famille  $(\frac{1}{2^{m+n}})_{m \in \mathbb{N}}$ . Il s'agit d'une suite de réels positifs donc elle est sommable si, et seulement si, la série  $\sum_{m \geq 0} \frac{1}{2^{m+n}}$  converge.

On note  $a = \frac{1}{2^n}$ . Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , on a  $0 \leq \frac{1}{2^{m+n}} = \frac{a}{2^m}$  qui est le terme général d'une série convergente (terme d'une série géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  dans  $] - 1, 1[$ ) donc  $\sum_{m \geq 0} \frac{1}{2^{m+n}}$  converge. Ainsi la famille  $(\frac{1}{2^{m+n}})_{m \in \mathbb{N}}$  est sommable et on a :

$$s_n = \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^{m+n}} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{m+n}} = a \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2^m} = a \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2a = \frac{2}{2^n}.$$

- Somme des sommes sur les paquets. La famille  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de réels positifs, elle est donc sommable si, et seulement si, la série  $\sum s_n$  converge. On a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $s_n = \frac{1}{2^{n-1}}$  qui est le terme général d'une série convergente (terme d'une série géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  dans  $] - 1, 1[$ ) donc  $\sum s_n$  converge. Ainsi la famille  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est sommable et on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} s_n = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n = 2 \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 4.$$

Il en résulte, d'après le théorème de sommation par paquets, que la famille  $(\frac{1}{2^{m+n}})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$  est sommable et on a :

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{2^{m+n}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} s_n = 4.$$

*Remarque :* comme  $(\frac{1}{2^{m+n}})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$  est une famille sommable, on a toujours d'après le théorème de sommation par paquet mais sur la partition  $(\Delta_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{N}^2$ , la série  $\sum_{k \geq 0} \sum_{(m,n) \in \Delta_k} \frac{1}{2^{m+n}} = \sum_{k \geq 0} \frac{k+1}{2^k}$  converge et on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{2^k} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{(m,n) \in \Delta_k} \frac{1}{2^{m+n}} = \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{2^{m+n}} = 4.$$

2. — **1ère façon :** en exhibant une sous-famille non sommable.

On considère la sous-famille  $(\frac{1}{2^{n-n}})_{(n,n) \in \mathbb{N}^2} = (1)_{n \in \mathbb{N}}$ . Il s'agit d'une suite qui est le terme général d'une série grossièrement divergente donc cette sous-famille n'est pas sommable. Par suite, la famille  $(\frac{1}{2^{m-n}})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$  n'est pas sommable.

— **2ème façon :** en utilisant le théorème de Fubini positif.

Comme, pour tout  $(n, m) \in \mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ,  $\frac{1}{2^{m-n}} \geq 0$ , d'après le théorème de Fubini positif, on a, dans  $[0, +\infty[$  :

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{2^{m-n}} = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{m-n}}$$

Or, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{m-n}} = \frac{1}{2^m} \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n = +\infty.$$

Donc  $\sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{m-n}} = +\infty$  et ainsi la famille  $(\frac{1}{2^{m-n}})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$  n'est pas sommable.

— *3ème façon* : en utilisant le théorème de sommation par paquets sur la partition  $(V_m)_{m \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{N}^2$ .

- *Somme sur chaque paquet.* Soit  $m \in \mathbb{N}$ . On considère la famille  $(\frac{1}{2^{m-n}})_{n \in \mathbb{N}}$ . Il s'agit d'une suite de réels positifs donc elle est sommable si, et seulement si, la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^{m-n}}$  converge.

On note  $a = \frac{1}{2^m} \neq 0$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $0 \leq \frac{1}{2^{m-n}} = a2^n$  qui est le terme général d'une série grossièrement divergente. Ainsi, la famille  $(\frac{1}{2^{m-n}})_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas sommable.

Par suite, d'après le théorème de sommation par paquets, la famille  $(\frac{1}{2^{m-n}})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$  n'est pas sommable.

3. — **1ère façon** : en utilisant le théorème de Fubini positif.

Comme, pour tout  $(n, m) \in \mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ,  $\frac{1}{2^{(m+1)(n+1)}} \geq 0$ , d'après le théorème de Fubini positif, on a, dans  $[0, +\infty[$  :

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{2^{(m+1)(n+1)}} = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{(m+1)(n+1)}}.$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{(m+1)(n+1)}} &= \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2^{m+1})^{n+1}} \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{m+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{m+1}}} \\ \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{(m+1)(n+1)}} &= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{m+1} - 1}. \end{aligned}$$

Or, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{1}{2^{m+1}-1} \leq \frac{1}{2^{m+1}}$  qui est le terme général d'une série convergente (terme d'une série géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  dans  $] -1, 1[$ ) donc, par comparaison,  $\sum \frac{1}{2^{m+1}-1}$  converge ; et ainsi :

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{2^{(m+1)(n+1)}} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{m+1} - 1} < +\infty.$$

Il en résulte que la famille  $(\frac{1}{2^{(m+1)(n+1)}})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$  est sommable de somme  $\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{m+1} - 1}$ .

— **2ème façon** : En utilisant directement le théorème de sommation par paquets.

On applique le théorème de sommation par paquets en utilisant la partition  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{N}^2$ .

- *Somme sur chaque paquet.* Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On considère la famille  $(\frac{1}{2^{(m+1)(n+1)}})_{m \in \mathbb{N}}$ . Il s'agit d'une suite de réels positifs donc elle est sommable si, et seulement si, la série  $\sum_{m \geq 0} \frac{1}{2^{(m+1)(n+1)}}$  converge.

Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , on a  $0 \leq \frac{1}{2^{(m+1)(n+1)}} \leq \frac{1}{2^m}$  qui est le terme général d'une série convergente (terme d'une série géométrique de raison dans  $] -1, 1[$ ). Ainsi, par comparaison,  $\sum_{m \geq 0} \frac{1}{2^{(m+1)(n+1)}}$  converge et donc la famille  $(\frac{1}{2^{(m+1)(n+1)}})_{m \in \mathbb{N}}$  est sommable.

De plus, on a :

$$s_n = \sum_{(m,n) \in H_n} \frac{1}{2^{(m+1)(n+1)}} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2^{n+1})^{m+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2^{n+1} - 1}.$$

- Somme des sommes des paquets. La famille  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de réels positifs, elle est donc sommable si, et seulement si, la série  $\sum s_n$  converge.

On a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $s_n \leq \frac{1}{2^{n+1}}$  qui est le terme général d'une série convergente (terme d'une série géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  dans  $] -1, 1[$ ) donc  $\sum s_n$  converge. Ainsi la famille  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est sommable et on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} s_n = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1} - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n - 1}$$

Il en résulte, d'après le théorème de sommation par paquets, que la famille  $(\frac{1}{2^{(m+1)(n+1)}})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$  est sommable et on a :

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{2^{(m+1)(n+1)}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} s_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n - 1}.$$

*Remarque : voir exercice d'après !*

4. On exhibe une sous-famille non sommable.

On considère la sous-famille  $(\frac{1}{2^{0 \times n}})_{(0,n) \in \mathbb{N}^2} = (1)_{n \in \mathbb{N}}$ . Il s'agit d'une suite qui est le terme général d'une série grossièrement divergente donc cette sous-famille n'est pas sommable. Par suite, la famille  $(\frac{1}{2^{mn}})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$  n'est pas sommable.

5. On applique le théorème de sommation par paquets en utilisant la partition  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{N}^2$ .

- Somme sur chaque paquet. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On considère la famille  $(\frac{1}{2^{\max(m,n)}})_{m \in \mathbb{N}}$ . Il s'agit d'une suite de réels positifs donc elle est sommable si, et seulement si, la série  $\sum_{m \geq 0} \frac{1}{2^{\max(m,n)}}$  converge.

Pour tout  $m \geq n$ , on a  $0 \leq \frac{1}{2^{\max(m,n)}} = \frac{1}{2^m}$  qui est le terme général d'une série convergente (terme d'une série géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  dans  $] -1, 1[$ ). Ainsi, par comparaison,  $\sum_{m \geq 0} \frac{1}{2^{\max(m,n)}}$  converge et donc la famille  $(\frac{1}{2^{\max(m,n)}})_{m \in \mathbb{N}}$  est sommable. De plus, on a :

$$s_n = \sum_{(m,n) \in H_n} \frac{1}{2^{\max(m,n)}} = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2^n} + \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{1}{2^m} = \frac{n}{2^n} + \frac{1}{2^n} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{n+2}{2^n}.$$

- Somme des sommes des paquets. La famille  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de réels positifs, elle est donc sommable si, et seulement si, la série  $\sum s_n$  converge.

On a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $s_n = \frac{n+2}{2^n}$  qui est le terme général d'une série convergente (par exemple avec la règle de D'Alembert ou avec le critère de Riemann en multipliant par  $n^2$ ) donc  $\sum s_n$  converge. Ainsi la famille  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est sommable et on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} s_n = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2}{2^n} = 6$$

*Pour la dernière égalité, utiliser la remarque finale de la question 1 ou encore utiliser la somme de la série entière  $\sum nx^n$ .*

Il en résulte, d'après le théorème de sommation par paquets, que la famille  $(\frac{1}{2^{\max(m,n)}})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$  est sommable et on a :

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{2^{\max(m,n)}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} s_n = 6.$$

6. On exhibe une sous-famille non sommable.

On considère la sous-famille  $(\frac{1}{2^{\min(0,n)}})_{(0,n) \in \mathbb{N}^2} = (1)_{n \in \mathbb{N}}$ . Il s'agit d'une suite qui est le terme général d'une série grossièrement divergente donc cette sous-famille n'est pas sommable. Par suite, la famille  $(\frac{1}{2^{\min(m,n)}})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$  n'est pas sommable.

### Exercice 13.

Pour un entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $d(n) = \#\{d \in \mathbb{N} \mid d|n\}$  le nombre de diviseurs positifs de  $n$ .

Montrer que les séries  $\sum_{n \geq 1} \frac{d(n)}{2^n}$  et  $\sum_{n \geq 1} \frac{d(n)}{n^2}$  convergent et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d(n)}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n - 1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d(n)}{n^2} = \frac{\pi^4}{36}.$$

### Correction.

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $P_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid pq = n\}$  et on remarque que  $d(n) = \#P_n$ . De plus,  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  forme une partition de  $(\mathbb{N}^*)^2$ . On applique le théorème de sommation par paquets aux familles de termes généraux  $a_{p,q} = \frac{1}{2^{pq}}$  et  $b_{p,q} = \frac{1}{p^2 q^2}$  : tout d'abord sur la partition verticale  $(V_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$  où  $V_p = \{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2\}$  avec  $p \in \mathbb{N}^*$  puis sur la partition  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  précédente.

- Somme sur chaque paquet. Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . On considère les familles  $(\frac{1}{2^{pq}})_{(p,q) \in V_p} = (\frac{1}{2^{pq}})_{q \in \mathbb{N}^*}$  et  $(\frac{1}{p^2 q^2})_{(p,q) \in V_p} = (\frac{1}{p^2 q^2})_{q \in \mathbb{N}^*}$ . Il s'agit de suites de réels positifs donc elles sont sommables si, et seulement si, les séries associées convergent.

Pour tout  $q \in \mathbb{N}^*$ , on a  $0 \leq \frac{1}{2^{pq}} = \frac{1}{(2^p)^q}$  qui est le terme général d'une série convergente (terme d'une série géométrique de raison  $\frac{1}{2^p}$  dans  $] -1, 1[$ ). Ainsi,  $\sum_{q \geq 1} \frac{1}{2^{pq}}$  converge et donc la famille  $(\frac{1}{2^{pq}})_{q \in \mathbb{N}^*}$  est sommable. De plus, on a :

$$\alpha_p = \sum_{(p,q) \in V_p} \frac{1}{2^{pq}} = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{(2^p)^q} = \frac{1}{2^p} \frac{1}{1 - \frac{1}{2^p}} = \frac{1}{2^p - 1}.$$

Pour tout  $q \in \mathbb{N}^*$ , on a  $0 \leq \frac{1}{p^2 q^2} \leq \frac{1}{q^2}$  qui est le terme général d'une série convergente (critère de Riemann  $2 > 1$ ). Ainsi, par comparaison,  $\sum_{q \geq 1} \frac{1}{p^2 q^2}$  converge et donc la famille  $(\frac{1}{p^2 q^2})_{q \in \mathbb{N}^*}$  est sommable. De plus, on a :

$$\beta_p = \sum_{(p,q) \in V_p} \frac{1}{p^2 q^2} = \frac{1}{p^2} \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q^2} = \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{p^2}.$$

- Somme des sommes des paquets.  
— La famille  $(\alpha_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de réels positifs, elle est donc sommable si, et seulement si, la série  $\sum_{p \geq 1} \alpha_p$  converge.

On a, pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $\alpha_p = \frac{1}{2^p - 1} \leq \frac{1}{2^p}$  qui est le terme général d'une série convergente (terme d'une série géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  dans  $] -1, 1[$ ) donc par comparaison  $\sum_{p \geq 1} \alpha_p$  converge. Ainsi la famille  $(\alpha_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$  est sommable et on a :

$$\sum_{p \in \mathbb{N}^*} \alpha_p = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{2^p - 1}.$$

— La famille  $(\beta_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de réels positifs, elle est donc sommable si, et seulement si, la série  $\sum_{p \geq 1} \beta_p$  converge.

On a, pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $\beta_p = \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{p^2}$  qui est le terme général d'une série convergente (critère de Riemann  $2 > 1$ ) donc par comparaison  $\sum_{p \geq 1} \beta_p$  converge. Ainsi la famille  $(\beta_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$  est sommable et on a :

$$\sum_{p \in \mathbb{N}^*} \beta_p = \frac{\pi^2}{6} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \left( \frac{\pi^2}{6} \right)^2 = \frac{\pi^4}{36}.$$

Il en résulte, d'après le théorème de sommation par paquets, que les familles les familles  $(\frac{1}{2^{pq}})_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$  et  $(\frac{1}{p^2 q^2})_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$  sont sommables et on a :

$$\sum_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{2^{pq}} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{2^p - 1} \text{ et } \sum_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{p^2 q^2} = \frac{\pi^4}{36}.$$

De plus, toujours d'après le théorème de sommation par paquets, comme ces familles sont sommables, leurs sommes sur  $(\mathbb{N}^*)^2$  sont égales à leurs sommes des sommes sur la partition  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ . Or, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\sum_{(p,q) \in P_n} \frac{1}{2^{pq}} = \sum_{p|n} \frac{1}{2^n} = \frac{d(n)}{2^n} \text{ et } \sum_{(p,q) \in P_n} \frac{1}{p^2 q^2} = \sum_{p|n} \frac{1}{n^2} = \frac{d(n)}{n^2}$$

Et donc :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{2^p - 1} = \sum_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{2^{pq}} = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sum_{(p,q) \in P_n} \frac{1}{2^{pq}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d(n)}{2^n}.$$

et

$$\frac{\pi^4}{36} = \sum_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{p^2 q^2} = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sum_{(p,q) \in P_n} \frac{1}{p^2 q^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d(n)}{n^2}.$$

## E&P

### Exercices et problèmes

#### Problème 1. Cardinal de $\mathbb{R}$

#### Le cardinal de $\mathbb{R}$

On considère l'espace vectoriel  $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$  des suites à valeurs dans  $\mathbb{R}$  bornées et son sous-ensemble  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  des suites à valeurs dans  $\{0, 1\}$ . On utilise les notations suivantes :

—  $\varphi : \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction, définie, pour  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ , par :

$$\varphi(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}.$$

—  $S = \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \setminus \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$  où  $\mathbf{0} = (0)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $\mathbf{1} = (1)_{n \in \mathbb{N}}$  ;

—  $S_0 = \{\varepsilon \in S \mid \varepsilon \text{ est stationnaire en } 0\}$  et  $S_1 = \{\varepsilon \in S \mid \varepsilon \text{ est stationnaire en } 1\}$  ;

—  $D_p = S \setminus S_1$ .

—  $\mathcal{D}_2 = \left\{ \frac{a}{2^n} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$  appelé ensemble des *nombre réels dyadiques*.

— Pour  $x \in ]0, 1[$ , on note  $d(x) = (d_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  et  $\varepsilon^0(x) = (\varepsilon_n^0(x))_{n \in \mathbb{N}}$  les suites définies, pour  $n \in \mathbb{N}$ , par :

$$d_n(x) = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n} \quad \text{et} \quad \varepsilon_n^0(x) = \lfloor 2^{n+1} x \rfloor - 2 \lfloor 2^n x \rfloor.$$

#### Propriétés utiles de l'application $\varphi$

1. Montrer que  $\varphi$  est bien définie sur  $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$  et qu'il s'agit d'une forme linéaire sur  $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ .
2. Calculer  $\varphi(\mathbf{0})$  et  $\varphi(\mathbf{1})$ .
3. Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}, v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ .
  - (a) Montrer que si, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq 0$ , alors  $\varphi(u) \geq 0$  et que si de plus, il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $u_{n_0} > 0$ , alors  $\varphi(u) > 0$ .
  - (b) En déduire que si, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq v_n$ , alors  $\varphi(u) \geq \varphi(v)$  et que si de plus, il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $u_{n_0} > v_{n_0}$ , alors  $\varphi(u) > \varphi(v)$ .
4. Montrer que  $\varphi(D_p) \subset \varphi(S) \subset ]0, 1[$ .

#### Développement dyadique propre d'un réel de $]0, 1[$

Soit  $x \in ]0, 1[$ . Dans cette partie, on va étudier la suite  $(\varepsilon^0(x))$ .

5. Montrer que la suite  $d(x)$  converge vers  $x$ .
6. Montrer les propriétés suivantes de la suite  $\varepsilon^0(x)$  :

(a) pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{\varepsilon^0(x)}{2^{n+1}} = d_{n+1}(x) - d_n(x)$  ;

(b)  $\varphi(\varepsilon^0(x)) = x$  ;

(c)  $\varepsilon^0(x) \in D_p$ .

## Une bijection entre $]0, 1[$ et $D_p$

Pour un entier  $n_0 \in \mathbb{N}$ , on définit la suite  $a^{(n_0)} = (a_n^{(n_0)})_{n \in \mathbb{N}} \in \{-1, 0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ , par :

$$a_n^{(n_0)} = \begin{cases} 0 & \text{si } n < n_0 \text{ (potentiellement vide)} \\ 1 & \text{si } n = n_0 \\ -1 & \text{si } n > n_0 \end{cases}.$$

7. (a) Montrer que, pour tout  $n_0 \in \mathbb{N}$ ,  $a^{(n_0)} \in \text{Ker}(\varphi)$ .  
(b) Soit  $u \in \{-1, 0, 1\}^{\mathbb{N}}$  une suite non nulle. On note  $n_0 = \min(\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \neq 0\})$ . Justifier la bonne définition de  $n_0$  puis montrer que si  $u \in \text{Ker}(\varphi)$ , alors  $u = u_{n_0} a^{(n_0)}$ .
8. Soit  $\varepsilon, \varepsilon' \in S$  telles que  $\varphi(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon')$ . Montrer que si  $\varepsilon \neq \varepsilon'$  alors  $\varepsilon \in S_0$  et  $\varepsilon' \in S_1$  ou  $\varepsilon \in S_1$  et  $\varepsilon' \in S_0$ .
9. Soit  $\varepsilon \in D_p$ . On note  $x = \varphi(\varepsilon)$ . Montrer que  $\varphi^{-1}(\{x\}) \cap D_p = \{\varepsilon\}$ .
10. Montrer que l'application  $\varepsilon^0 : x \mapsto \varepsilon^0(x)$  est une bijection de  $]0, 1[$  dans  $D_p$ .

## Suites stationnaires et jeux de bijections

11. Dans chacun des cas, déterminer une bijection explicite :  
*Remarque : on pourra se servir des bijections explicites des questions précédentes dans la construction des suivantes !*
  - (a)  $b_0$  de  $S_1 \cup \{\mathbf{1}\}$  dans  $S_0 \cup \{\mathbf{0}\}$ .
  - (b)  $b_1$  de  $S_1 \cup \{\mathbf{1}\}$  dans  $S_0$  et (on pourra commencer par construire une bijection  $b_1$  de  $S_0 \cup \{\mathbf{0}\}$  vers  $S_0$ ).
  - (c)  $b$  de  $S_0 \cup \{\mathbf{0}\} \cup S_1 \cup \{\mathbf{1}\}$  dans  $S_0$ .
12. Montrer que  $S_0$  est dénombrable de deux façons :
  - (a) 1ère façon. En décomposant  $S_0$  comme une union dénombrable d'ensembles finis.
  - (b) 2ème façon. En utilisant la dénombrabilité de  $\mathcal{D}_2 \cap ]0, 1[$  et une bijection avec ce dernier. On procédera en répondant aux questions suivantes :
    - i. Montrer que  $\mathcal{D}_2$  est dénombrable.
    - ii. Montrer que  $\mathcal{D}_2 \cap ]0, 1[ = \left\{ \frac{2p+1}{2^{q+1}} \mid p, q \in \mathbb{N} \text{ et } p < 2^q \right\}$ .
    - iii. Soit  $x \in ]0, 1[$ . Montrer que  $x \in \mathcal{D}_2$  si, et seulement si,  $\varepsilon^0(x) \in S_0$ .
    - iv. En déduire que  $S_0$  est dénombrable.

## Cardinal de $\mathbb{R}$

On dit que deux ensembles sont **équipotents** s'il existe une bijection entre ces deux ensembles. On vérifie aisément que *être équipotents* vérifie la réflexivité, la symétrie et la transitivité comme une relation d'équivalence.

*On ne soulèvera pas ici les détails théoriques qui ne permettent pas de dire qu'"être équipotents" est une relation ; et dans la suite, nous ferons comme si elle l'était.*

On dit alors que deux ensembles ont le même **cardinal** s'ils sont équipotents.

On note  $\aleph_0$  le cardinal de  $\mathbb{N}$  (et donc de tout ensemble dénombrable) et, par analogie au cas des ensembles finis, on note  $2^{\aleph_0}$  le cardinal de  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ .

13. Montrer que le cardinal de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  est  $2^{\aleph_0}$ .
14. En déduire que  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  et  $D_p$  sont équipotents.
15. Montrer que le cardinal de  $]0, 1[$  puis de  $\mathbb{R}$  est  $2^{\aleph_0}$ .

## Le théorème de Cantor-Bernstein

Dans cette partie, l'objectif est de démontrer le théorème suivant, connu sous le nom de *Théorème de Cantor-Bernstein* :

Soit  $E, F$  des ensembles. S'il existe une injection de  $E$  dans  $F$  et une injection de  $F$  dans  $E$ , alors  $E$  et  $F$  sont équipotents.

Soit  $E$  et  $F$  des ensembles qu'on suppose disjoints. On suppose qu'il existe  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow E$  des applications injectives.

On rappelle qu'alors  $f : E \rightarrow \text{Im}(f)$  est bijective et on notera  $f^{-1} : \text{Im}(f) \rightarrow E$  son application réciproque. De même, pour  $g : F \rightarrow \text{Im}(g)$  et  $g^{-1} : \text{Im}(g) \rightarrow F$ .

On considère un élément  $\bullet \notin E \cup F$  et note  $X = E \cup F \cup \{\bullet\}$ .

Pour chaque  $x \in X$ , on considère la suite récurrente  $s(x) = (s(x)_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (ou plus simplement  $s = (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  s'il n'y a pas d'ambiguïté) à valeurs dans  $X$  définie de la façon suivante :

$$\begin{cases} s_0 = & x \\ s_{n+1} = & \begin{cases} g^{-1}(x_n) & \text{si } s_n \in \text{Im}(g) \\ f^{-1}(x_n) & \text{si } s_n \in \text{Im}(f) \\ \bullet & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}, \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

On note :

$$E_\infty = \{x \in E \mid \forall n \in \mathbb{N}, s(x)_n \neq \bullet\} \quad F_\infty = \{x \in F \mid \forall n \in \mathbb{N}, s(x)_n \neq \bullet\}$$

$$E_\bullet = E \setminus E_\infty \quad F_\bullet = F \setminus F_\infty.$$

16. Expliquer succinctement pourquoi on a dû supposer  $E$  et  $F$  disjoints pour s'assurer de la bonne définition de  $(s_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  pour tout  $x \in X$ .
17. Soit  $x \in E \cup F$ . Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $s_n \neq \bullet$  implique :

$$\text{si } x \in E, s_n \in \begin{cases} E & \text{si } n \in 2\mathbb{N} \\ F & \text{si } n \in 2\mathbb{N} + 1 \end{cases} \text{ et, si } x \in F, s_n \in \begin{cases} F & \text{si } n \in 2\mathbb{N} \\ E & \text{si } n \in 2\mathbb{N} + 1 \end{cases}.$$

18. Soit  $x \in E_\bullet \cup F_\bullet$ . Montrer que  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est stationnaire en  $\bullet$  puis en déduire l'existence d'un plus grand entier que l'on notera  $n_0(x)$  (ou plus simplement  $n_0$ ) tel que  $s_{n_0} \neq \bullet$  et  $s_{n_0+1} = \bullet$ .

La question précédente légitime les notations que l'on utilisera dans la suite :

$$E_E = \{x \in E_\bullet \mid n_0(x) \in 2\mathbb{N}\} \quad E_F = \{x \in E_\bullet \mid n_0(x) \in 2\mathbb{N} + 1\}$$

$$F_F = \{x \in F_\bullet \mid n_0(x) \in 2\mathbb{N}\} \quad F_E = \{x \in F_\bullet \mid n_0(x) \in 2\mathbb{N} + 1\}.$$

19. Montrer que  $(E_\infty, E_E, E_F)$  est un recouvrement de  $E$  i.e. ces trois ensembles vérifient que leur union est égale à  $E$  et que leurs intersections deux à deux sont disjointes.
20. Montrer que  $f(E_E) = F_E$  puis déterminer  $f(E_\infty)$  et  $g(F_F)$ .
21. Construire une bijection de  $E$  dans  $F$ .
22. Que faire si  $E$  et  $F$  ne sont pas disjoints ?
23. Conclure.

## Cardinal de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

24. A suivre!

Correction.

### Propriétés utiles de l'application $\varphi$

- L'application  $\varphi$  est bien définie sur  $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$  car si  $u \in \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$  est bornée par disons  $M \geq 0$ , alors  $\frac{|u_n|}{2^{n+1}} \leq \frac{M}{2^{n+1}}$  qui est le terme général d'une série géométrique de raison  $\frac{1}{2} \in ]-1, 1[$ , et donc par comparaison, la série numérique  $\sum \frac{u_n}{2^{n+1}}$  converge absolument et donc converge.  
— L'application  $\varphi$  est une application linéaire par linéarité de la somme de séries convergentes.

2. On a :

$$\varphi(\mathbf{0}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{0}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0$$

et par la formule de la somme d'une série géométrique de raison  $\frac{1}{2}$ , on a :

$$\varphi(\mathbf{1}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

3. Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}, v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ .

- (a) On suppose que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq 0$ . Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{u_n}{2^{n+1}} \geq 0$ , donc, par positivité de la sommation des séries convergentes (cela provient du théorème des gendarmes : on a affaire à la limite d'une suites à valeurs positives!), on obtient :

$$\varphi(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{u_n}{2^{n+1}}}_{\geq 0} \geq 0.$$

Si de plus on suppose qu'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $u_{n_0} > 0$ , on a, de manière analogue à ce qui précède :

$$\varphi(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}} = \underbrace{\frac{u_{n_0}}{2^{n_0+1}}}_{>0} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}}_{\geq 0} > 0$$

- (b) On suppose que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq v_n$ . On pose  $w = u - v$ . Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $w_n = u_n - v_n \geq 0$  donc  $\varphi(w) \geq 0$  d'après la question précédente et, par linéarité de  $\varphi$ ,  $\varphi(w) = \varphi(u) - \varphi(v)$ . Par suite,  $\varphi(u) \geq \varphi(v)$ .

Si de plus on suppose qu'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $u_{n_0} > v_{n_0}$ , alors  $w_{n_0} > 0$  d'où, d'après la question précédente,  $\varphi(w) > 0$  et donc, comme  $\varphi(w) = \varphi(u) - \varphi(v)$  on conclut que  $\varphi(u) > \varphi(v)$ .

4. Tout d'abord, on remarque que  $D_p \subset S$  donc on a  $\varphi(D_p) \subset \varphi(S)$ .

De plus, pour tout  $\varepsilon \in S$ , on a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq \varepsilon_n \leq 1$  car  $S \subset \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , puis, comme

$\varepsilon \neq \mathbf{0}$  et  $\varepsilon \neq \mathbf{1}$ , il existe  $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$  tels que  $\varepsilon_{n_0} > 0$  et  $\varepsilon_{n_1} < 1$ .  
Par suite, d'après la question 3b, on a :

$$0 = \varphi(\mathbf{0}) < \varphi(u) < \varphi(\mathbf{1}) = 1.$$

Il en résulte que  $\varphi(D_p) \subset \varphi(S) \subset ]0, 1[$ .

### Développement dyadique propre d'un réel de $]0, 1[$

Soit  $x \in ]0, 1[$ .

5. Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n(x) = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n}$  donc, par définition de la partie entière, on a  $2^n x - 1 < \lfloor 2^n x \rfloor \leq 2^n x$  et d'où :

$$x - \frac{1}{2^n} < u_n(x) \leq x \quad (*)$$

Ainsi, comme  $\frac{1}{2^n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ , d'après le théorème des gendarmes, la suite  $u(x) = (u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $x$ .

6. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a :

$$\frac{\varepsilon_n^0(x)}{2^{n+1}} = \frac{\lfloor 2^{n+1} x \rfloor - 2 \lfloor 2^n x \rfloor}{2^{n+1}} = \frac{\lfloor 2^{n+1} x \rfloor}{2^{n+1}} - \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n} = u_{n+1}(x) - u_n(x);$$

- (b) D'après la question 6a, on a  $\sum \frac{\varepsilon_n^0(x)}{2^{n+1}} = \sum (u_{n+1}(x) - u_n(x))$  qui est une série télescopique, donc convergente car de même nature que la suite convergente  $u(x)$  et on a, comme  $\lfloor 2^0 x \rfloor = \lfloor x \rfloor = 0$  car  $x \in ]0, 1[$  :

$$\varphi(\varepsilon^0(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n(x)}{2^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) - u_0(x) = x - \frac{\lfloor 2^0 x \rfloor}{2^0} = x.$$

- (c) Montrons tout d'abord que  $\varepsilon^0(x) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , d'après l'inégalité (\*) de la question 5, on a :

$$-\frac{1}{2^{n+1}} = x - \frac{1}{2^{n+1}} - x < u_{n+1}(x) - u_n(x) < x - \left(x - \frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n}$$

or, d'après la question 6a,  $u_{n+1}(x) - u_n(x) = \frac{\varepsilon_n^0(x)}{2^{n+1}}$ , donc :

$$-1 = -\frac{2^{n+1}}{2^{n+1}} < \varepsilon_n^0(x) < \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2,$$

De plus, comme  $\varepsilon_n^0(x) = \lfloor 2^{n+1} x \rfloor - 2 \lfloor 2^n x \rfloor$  est un entier, on obtient  $\varepsilon_n^0(x) \in \{0, 1\}$ .

Il nous reste à montrer que  $\varepsilon_0(x)$  n'est pas la suite nulle et n'est pas stationnaire en 1.

Comme  $\varphi(\mathbf{0}) = 0$  et, d'après la question 6b,  $\varphi(\varepsilon^0(x)) = x > 0$ , on a  $\varepsilon^0(x) \neq \mathbf{0}$ .

Supposons par l'absurde que  $\varepsilon^0(x)$  est stationnaire en 1 disons à partir d'un rang

$N \in \mathbb{N}$ . On a :

$$\begin{aligned} x - u_N(x) &= \sum_{n=N}^{+\infty} (u_{n+1}(x) - u_n(x)) \\ &= \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n(x)}{2^{n+1}} \\ &= \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \\ x - u_N(x) &= \frac{1}{2^N}. \end{aligned}$$

Or, d'après l'inégalité (\*) de la question 5, on a  $x - u_N(x) < \frac{1}{2^N}$ . Contradiction !

Il en résulte que  $\varepsilon_0(x) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ ,  $\varepsilon^0(x) \neq \mathbf{0}$  et  $\varepsilon^0(x)$  n'est pas stationnaire en 1 et donc  $\varepsilon^0(x) \in D_p$ .

### Une bijection entre $]0, 1[$ et $D_p$

7. (a) Soit  $m \in \mathbb{N}$ . On a :

$$\varphi(a^{(m)}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n^{(m)}}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{m+1}} - \sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{m+1}} - \frac{1}{2^{m+2}} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 0.$$

Par suite,  $a^{(m)} \in \text{Ker}(\varphi)$ .

(b) Soit  $u \in \{-1, 0, 1\}^{\mathbb{N}}$  une suite non nulle. Comme  $u$  est non nulle, il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $u_k \neq 0$  et ainsi,  $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \neq 0\}$  est une partie non vide de  $\mathbb{N}$ . Elle possède donc un plus petit élément  $n_0 = \min(\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \neq 0\})$ .

On suppose  $u \in \text{Ker}(\varphi)$ . Comme  $a^{(n_0)} \in \text{Ker}(\varphi)$  d'après la question précédente et par linéarité de  $f$ , on a  $\varphi(u - u_{n_0} a^{(n_0)}) = \varphi(u) - u_{n_0} \varphi(a^{(n_0)}) = 0$ .

De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$u_n - u_{n_0} a_n^{(n_0)} = \begin{cases} 0 - 0 = 0 & \text{si } n < n_0 \text{ (potentiellement vide)} \\ u_{n_0} - u_{n_0} = 0 & \text{si } n = n_0 \\ u_n + u_{n_0} & \text{si } n > n_0. \end{cases}$$

Par définition de  $n_0$ , on a  $u_{n_0} \neq 0$  et donc, comme  $u \in \{-1, 0, 1\}^{\mathbb{N}}$ ,  $u_{n_0} = \pm 1$ .

— *1er cas* : si  $u_{n_0} = 1$ , alors, pour tout  $n \leq n_0$ ,  $u_n - u_{n_0} a_n^{(n_0)} = 0 \geq 0$  et pour tout  $n > n_0$ , toujours comme  $u \in \{-1, 0, 1\}^{\mathbb{N}}$

$$u_n - u_{n_0} a_n^{(n_0)} = u_n + u_{n_0} = u_n + 1 \geq -1 + 1 = 0$$

Par suite, la série  $\sum \frac{u_n - u_{n_0} a_n^{(n_0)}}{2^{n+1}}$  est à termes positifs et de somme nulle, donc tous ses termes sont nuls.

— *2nd cas* : si  $u_{n_0} = -1$ , de manière analogue, on montre que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , que la série  $\sum \frac{u_n - u_{n_0} a_n^{(n_0)}}{2^{n+1}}$  est à termes négatifs ; or elle est de somme nulle, donc tous ses termes sont nuls.

Il en résulte que  $u = u_{n_0} a^{(n_0)}$ .

8. Soit  $\varepsilon, \varepsilon' \in S$  telles que  $\varphi(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon')$ .

On suppose que  $\varepsilon \neq \varepsilon'$ . On pose  $u = \varepsilon - \varepsilon' \neq 0$ . Comme  $\varepsilon, \varepsilon' \in S \subset \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , alors  $u \in \{-1, 0, 1\}^{\mathbb{N}} \setminus \{\mathbf{0}\}$ . De plus, on a  $u \in \text{Ker}(\varphi)$  car, par linéarité de  $\varphi$ ,  $\varphi(u) = \varphi(\varepsilon) - \varphi(\varepsilon') = 0$ . Par suite, d'après la question précédente, pour  $n_0 = \min(\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \neq 0\})$ , on a  $u = u_{n_0} a^{(n_0)}$ .

On va utiliser  $\varepsilon, \varepsilon' \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  : pour un certain entier  $n \in \mathbb{N}$ , la seule possibilité pour que  $\varepsilon_n - \varepsilon'_n = 1$  est  $\varepsilon_n = 1$  et  $\varepsilon'_n = 0$  et la seule possibilité pour que  $\varepsilon_n - \varepsilon'_n = -1$  est  $\varepsilon_n = 0$  et  $\varepsilon'_n = 1$ .

Raisonnons selon le signe de  $u_{n_0}$  :

— *1er cas* : si  $u_{n_0} = 1$ . Alors  $\varepsilon - \varepsilon' = a^{(n_0)}$ . Comme, pour tout entier  $n \geq n_0 + 1$ ,  $a_n^{(n_0)} = -1$ , alors  $\varepsilon_n = 0$  et  $\varepsilon'_n = 1$ .

D'où  $\varepsilon$  est stationnaire en 0 et  $\varepsilon'$  en 1.

— *2nd cas* : si  $u_{n_0} = -1$ . Alors  $\varepsilon - \varepsilon' = -a^{(n_0)}$ . Comme, pour tout entier  $n \geq n_0 + 1$ ,  $-a_n^{(n_0)} = 1$ , alors  $\varepsilon_n = 1$  et  $\varepsilon'_n = 0$ .

D'où  $\varepsilon$  est stationnaire en 1 et  $\varepsilon'$  en 0.

Il en résulte que  $\varepsilon \in S_0$  et  $\varepsilon' \in S_1$  ou  $\varepsilon \in S_1$  et  $\varepsilon' \in S_0$ .

9. Soit  $\varepsilon' \in \varphi^{-1}(\{x\}) \cap D_p$ . Alors  $\varepsilon, \varepsilon' \in D_p \subset S$  et  $\varphi(\varepsilon') = x = \varphi(\varepsilon)$ .

— *1er cas* : si  $\varepsilon$  n'est pas stationnaire. Par contraposée de la question 8, on a alors  $\varepsilon = \varepsilon'$ .

— *2nd cas* : si  $\varepsilon$  est stationnaire. Alors, comme  $\varepsilon \in D_p$ ,  $\varepsilon \in S_0$ . Supposons par l'absurde que  $\varepsilon' \neq \varepsilon$ . Alors, d'après la question 8,  $\varepsilon' \in S_1$ . Contradiction !  $\varepsilon' \in D_p$  et  $D_p \cap S_1 = \emptyset$ . Dans tous les cas,  $\varepsilon' = \varepsilon$  donc  $\varphi^{-1}(\{x\}) \cap D_p = \{\varepsilon\}$ .

10. On considère l'application  $\varepsilon^0 : x \mapsto \varepsilon^0(x)$ . Alors, d'après la question 6c,  $\varepsilon^0$  est une application de  $]0, 1[$  dans  $D_p$ . De plus, pour tout  $\varepsilon \in D_p$ , en notant  $x = \varphi(\varepsilon) \in ]0, 1[$  (d'après la question 4), on a, d'après la question 6b,  $\varphi(\varepsilon^0(x)) = x$ .

Par suite,  $\varepsilon^0(x) \in \varphi^{-1}(\{x\}) \cap D_p$  ensemble ne contenant que  $\varepsilon$  d'après la question 9, donc  $\varepsilon^0(x) = \varepsilon$ . Ainsi,  $x$  est un antécédent de  $\varepsilon$  par  $\varepsilon^0$  et cet antécédent est unique car  $x = \varphi(\varepsilon)$ .

Il en résulte que  $\varepsilon^0$  est une bijection de  $]0, 1[$  dans  $D_p$ .

## Suites stationnaires et jeux de bijections

11. (a) Considérons l'application  $b_0 : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telle que, pour  $\varepsilon \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ,  $b_0(\varepsilon) = \mathbf{1} - \varepsilon$ . Alors  $b_0$  est une bijection car  $b_0$  est involutive i.e.  $b_0$  est sa propre fonction réciproque.

De plus, on a  $b_0(S_1 \cup \{\mathbf{0}\}) = S_1 \cup \{\mathbf{1}\}$ . En effet, pour  $\varepsilon \in S_0 \cup \{\mathbf{0}\}$ , alors  $\varepsilon$  est stationnaire en 0 donc il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout entier  $n \geq n_0$ ,  $\varepsilon_n = 0$  et ainsi,  $b_0(\varepsilon)_n = 1 - \varepsilon_n = 1$ . D'où  $b_0(\varepsilon)$  est stationnaire en 1 i.e. appartient à  $S_1 \cup \{\mathbf{1}\}$ .

Par suite,  $b_0$  restreinte à  $S_1$  est une bijection de  $S_0 \cup \{\mathbf{0}\}$  dans  $S_1 \cup \{\mathbf{1}\}$ .

(b) Pour  $k \in \mathbb{N}$ , on note  $e(k) \in S_0$  la suite nulle sauf son  $k$ -ème terme qui vaut 1. On construit alors  $b'_1 : S_0 \cup \{\mathbf{0}\} \rightarrow S_0$  de la façon suivante : pour  $\varepsilon \in S_0 \cup \{\mathbf{0}\}$ ,

- si  $\varepsilon = \mathbf{0}$ , alors  $b'_1(\varepsilon) = e(0)$  ;
- s'il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $\varepsilon = e(k)$ ,  $b'_1(\varepsilon) = \varepsilon(k+1)$  ;
- sinon,  $b'_1(\varepsilon) = \varepsilon$ .

La fonction  $b'_1$  est alors bijective par construction.

L'application  $b_0$  réalise une bijection de  $S_1 \cup \{\mathbf{1}\}$  dans  $S_0 \cup \{\mathbf{0}\}$  donc  $b_1 = b'_1 \circ b_0 : S_1 \cup \{\mathbf{1}\} \rightarrow S_0$  est une bijection.

- (c) Pour  $i = 0, 1$ , on note  $S_{0,i} = \{\varepsilon \in S_0 \mid \varepsilon_0 = i\}$  et on considère les applications  $s_i : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  définie, pour  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , par,  $n$  étant un entier naturel :

$$s_i(u)_n = \begin{cases} i & \text{si } n = 0 \\ u_{n-1} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

L'application  $s_i$  est injective car les termes d'indices non nuls de la suite  $s_i(u)$  étant ceux de  $u$  décalés d'un terme. De plus,

- La restriction de  $s_0$  à  $S_0$  a pour image  $S_{0,0}$  donc  $s_0 : S_0 \rightarrow S_{0,0}$  est une bijection.
- La restriction de  $s_1$  à  $S_0 \cup \{\mathbf{0}\}$  a pour image  $S_{0,1}$  donc  $s_1 : S_0 \cup \{\mathbf{0}\} \rightarrow S_{0,1}$  est une bijection.

On remarque que  $(S_{0,0}, S_{1,1})$  forme une partition de  $S_0$  et ainsi, on peut construire une bijection  $b : S_0 \cup \{\mathbf{0}\} \cup S_1 \cup \{\mathbf{1}\} \rightarrow S_0$  de la façon suivante : pour  $\varepsilon \in S_0 \cup \{\mathbf{0}\} \cup S_1 \cup \{\mathbf{1}\}$ ,

- si  $\varepsilon \in S_0 \cup \{\mathbf{0}\}$ , on pose  $b(\varepsilon) = s_1(\varepsilon)$  et
- si  $\varepsilon \in S_1 \cup \{\mathbf{1}\}$ , on pose  $b(\varepsilon) = s_0 \circ b_1(\varepsilon)$ .

Par construction,  $b : S_0 \cup \{\mathbf{0}\} \cup S_1 \cup \{\mathbf{1}\} \rightarrow S_{0,0} \cup S_{0,1} = S_0$  est une bijection.

12. Montrons que  $S_0$  est dénombrable de deux façons :

- (a) *1ère façon.* Soit  $N \in \mathbb{N}$ . On note  $S_f(N) = \{\varepsilon \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \mid \forall n > N, \varepsilon_n = 0\}$ . Alors, pour  $N \in \mathbb{N}$ ,  $S_f(N)$  est un ensemble fini (de cardinal  $2^N$ ) car en bijection avec  $\{0, 1\}^N$  et donc au plus dénombrable. De plus, on remarque que :

$$S_0 \subset \bigcup_{N \in \mathbb{N}} S_f(N)$$

Or,  $\bigcup_{N \in \mathbb{N}} S_f(N)$  est au plus dénombrable comme union dénombrable d'ensembles au plus dénombrable et donc  $S_0$  est au plus dénombrable.

Ainsi, comme  $S_0$  est infini,  $S_0$  est dénombrable.

- (b) *2ème façon.*

i. La fonction  $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{D}_2$  telle que  $f : (a, n) \mapsto \frac{a}{2^n}$  est surjective et  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  est dénombrable comme produit cartésien fini d'ensembles dénombrables. Par suite,  $\mathcal{D}_2$  est dénombrable.

ii. On note  $A = \{\frac{2p+1}{2^{q+1}} \mid p, q \in \mathbb{N} \text{ et } p < 2^q\}$ . Procédons par double inclusion.

- Montrons  $A \subset \mathcal{D}_2 \cap ]0, 1[$ . Soit  $y = \frac{2p+1}{2^q} \in A$  avec  $p, q \in \mathbb{N}$  et  $p < 2^q$ . Alors on a  $2p+1 < 2 \times 2^q + 1 = 2^{q+1} + 1$  et  $2p+1, 2^{q+1} + 1 \in \mathbb{N}$  donc  $2p+1 \leq 2^{q+1}$ . Or  $2p+1$  et  $2^{q+1}$  sont des entiers respectivement impair et pair, donc différents, d'où  $2p+1 < 2^{q+1}$  et donc  $y \in ]0, 1[$ .

De plus, en particulier,  $2p+1 \in \mathbb{Z}$  et  $q+1 \in \mathbb{N}$  donc  $y \in \mathcal{D}_2$ .

Par suite,  $y \in \mathcal{D}_2 \cap ]0, 1[$ . D'où l'inclusion.

- Montrons  $\mathcal{D}_2 \cap ]0, 1[ \subset A$ . Soit  $y \in \mathcal{D}_2 \cap ]0, 1[$ . Alors il existe  $(a, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  tels que  $y = \frac{a}{2^n}$  car  $y \in \mathcal{D}_2$  et  $0 < a < 2^n$  car  $y \in ]0, 1[$ . Ainsi, on a  $a \in \mathbb{N}^*$  donc il existe (un unique) couple  $(p, r) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $a = 2^r(2p+1)$  (*décomposition classique d'un entier naturel non nul avec  $r = \max(\{k \in \mathbb{N} \mid 2^k \mid a\})$  et  $p = \frac{a-2^r}{2^{r+1}}$* ).

Par suite, en posant  $q = n - r - 1$ , on a :

$$y = \frac{a}{2^n} = \frac{2^r(2p+1)}{2^n} = \frac{2p+1}{2^{n-r}} = \frac{2p+1}{2^{q+1}}$$

Il reste donc à montrer que  $q \in \mathbb{N}$  et  $p < 2^q$ . On a  $2^r \leq 2^r(2p+1) = a < 2^n$ , donc  $2^{n-r} > 1$ , d'où, comme  $n, r \in \mathbb{N}$ , on obtient  $n-r \in \mathbb{N}^*$  et donc  $q = n-r-1 \in \mathbb{N}$ .

Comme  $\frac{2p+1}{2^{q+1}} = y < 1$ , on a  $2p < 2p+1 < 2^{q+1}$  d'où  $p < 2^q$ .

Par suite,  $y \in A$ . D'où l'inclusion.

Il en résulte que  $\mathcal{D}_2 \cap ]0, 1[ = A$ .

iii. Soit  $x \in ]0, 1[$ .

( $\Leftarrow$ ) On suppose  $\varepsilon_0(x)$  est stationnaire en 0, disons à partir d'un rang  $N \in \mathbb{N}$ . Ainsi, pour tout entier naturel  $n \leq N-1$ ,  $2^{N-(n+1)}\varepsilon_n(x) \in \mathbb{N}$  et donc, comme  $\varepsilon_n^0(x)_n = 0$  pour tout entier  $n \geq N$  :

$$x = \varphi(\varepsilon_0(x)) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\varepsilon_n(x)}{2^{n+1}} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} 2^{N-(n+1)}\varepsilon_n(x)}{2^N} \in \mathcal{D}_2.$$

( $\Rightarrow$ ) On suppose  $x \in \mathcal{D}_2$ . Alors  $x \in \mathcal{D}_2 \cap ]0, 1[$  donc d'après la question précédente, il existe  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $x = \frac{2p+1}{2^{q+1}}$ . Alors on a :

$$\varepsilon^0(x)_q = \lfloor 2^{q+1}x \rfloor - 2\lfloor 2^q x \rfloor = 2p+1 - 2\lfloor p + \frac{1}{2} \rfloor = 2p+1 - 2p = 1,$$

et, pour tout entier  $n \geq q+1$ , comme  $2^{n-(q+1)}(2p+1) \in \mathbb{N}$  :

$$\lfloor 2^n x \rfloor = \lfloor 2^{n-(q+1)}(2p+1) \rfloor = 2^{n-(q+1)}(2p+1),$$

d'où  $\varepsilon_n^0(x) = 2^{n+1-(q+1)}(2p+1) - 2 \times 2^{n-(q+1)}(2p+1) = 0$ .

Il en résulte que  $\varepsilon^0(x)$  est bien stationnaire en 0 à partir du rang  $n_0+1$  et  $\varepsilon^0(x)_{n_0} = 1$  donc  $\varepsilon^0(x)$  est bien non constante.

iv. D'après la question 10 et la question précédente, l'application  $\varepsilon^0 : x \mapsto \varepsilon^0(x)$  réalise une bijection entre  $\mathcal{D}_2$  et  $S_0$  donc,  $\mathcal{D}_2$  étant dénombrable d'après la question 11a,  $S_0$  l'est aussi.

## Cardinal de $\mathbb{R}$

13. On considère la fonction  $f : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$  définie de la façon suivante :

$$\text{pour } \varepsilon \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}, f(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{N} \mid \varepsilon(x) = 1\}.$$

Montrons que  $f$  est une bijection de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  dans  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ .

Pour tout  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ , on considère la fonction indicatrice  $\mathbb{1}_A \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  de  $A$  i.e.

$$\mathbb{1}_A : x \mapsto \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose alors  $g : A \mapsto \mathbb{1}_A$  de  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  dans  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . Montrons que  $g$  est la fonction réciproque de  $f$ .

— Calculons  $f \circ g$ . On a, pour tout  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ , par définition de  $\varepsilon_A$  :

$$f \circ g(A) = f(\mathbb{1}_A) = \{x \in \mathbb{N} \mid \mathbb{1}_A(x) = 1\} = A.$$

D'où  $f \circ g = \text{Id}_{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$ .

- Calculons  $g \circ f$ . Soit  $\varepsilon \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . On pose  $A = f(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{N} \mid \varepsilon(x) = 1\}$ . Alors on a, pour tout  $x \in \mathbb{N}$  : si  $x \in A$ ,  $\mathbb{1}_A(x) = 1 = \varepsilon(x)$  et si  $x \notin A$ ,  $\mathbb{1}_A(x) = 0 = \varepsilon(x)$ . Ainsi,  $\mathbb{1}_A = \varepsilon$  et donc :

$$g \circ f(\varepsilon) = g(A) = \mathbb{1}_A = \varepsilon.$$

D'où  $g \circ f = \text{Id}_{\{0, 1\}^{\mathbb{N}}}$ .

Il en résulte que  $f$  est bijective de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  dans  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  et donc  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  et  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  sont en bijection.

14. On remarque que :

$$\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \setminus \{S_0 \cup \{\mathbf{0}\} \cup S_1 \cup \{\mathbf{1}\}\} = D_p \setminus S_0.$$

De plus, d'après la question 11c, il existe une bijection  $b : S_0 \cup \{\mathbf{0}\} \cup S_1 \cup \{\mathbf{1}\} \rightarrow S_0$ .

On construit alors une application  $f$  définie, pour  $\varepsilon \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , par :

- si  $\varepsilon \in S_0 \cup \{\mathbf{0}\} \cup S_1 \cup \{\mathbf{1}\}$ ,  $f(\varepsilon) = b(\varepsilon)$
- si  $\varepsilon \notin S_0 \cup \{\mathbf{0}\} \cup S_1 \cup \{\mathbf{1}\}$ ,  $f(\varepsilon) = \varepsilon$ .

Alors, d'après la remarque initiale, l'application  $f$  est à valeurs dans  $D_p$  et est bijective par construction.

Il en résulte que  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  et  $D_p$  sont équipotents.

15. — D'après la question 10,  $]0, 1[$  et  $D_p$  sont équipotents ; puis d'après la question précédente,  $D_p$  et  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  sont équipotents. Ainsi, par transitivité,  $]0, 1[$  et  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  sont équipotents, donc ils ont le même cardinal.

Ainsi, le cardinal de  $]0, 1[$  est  $2^{\aleph_0}$  car, d'après la question 13,  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  a pour cardinal  $2^{\aleph_0}$ .

- Les fonctions  $\text{argth} : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  et  $x \mapsto 2x - 1$  de  $]0, 1[$  dans  $] -1, 1[$  sont des bijections donc, par composition, l'application  $x \mapsto \text{argth}(2x - 1)$  est une bijection de  $]0, 1[$  dans  $\mathbb{R}$ . Par suite,  $]0, 1[$  et  $\mathbb{R}$  sont équipotents et donc, d'après ce qui précède :  
le cardinal de  $\mathbb{R}$  est  $2^{\aleph_0}$ .

## Problème 2. Séparabilité

### Séparabilité d'un espace vectoriel normé.

Dans tout le problème, les espaces vectoriels considérés le sont sur le corps  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

**Définition.** On dit qu'un espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$  est **séparable** s'il existe  $D \subset E$  tel que  $D$  est au plus dénombrable et  $D$  est dense dans  $E$ .

#### 1. Séparabilité de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ .

1. Justifier que  $\mathbb{R}$  muni de la valeur absolue est séparable en donnant un ensemble  $D$  dénombrable et dense dans  $\mathbb{R}$ . *On ne demande pas de démonstration de la densité ni de la dénombrabilité de  $D$ .*
2. En utilisant la densité de  $D$  dans  $\mathbb{R}$ , montrer que  $\mathbb{C}$  muni du module est séparable.

#### 2. Précision pour les espaces séparables de dimension non nulle.

Soit  $E$  un espace vectoriel normé.

1. Justifier que si  $\dim(E) = 0$  alors  $E$  est séparable.
2. Soit  $D$  un sous-ensemble au plus dénombrable et dense dans  $E$ . Montrer que si  $D$  est fini alors  $\dim(E) = 0$  (on rappelle  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ).

En déduire qu'en dimension non nulle, si  $E$  est séparable alors toute partie au plus dénombrable et dense est dénombrable.

Dans toute la suite, **on supposera que les espaces vectoriels considérés sont de dimension non nulle** et on pourra remplacer *au plus dénombrable* par *dénombrable* dans la définition de séparabilité en vertu de la question précédente.

### 3. Quelques propriétés des espaces séparables et séparabilité des espaces vectoriels normés de dimension finie.

3. Soit  $E$  un espace vectoriel et  $N, N'$  des normes sur  $E$ . On suppose  $N$  domine  $N'$  et  $(E, N)$  séparable. Montrer que  $(E, N')$  est séparable.  
En déduire que la séparabilité est invariante par passage à une norme équivalente.
4. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(E_1, \|\cdot\|_1), \dots, (E_n, \|\cdot\|_n)$  des espaces vectoriels normés séparables. Montrer que  $E = E_1 \times \dots \times E_n$  muni de la norme produit est séparable.
5. Soit  $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$  des espaces vectoriels normés et  $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$  une application linéaire continue. On suppose  $(E, \|\cdot\|_E)$  séparable. Montrer que  $F' = \text{Im}(f)$  muni de la norme induite est séparable.  
En déduire que dans un espace vectoriel normé, tout sous-espace vectoriel muni de la norme induite est séparable.
6. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Montrer que  $\mathbb{K}^n$  muni d'une norme quelconque est séparable.  
En déduire que tout espace vectoriel de dimension finie est séparable.

### 4. Espaces séparables en dimension infinie.

7. *Lemme.* Montrer que les ensembles  $S(D) = \{u \in D^{\mathbb{N}} \mid u \text{ est stationnaire en } 0\}$  et  $D[X]$  sont dénombrables où  $D$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{K}$  dénombrable et dense dans  $\mathbb{K}$ .
8. Montrer que  $\mathbb{K}[X]$  muni de la norme  $\|\cdot\|_{\infty} : P \mapsto \sup_{t \in [a, b]} |P(t)|$  est séparable en montrant la densité de  $D[X]$  dans cet espace.
9. Soit  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $a < b$ . Montrer que l'espace  $C([a, b], \mathbb{R})$  des fonctions à valeurs réelles continues sur  $[a, b]$  muni de la norme  $\|\cdot\|_{\infty}$  de la convergence uniforme est séparable.  
Qu'en est-il si on le munit de la norme de la convergence en moyenne  $\|\cdot\|_1$  ou de la norme de la convergence en moyenne quadratique  $\|\cdot\|_2$  ?
10. Soit  $p \in [1, +\infty[$ . Montrer que  $\ell^p = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum |u_n|^p \text{ converge}\}$  munie de la norme :

$$\|\cdot\|_p : u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \|u\|_p = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^p$$

est séparable.

### 5. Espaces non séparables.

11. Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé et  $A \subset E$ . On suppose que  $A$  est infini non dénombrable et qu'il existe un réel  $\eta > 0$  tel que, pour tous  $x, y \in A$  avec  $x \neq y$ ,  $\|x - y\| \geq \eta$ . Montrer que  $E$  n'est pas séparable.
12. Montrer que l'espace  $\ell^{\infty}$  des suites à valeurs réelles bornées muni de sa norme canonique  $\|\cdot\|_{\infty}$  n'est pas séparable.
13. Montrer que l'espace  $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  des fonctions bornées de  $\mathbb{R}$  dans lui-même muni de la norme  $\|\cdot\|_{\infty}$  de la convergence uniforme n'est pas séparable.

## 6. Caractérisations de la séparabilité.

**Définition.** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé,  $I$  un ensemble et  $(e_i)_{i \in I}$  une famille d'éléments de  $E$ . On dit que  $(e_i)_{i \in I}$  est une **famille totale** si  $\text{Vect}((e_i)_{i \in I})$  est dense dans  $E$ . On dira plus spécifiquement **suite totale** si  $I = \mathbb{N}$ .

14. Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- i)  $E$  est séparable.
- ii) il existe une suite  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  croissante au sens de l'inclusion de sous-espaces vectoriels de dimension finie de  $E$  telle que  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$  est dense dans  $E$ ; de plus, si  $E$  est de dimension infinie, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $E_n$  peut être choisi de dimension  $n + 1$ .
- iii) il existe une famille totale au plus dénombrable composée de vecteurs linéairement indépendants de  $E$ .
- iv) il existe une famille totale au plus dénombrable composée de vecteurs de  $E$ .

*Indication : on pourra commencer par prouver qu'en dimension finie, les quatre assertions sont toujours vraies, puis en supposant que  $E$  est de dimension infinie montrer  $i) \Leftrightarrow ii)$  puis  $ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow iv) \Rightarrow ii)$ .*

15. Montrer que  $\mathbb{K}[X]$  muni d'une norme quelconque est séparable.

16. Déterminer des suites totales pour les espaces séparables des questions 9 et 10.

17. Montrer que l'espace  $C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  des fonctions continues de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}$  de limite nulle en  $+\infty$  muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$  de la convergence uniforme est séparable en démontrant que la suite  $(f_n : x \mapsto e^{-nx})_{n \in \mathbb{N}^*}$  est totale dans cet espace.

18. Montrer que l'espace vectoriel  $\ell^\infty$  muni de la norme  $\|\cdot\| : u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{|u_n|}{2^n}$  est séparable.

En déduire qu'il existe des espaces vectoriels séparables pour une norme mais pas pour une autre.

## 7. Séparabilité et espace dual.

**Définition.** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé sur  $\mathbb{R}$ . On appelle **dual** de  $E$  et on note  $E'$  l'espace vectoriel  $\mathcal{L}_c(E, \mathbb{R})$  des formes linéaires continues de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ .

Dans la suite, on munit le dual  $E'$  de  $E$  de la norme d'opérateur  $\|f\|$  où on rappelle que, pour  $f \in E'$ ,

$$\|f\| = \inf\{k \in \mathbb{R}_+ \mid \forall x \in E, |f(x)| \leq k\|x\|\} = \sup_{x \neq 0_E} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|.$$

Le but de cette partie est d'établir, en admettant le théorème d'Hahn Banch ci-après, le résultat suivant : étant donné un espace vectoriel normé réel, si son dual est séparable, alors l'espace l'est aussi.

**Définition.** Soit  $E$  un espace vectoriel normé sur  $\mathbb{R}$  et  $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $p$  est une application **sous-linéaire** sur  $E$  si :

- i) pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  et tout  $x \in E$ ,  $p(\lambda x) = \lambda p(x)$  et,
- ii) pour tous  $x, y \in E$ ,  $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ .

19. *Exemples d'applications sous-linéaires.* Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé sur  $\mathbb{R}$ . Dans toute la suite du problème, on note  $d$  la distance associée à la norme  $\|\cdot\|$ .

On rappelle la notation, pour  $A \subset E$  et  $x \in E$  :

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

- (a) Justifier que  $\|\cdot\|$  est sous-linéaire sur  $E$ .
- (b) Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Montrer que l'application  $p : x \mapsto d(x, F)$  est sous-linéaire sur  $E$  et vérifie, pour tout  $x \in E$  et tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$ .

On admet le théorème suivant, outil très utile en analyse fonctionnelle :

**Théorème de Hahn-Banach.** Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ ,  $p : E \rightarrow \mathbb{R}$  une application sous-linéaire,  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $f \in \mathcal{L}(F, \mathbb{R})$  une forme linéaire sur  $F$ .

Si, pour tout  $x \in F$ ,  $f(x) \leq p(x)$ , alors il existe  $g \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$  une forme linéaire sur  $E$  telle que :

- i) l'application  $g$  prolonge  $f$  sur  $E$  i.e. pour tout  $x \in F$ ,  $g(x) = f(x)$  et
- ii) la contrainte sur  $f$  s'étend à  $g$  sur  $E$  i.e. pour tout  $x \in E$ ,  $g(x) \leq p(x)$ .

20. *Exemple d'utilisation du théorème de Hahn-Banach.* Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé sur  $\mathbb{R}$ .

- (a) Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  muni de la norme induite. Montrer que, pour tout  $f \in F'$ , il existe  $g \in E'$  tel que  $\|g\| = \|f\|$ .
- (b) On suppose  $\dim(E) > 0$ . Soit  $x_0 \in E \setminus \{0_E\}$ . Montrer qu'il existe  $f \in E'$  tel que  $\|f\| = 1$  et  $f(x_0) = \|x_0\|$ .  
En déduire que, pour  $x \in E$ , on a  $x = 0_E$  si, et seulement si, pour tout  $f \in E'$ ,  $f(x) = 0$ .

21. *Lemme.* Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé sur  $\mathbb{R}$  et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

- (a) Soit  $x_0 \in E$ . En utilisant le théorème de Hahn-Banach, justifier qu'il existe  $f \in E'$  tel que  $f(x_0) = d(x_0, F)$  et  $F \subset \text{Ker}(f)$ .
- (b) En déduire que  $F$  est dense dans  $E$  si, et seulement si, pour tout  $f \in E'$ ,  $F \subset \text{Ker}(f)$  implique  $f = \mathbf{0}$ .

22. *Preuve du résultat.* Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé sur  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $(E', \|\cdot\|)$  est séparable. Montrer que  $(E, \|\cdot\|)$  est séparable.

#### Correction.

### 1. Séparabilité de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ .

1. Le sous-ensemble  $D = \mathbb{Q}$  des nombres rationnels est dense dans  $\mathbb{R}$  et il est dénombrable donc  $\mathbb{R}$  est séparable.
2. On note  $D' = \{a + ib \mid a, b \in D\} \subset \mathbb{C}$ . Alors  $D'$  est dénombrable car  $D \times D$  l'est comme produit cartésien fini d'ensembles dénombrables et  $f : (a, b) \rightarrow a + ib$  est surjective de  $D \times D$  dans  $D'$  par définition de  $D'$ .

Montrons que  $D'$  est dense dans  $\mathbb{C}$ . Soit  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  avec  $x, y \in \mathbb{R}$ . Comme  $D$  est dense dans  $\mathbb{R}$ , d'après la caractérisation séquentielle de la densité, il existe  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}$  tels que  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$  et  $y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y$ . On pose, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z_n = x_n + iy_n$ . Alors  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est à valeurs dans  $D'$  et on a, par continuité des fonctions carrées et racines carrées :

$$|z - z_n| = \sqrt{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc la suite  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans  $D'$  converge vers  $z$ .

Par suite, d'après la caractérisation séquentielle de la densité,  $D'$  est dense dans  $\mathbb{C}$ .

### 2. Précision pour les espaces séparables de dimension non nulle.

Soit  $E$  un espace vectoriel normé.

1. On suppose  $E = \{0_E\}$ . Alors  $D = \{0_E\}$  est au plus dénombrable car fini et dense dans  $E$  car  $D = E$  donc  $E$  est séparable.
2. Soit  $D$  un sous-ensemble au plus dénombrable et dense dans  $E$ .
  - On suppose  $D$  fini. Alors, comme  $D$  est fini,  $D$  est fermé donc  $D = \overline{D} = E$  donc  $E$  est un ensemble fini. Or, tout espace vectoriel de dimension non nulle sur  $\mathbb{K}$  est infini (car pour  $x \neq 0_E$ ,  $\text{Vect}(x) = \mathbb{K}.x \subset E$  et  $\mathbb{K}.x$  est en bijection avec  $\mathbb{K}$ ), donc  $\dim(E) = 0$ .
  - Par contraposée, si  $E$  est de dimension non nulle, alors  $D$  est infini. Or par hypothèse de départ, il est au plus dénombrable donc  $D$  est dénombrable.

### 3. Quelques propriétés des espaces séparables et séparabilité des espaces vectoriels normés de dimension finie.

3. On suppose que  $N$  domine  $N'$  et  $(E, N)$  est séparable. Alors il existe  $C \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $N' \leq CN$  et il existe  $D \subset E$  tel que  $D$  est au plus dénombrable et dense dans  $(E, N)$ . Montrons que  $D$  est dense dans  $E$  muni de  $N'$ . Soit  $x \in E$  et  $\varepsilon > 0$ . Comme  $D$  est dense dans  $(E, N)$ , il existe  $d \in D$  tel que  $N(x - d) \leq \frac{\varepsilon}{C}$ . Par suite, on a :

$$N'(x - d) \leq CN(x - d) \leq \varepsilon.$$

Par suite,  $D$  est dense dans  $(E, N')$ . De plus,  $D$  est au plus dénombrable donc  $(E, N')$  est séparable.

Deux normes sont équivalentes si, et seulement si, elles se domine l'une l'autre. Ainsi, d'après ce qui précède, pour deux normes équivalentes,  $E$  est séparable pour l'une des normes si, et seulement si,  $E$  est séparable pour l'autre.

4. On suppose que  $(E_1, \|\cdot\|_1), \dots, (E_n, \|\cdot\|_n)$  sont séparables. On note  $\|\cdot\| : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \max(\|x_1\|_1, \dots, \|x_n\|_n)$  la norme produit sur  $E = E_1 \times \dots \times E_n$ . Comme, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $E_i$  est séparable, il existe  $D_i \subset E_i$  au plus dénombrable et dense dans  $E_i$ . On pose  $D = D_1 \times \dots \times D_n$ . Alors  $D$  est au plus dénombrable comme produit cartésien fini d'ensembles dénombrables. Montrons que  $D$  est dense dans  $E$ . Soit  $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$  et  $\varepsilon > 0$ . Comme, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $D_i$  est dense dans  $E_i$ , il existe  $d_i \in D_i$  tel que  $\|x_i - d_i\|_i \leq \varepsilon$ . Par suite, on a,  $d = (d_1, \dots, d_n) \in D$  et :

$$\|x - d\| = \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i - d_i\|_i \leq \varepsilon$$

D'où  $D$  est dense dans  $(E, \|\cdot\|)$ . Il en résulte que  $(E, \|\cdot\|)$  est séparable.

5. On suppose  $(E, \|\cdot\|_E)$  séparable. Alors il existe  $D$  au plus dénombrable et dense dans  $E$ . On note  $D' = f(D)$ . Comme  $f|_D : D \rightarrow D'$  est surjective,  $D'$  est au plus dénombrable. Montrons que  $D'$  est dense dans  $F' = \text{Im}(f)$  muni de la norme induite. L'application  $f$  étant linéaire continue sur  $E$ , il existe un réel  $k > 0$  tel que, pour tout  $x \in E$ ,  $\|f(x)\|_{F'} \leq k\|x\|_E$ . Soit  $f(x) \in F'$  avec  $x \in E$  et  $\varepsilon > 0$ . Par densité de  $D$  dans  $E$ , il existe  $d \in D$  tel que  $\|x - d\|_E \leq \frac{\varepsilon}{k}$ . Par suite,  $f(d) \in f(D) = D'$  et :

$$\|f(x) - f(d)\|_{F'} = \|f(x - d)\|_{F'} \leq k\|x - d\|_E \leq \varepsilon$$

Ainsi,  $D'$  est dense dans  $F'$ .

Il en résulte que  $F$  est séparable.

Si  $F$  est une sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé  $E$  séparable, alors l'injection canonique  $i : x \mapsto x$  de  $F$  dans  $E$  étant linéaire continue pour la norme induite sur  $F$ , d'après ce qui précède,  $F$  muni de la norme induite est séparable.

6. On a  $\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K}$  et la norme infinie est la norme produit sur ce produit cartésien de copies de  $\mathbb{K}$  muni de  $|\cdot|$  qui est séparable d'après les questions 1 et 2, ainsi, d'après la question 4,  $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$  est séparable. De plus, comme  $\mathbb{K}^n$  est de dimension finie, toutes ses normes sont équivalentes donc, d'après la question 3,  $\mathbb{K}^n$  est séparable pour n'importe laquelle de ses normes.

Montrons que tout espace vectoriel normé de dimension finie est séparable.

Si  $\dim(E) = 0$ , alors  $D = \{0_E\}$  est au plus dénombrable (car fini) et dense dans  $E$ .

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie disons  $n \in \mathbb{N}^*$  muni d'une norme  $\|\cdot\|$ . Pour  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ , l'application  $f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i e_i$  est un isomorphisme de  $\mathbb{K}^n$  dans  $E$  et comme  $f$  est linéaire injective,  $\|f(\cdot)\|$  est une norme sur  $\mathbb{K}^n$ . Alors  $f$  est une application linéaire continue de  $(\mathbb{K}^n, \|f(\cdot)\|)$  qui est séparable d'après ce qui précède, dans  $(E, \|\cdot\|)$  donc, d'après la question 5,  $(E, \|\cdot\|)$  est séparable.

*Remarque* : on aurait également pu montrer directement que  $\{\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \mid \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i \in D\}$  est dense dans  $E$  muni d'une norme quelconque où  $D$  est dénombrable et dense dans  $\mathbb{K}$  et  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$  mais ce n'était pas l'esprit de la question !

#### 4. Espaces séparables en dimension infinie.

7. On a la décomposition suivante de  $S(D)$  en union (non disjointe) :

$$S(D) = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} S_N \text{ où } S_N = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} \text{ avec } n \geq N, u_n = 0\}$$

L'ensemble  $S_0 = \{(0)_{n \in \mathbb{N}}\}$  est au plus dénombrable car fini et, pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , l'application  $f : (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_0, \dots, u_{N-1})$  de  $S_N$  dans  $D^N$  qui est dénombrable comme produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est une bijection donc  $S_N$  est dénombrable.

Par suite  $S(D)$  est dénombrable comme union dénombrable d'ensembles au plus dénombrable dont un des termes (presque tous en fait) est dénombrable.

De plus, l'application  $g : (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n X^n$  est une bijection de  $S(D)$  dans  $D[X]$  donc  $D[X]$  est dénombrable.

8. Montrons que  $D[X]$  est dense dans  $(\mathbb{K}[X], \|\cdot\|_\infty)$ . Soit  $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  et  $\varepsilon > 0$ . Si  $P = 0$  alors  $P \in D[X]$ . Sinon, il existe  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  avec  $n \geq N$ ,  $a_n = 0$ . En posant  $M = \max(1, |a|^N, |b|^N)$ , pour tout  $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ , comme  $D$  est dense dans  $\mathbb{K}$ , il existe  $d_n \in D$  tel que  $|a_n - d_n| \leq \frac{\varepsilon}{NM}$ .

On pose, pour tout  $n \geq N$ ,  $d_n = 0$  et  $Q = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n X^n \in D[X]$ . Pour tout  $t \in [a, b]$ , on a  $|t^n| \leq \max(|a|^n, |b|^n) \leq M$  et donc :

$$\begin{aligned} |(P - Q)(t)| &= \left| \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - d_n) t^n \right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{|a_n - d_n|}_{\leq \frac{\varepsilon}{NM}} \underbrace{|t^n|}_{\leq M} \\ |(P - Q)(t)| &\leq N \frac{\varepsilon}{NM} M = \varepsilon \end{aligned}$$

D'où  $\|P - Q\|_\infty \leq \varepsilon$ .

Ainsi,  $D[X]$  est dense dans  $(\mathbb{K}[X], \|\cdot\|_\infty)$ . Or, d'après la question 7,  $D[X]$  est dénombrable, donc  $(\mathbb{K}[X], \|\cdot\|_\infty)$  est séparable.

9. Soit  $f \in C([a, b], \mathbb{K})$  et  $\varepsilon > 0$ . D'après le théorème de Weierstrass, l'ensemble des fonctions polynomiales sur  $[a, b]$  est dense dans  $C([a, b], \mathbb{K})$  muni de  $\|\cdot\|_\infty$  donc il existe  $P \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $\|f - P\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . De plus, d'après la question précédente,  $D[X]$  est dense dans  $\mathbb{K}[X]$  muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$  (qui est la norme induite de celle de  $C([a, b], \mathbb{K})$  sur  $\mathbb{K}[X]$  via l'identification provenant de l'isomorphisme entre les polynômes et leurs fonctions polynomiales associées sur l'intervalle d'intérieur non vide  $[a, b]$ ), donc il existe  $Q \in D[X]$  tel que  $\|P - Q\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$ .

Par suite,  $\|f - Q\|_\infty \leq \|f - P\|_\infty + \|P - Q\|_\infty \leq \varepsilon$ .

Par suite,  $D[X]$  est dense dans  $(C([a, b], \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$  et est dénombrable (question 7) donc  $(C([a, b], \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$  est séparable.

De plus,  $\|\cdot\|_\infty$  domine les normes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$  car  $\|\cdot\|_1 \leq (b-a)\|\cdot\|_\infty$  et  $\|\cdot\|_1 \leq \sqrt{b-a}\|\cdot\|_\infty$  donc, d'après la question 3,  $(C([a, b], \mathbb{K}), \|\cdot\|_1)$  et  $(C([a, b], \mathbb{K}), \|\cdot\|_2)$  sont séparables.

10. Soit  $p \in [1, +\infty[$ . Montrons que  $S(D)$  est dense dans  $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ . Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p$  et  $\varepsilon > 0$ . Comme  $\sum |u_n|^p$  converge, la suite  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des restes de cette série converge vers 0 donc il existe  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que, pour tout entier  $n \geq N$ ,  $R_n \leq \frac{\varepsilon^p}{2}$ .

Comme  $D$  est dense dans  $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ , pour tout  $i \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ , il existe  $d_i \in D$  tel que  $|u_i - d_i| \leq (\frac{\varepsilon^p}{2N})^{\frac{1}{p}}$ . On pose de plus, pour tout entier  $n \geq N$ ,  $d_n = 0$ . Alors  $d = (d_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S(D)$  et on a :

$$\begin{aligned} \|u - d\|_p^p &= \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n - d_n|^p \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{|u_n - d_n|^p}_{\leq \frac{\varepsilon^p}{2N}} + \underbrace{R_n}_{\leq \frac{\varepsilon^p}{2}} \\ \|u - d\|_p^p &\leq N \cdot \frac{\varepsilon^p}{2N} + \frac{\varepsilon^p}{N} = \varepsilon^p \end{aligned}$$

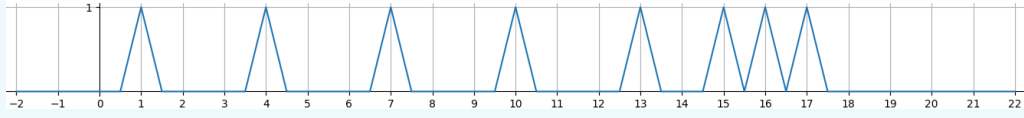
d'où  $\|u - d\|_p \leq \varepsilon$ . Par suite,  $S(D)$  est dense dans  $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ .

Or  $S(D)$  est dénombrable d'après la question 7, donc  $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$  est séparable.

## 5. Espaces non séparables.

11. Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé et  $A \subset E$ . On suppose que  $A$  est infini non dénombrable et qu'il existe un réel  $\eta > 0$  tel que, pour tous  $x, y \in A$  avec  $x \neq y$ ,  $\|x - y\| \geq \eta$ . On note  $B(x, r)$  la boule ouverte de centre  $x \in E$  et de rayon  $r \in \mathbb{R}_+$  pour la norme  $\|\cdot\|$ . Soit  $D$  un ensemble dense dans  $E$ . Alors, pour tout  $x \in A$ , comme  $\eta > 0$ , il existe  $d_x \in B(x, \frac{\eta}{2})$ . Or, pour tous  $x, y \in A$  avec  $x \neq y$ ,  $B(x, \frac{\eta}{2}) \cap B(y, \frac{\eta}{2}) = \emptyset$  car  $\|x - y\| \geq \eta$  donc  $d_x \neq d_y$ . Par suite, l'application  $f : x \mapsto d_x$  est une bijection de  $A$  dans  $f(A) = \{d_x \mid x \in A\}$  qui est donc infini non dénombrable. Comme  $f(A) \subset D$ ,  $D$  est infini non dénombrable. Par suite,  $E$  ne possède pas de sous-ensemble dense et au plus dénombrable donc  $E$  n'est pas séparable.
12. Dans  $\ell^\infty$ , on considère le sous-ensemble  $A = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  qui est infini non dénombrable (car en bijection avec  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ). Alors, pour tous  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A$ , si  $x \neq y$  alors il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $x_n \neq y_n$ . Par suite, comme  $x, y$  sont à valeurs dans  $\{0, 1\}$ ,  $1 = |x_n - y_n| \leq \|x - y\|_\infty$ . Il en résulte que, d'après la question 11,  $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$  n'est pas séparable.
13. Dans  $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , on considère le sous-ensemble  $A = \{f_X \mid X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\}$  où, pour  $X \subset \mathbb{N}$ , la fonction  $f_X$  est définie, pour  $x \in \mathbb{R}$ , de la façon suivante :

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \bigcup_{n \in X} ]n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}[ \\ 2(x - n) + 1 & \text{s'il existe } n \in X \text{ tel que } x \in ]n - \frac{1}{2}, n[ \\ 2(n - x) + 1 & \text{s'il existe } n \in X \text{ tel que } x \in ]n, n + \frac{1}{2}[ \end{cases}$$



Graphique d'une fonction  $f_X$  pour  $X = \{1, 4, 7, 10, 13, 15, 16, 17\}$ .

Soit  $X \subset \mathbb{N}$ . Si  $X$  est vide,  $f_X = 0$  donc  $f_X$  est continue bornée sur  $\mathbb{R}$ . Supposons  $X$  non vide. Comme, pour tous  $p, q \in \mathbb{N}$  avec  $p \neq q$ ,  $|p - q| \geq 1$ , les intervalles  $]p - \frac{1}{2}, p + \frac{1}{2}[$  et  $]q - \frac{1}{2}, q + \frac{1}{2}[$  sont disjoints, donc  $\bigcup_{n \in X} ]n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}[ \neq \emptyset$  est une union disjointe; par suite, si  $x \in \bigcup_{n \in X} ]n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}[$  alors il existe une unique  $n \in X$  tel que  $x \in ]n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}[$ , d'où  $f_X$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$ .

De plus, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , si  $n \notin X$ ,  $f_X = 0$  sur  $]n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}[$  et donc est continue sur cet intervalle et si  $n \in X$ ,  $f_X$  est continue croissante sur  $]n - \frac{1}{2}, n[$ ; continue décroissante sur  $]n, n + \frac{1}{2}[$  et on a  $\lim_{x \rightarrow n^-} f_X(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow n^+} f_X(x)$ ;  $\lim_{x \rightarrow (n + \frac{1}{2})^-} f_X(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow (n - \frac{1}{2})^+} f_X(x) = 0$  donc  $f_X$  est continue sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $[0, 1]$  et donc bornée. Ainsi, on a bien  $A \subset C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

Maintenant, pour  $X, Y \subset \mathbb{N}$  avec  $X \neq Y$ , il existe  $n \in X \setminus Y$  ou  $Y \setminus X$  et dans les deux cas, on a  $|f_X(n) - f_Y(n)| = 1$ ; ainsi,  $f_X \neq f_Y$  et  $\|f_X - f_Y\|_\infty \geq 1$  (et même égal 1 en fait). Par suite, la fonction  $g : X \mapsto f_X$  de  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  dans  $A$  est une bijection, donc  $A$  est infini non dénombrable et comme, pour tous  $f_X, f_Y \in A$  avec  $f_X \neq f_Y$ ,  $\|f_X - f_Y\|_\infty \geq 1$ , d'après la question 11,  $(C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$  n'est pas séparable.

## 6. Caractérisations de la séparabilité.

14. Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé. Si  $E$  est de dimension finie, alors i) est vraie d'après la question 7, ii) est vraie en prenant  $E_n = E$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , iii) et iv) sont vraies en considérant une base de  $E$ .

Supposons  $E$  de dimension infinie et montrons les implications suivantes :

- ii)  $\Rightarrow$  i). On suppose qu'il existe une suite  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  croissante au sens de l'inclusion de sous-espaces vectoriels de dimension finie de  $E$  telle que  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$  est dense dans  $E$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $E_n$  est de dimension finie donc, muni de la norme induite, il est séparable d'après la question 7; ainsi, il existe  $D_n$  au plus dénombrable et dense dans  $E_n$ . On pose  $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$ . Alors on a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $E_n = \overline{D_n} \subset \overline{D}$  donc  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \subset \overline{D}$  et comme  $\overline{D}$  est fermé, on obtient :

$$E = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n} \subset \overline{D} \subset E.$$

Ainsi,  $E = \overline{D}$ . De plus,  $D$  est au plus dénombrable comme union dénombrable d'ensembles au plus dénombrables.

Il en résulte que  $E$  est séparable.

- i)  $\Rightarrow$  ii). On suppose  $E$  séparable. Alors il existe  $D$  dénombrable et dense dans  $E$ . Soit  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite exhaustive des éléments de  $D$  (via une bijection de  $\mathbb{N}$  sur  $D$ ).

Construisons par récurrence une suite  $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$  strictement croissante de sous-espaces vectoriels de  $E$  et une suite  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  strictement croissante d'entiers tels que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\dim(E_k) = k + 1$  et  $\text{Vect}(d_0, \dots, d_{n_k}) = E_k$ .

- ★ Comme les éléments de la suite  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont tous différents,  $N_0 = \{n \in \mathbb{N} \mid d_n \neq 0_E\}$  est une partie non vide de  $\mathbb{N}$  et on note  $n_0 = \min N_0$  (remarque : alors  $n_0 = 0$  ou  $n_0 = 1$ ). Alors  $E_0 = \text{Vect}(d_{n_0})$  est de dimension 1 et pour tout entier naturel  $n < n_0$ ,  $d_n = 0_E$  donc  $\text{Vect}(d_0, \dots, d_{n_0}) = E_0$ .

- ★ Soit  $k \in \mathbb{N}$ . On suppose construit  $E_0, \dots, E_{k+1}$  des sous-espace vectoriels de  $E$  et  $n_0 < n_1 < \dots < n_k$  des entiers naturels tels que, pour tout  $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$ ,  $\dim(E_i) = i + 1$  et  $\text{Vect}(d_0, \dots, d_{n_i}) = E_i$ . On note :

$$N_{k+1} = \{n \in \mathbb{N} \mid n > n_k \text{ et } d_n \notin E_k\}.$$

Supposons par l'absurde que  $N_{k+1}$  est vide. Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  avec  $n > n_k$ ,  $d_n \in E_k$ . Par suite, comme  $E_k$  est de dimension finie, il est égal à son adhérence et donc :

$$\begin{aligned} E &= \overline{D} \\ &= \overline{\text{Vect}(D)} \\ &= \overline{\text{Vect}((d_n)_{n \in \mathbb{N}})} \\ &= \overline{\text{Vect}((d_i)_{i \in \llbracket 0, n_k \rrbracket})} \\ E &= E_k \end{aligned}$$

Contradiction car  $E$  est de dimension infinie et  $E_k$  ne l'est pas.

Par suite,  $N_{k+1}$  est une partie non vide de  $\mathbb{N}$  et on note  $n_{k+1} = \min N_{k+1}$ .

Ainsi,  $n_{k+1} > n_k$  et  $d_{n_{k+1}} \notin E_k$  donc, en posant  $E_{k+1} = \text{Vect}(E_k \cup \{d_{n_{k+1}}\}) = \text{Vect}(d_0, \dots, d_{n_k}, d_{n_{k+1}})$ , on a  $\dim(E_{k+1}) = k + 2$ . De plus, par définition de  $n_{k+1}$ , pour tout  $i \in \llbracket n_k + 1, n_{k+1} - 1 \rrbracket$ ,  $d_i \in E_k \subset E_{k+1}$  donc  $E_{k+1} = \text{Vect}((d_i)_{i \in \llbracket 0, n_{k+1} \rrbracket})$ .

On a donc bien construit par récurrence la suite annoncée. Comme la suite  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite d'entiers naturels strictement croissante, on a alors :

$$D = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{d_0, \dots, d_{n_k}\} \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k$$

et donc :

$$E = \overline{D} \subset \overline{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k} \subset E$$

d'où  $E = \overline{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k}$ . D'où ii).

- ii)  $\Rightarrow$  iii). On suppose que  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite croissante de sous-espace vectoriel de  $E$  tels que  $E = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n}$  où, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $E_n$  est un espace vectoriel de dimension  $n + 1$ .

On construit par récurrence une suite  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de la façon suivante :

- ★ Comme  $\dim(E_0) = 1$ , il existe  $d_0 \in E_0$  tel que  $(d_0)$  est une base de  $E_0$ .
- ★ Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose construite une base  $(d_0, \dots, d_n)$  de  $E_n$ . Alors, comme  $E_n \subset E_{n+1}$ ,  $(d_0, \dots, d_n)$  est une famille libre de  $E_{n+1}$  et donc, comme  $\dim(E_{n+1}) = n + 2$ , d'après le théorème de la base incomplète, il existe  $d_{n+1} \in E_{n+1}$  tel que  $(d_0, \dots, d_n, d_{n+1})$  est une base  $E_{n+1}$ .

La suite  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ainsi construite est libre et vérifie :

$$\text{Vect}((d_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Vect}((d_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$$

d'où  $\overline{\text{Vect}((d_n)_{n \in \mathbb{N}})} = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n} = E$ .

Par suite,  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite, et donc dénombrable, totale de  $E$  formée de vecteurs linéairement indépendants.

- iii)  $\Rightarrow$  iv) Immédiat.

— iv)  $\Rightarrow$  ii) On suppose qu'il existe une famille  $(d_i)_{i \in I}$  dénombrable et totale de  $E$ . Soit  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une énumération de la famille  $(d_i)_{i \in I}$  (via une bijection de  $\mathbb{N}$  sur  $I$ ). Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $E_n = \text{Vect}(d_0, \dots, d_n)$ . Alors la suite  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite croissante de sous-espace vectoriels de dimension finie de  $E$  et on a :

$$E = \overline{\text{Vect}((d_n)_{n \in \mathbb{N}})} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{\text{Vect}((d_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket})} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \subset E,$$

d'où  $E = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n}$ .

On a donc prouvé i)  $\Leftrightarrow$  ii) ; ii)  $\Rightarrow$  iii) ; iii)  $\Rightarrow$  iv) et iv)  $\Rightarrow$  ii) donc les quatre assertions sont équivalentes. Notons qu'on a bien iv)  $\Rightarrow$  ii) sans les dimensions "échelonnées"  $\Rightarrow$  i)  $\Rightarrow$  ii) avec les dimensions "échelonnées".

15. On a  $\mathbb{K}[X] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{K}_n[X]$  et, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{K}_n[X]$  est de dimension finie (égale à  $n + 1$ ). Ainsi, pour n'importe quelle norme, on a  $\mathbb{K}[X] = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{K}_n[X]}$  donc d'après l'équivalence entre i) et ii) de la question 14,  $\mathbb{K}[X]$  est séparable pour n'importe laquelle de ses normes. *Remarque : on aurait également pu montrer que  $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite totale de  $\mathbb{K}[X]$  peu importe la norme : en effet,  $\mathbb{K}[X] = \text{Vect}((X^n)_{n \in \mathbb{N}})$ .*

16. — Dans l'espace  $C([a, b], \mathbb{R})$  muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$  la famille  $(f_n : t \mapsto t^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est totale. En effet, d'après le théorème de Weierstrass, toute fonction de  $C([a, b], \mathbb{R})$  est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales et donc à valeurs dans  $\text{Vect}((f_n)_{n \in \mathbb{N}})$ .

— Dans l'espace  $\ell^p$  muni de sa norme canonique, la suite  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  où, pour  $n, k \in \mathbb{N}$ ,

$$e_{n,k} = \delta_{n,k} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ 1 & \text{si } k = n \end{cases} \text{ est totale. En effet, on le démontre avec des arguments}$$

proches de ceux de la question 11 : soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p$  et  $\varepsilon > 0$ . Comme  $\sum |u_n|^p$  converge, la suite de ses restes  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0 et donc il existe  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $R_n \leq \varepsilon^p$ . Par suite, en posant  $v = \sum_{n=0}^{N-1} u_n e_n \in \text{Vect}((e_n)_{n \in \mathbb{N}})$ , on a, pour tout entier naturel  $n < N$ ,  $u_n = v_n$  et ainsi :

$$\|u - v\|_p = R_n^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon.$$

Par suite,  $\text{Vect}((e_n)_{n \in \mathbb{N}})$  est dense dans  $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$  i.e.  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite totale de  $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ .

17. La famille  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est bien une suite à valeurs dans  $C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  (bien remarquer que  $n$  est dans  $\mathbb{N}^*$ !). Soit  $f \in C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  et  $\varepsilon > 0$ . On pose, pour  $t \in ]0, 1]$  :

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ f(-\ln(t)) & \text{si } t \in ]0, 1] \end{cases}$$

Alors  $g$  est bien définie sur  $]0, 1]$  car  $\ln(]0, 1]) = ]-\infty, 0]$  et continue sur  $]0, 1]$  comme composée d'applications continues. De plus,  $g(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0 = g(0)$  car  $-\ln(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} +\infty$  et  $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$ .

Par suite,  $g$  est continue sur le segment  $[0, 1]$ . Ainsi, d'après le théorème de Weierstrass, il existe une fonction polynomiale  $p : t \mapsto \sum_{k=0}^n a_k t^k$  telle que  $\|g - p\|_{\infty, [0, 1]} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Alors en particulier, on a  $a_0 = |p(0)| = |p(0) - g(0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ .

On pose  $q = \sum_{k=1}^n a_k f_k$  (Attention à l'indice initial de la somme, c'est bien 1 et pas 0!! - sinon on n'est plus forcément dans  $C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ ). Alors  $q \in \text{Vect}((f_k)_{k \in \mathbb{N}^*})$  et, pour  $x \in \mathbb{R}_+$ , en posant  $t = e^{-x} \in ]0, 1]$ , on a  $x = -\ln(t)$  d'où  $f_k(x) = e^{-kx} = t^k$  pour tout entier  $k$  et ainsi :

$$|f(x) - q(x)| = |g(t) - (p(t) - a_0)| \leq |g(t) - p(t)| + |a_0| \leq \varepsilon.$$

Par suite,  $\text{Vect}((f_k)_{k \in \mathbb{N}^*})$  est dense dans  $C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  i.e.  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  est totale dans  $C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  et donc  $C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  est séparable d'après la question 14.

18. On considère de nouveau la suite  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  où, pour  $n, k \in \mathbb{N}$ ,  $e_{n,k} = \delta_{n,k} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ 1 & \text{si } k = n \end{cases}$  qui est bien une suite à valeurs dans  $\ell^\infty$  car chaque terme est borné par 1. Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$  et  $\varepsilon > 0$ . Comme  $u$  est bornée, il existe un réel  $M > 0$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_n| \leq M$ . Ainsi, la suite  $(\frac{|u_n|}{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0, et donc il existe  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que, pour tout entier naturel  $n \geq N$ ,  $\frac{|u_n|}{2^n} \leq \varepsilon$ . Par suite, en posant  $v = \sum_{n=0}^{N-1} u_n e_n \in \text{Vect}((e_n)_{n \in \mathbb{N}})$ , on a, pour tout entier naturel  $n < N$ ,  $u_n = v_n$  et ainsi :

$$\|u - v\| = \sup_{n \geq N} \frac{|u_n|}{2^n} \leq \varepsilon.$$

Par suite,  $\text{Vect}((e_n)_{n \in \mathbb{N}})$  est dense dans  $(\ell^\infty, \|\cdot\|)$  i.e.  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite totale de  $(\ell^\infty, \|\cdot\|)$ . Il en résulte que  $(\ell^\infty, \|\cdot\|)$  est séparable d'après la question 14.

Ainsi,  $\ell^\infty$  est un exemple d'espace vectoriel normé séparable pour une norme (d'après ce qui précède) et non séparable pour une autre (voire question 12).

## 7. Séparabilité et espace dual.

19. *Exemples d'applications sous-linéaires.* Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé sur  $\mathbb{R}$ .
- (a) L'axiome i) est obtenu par l'homogénéité de la norme en effet, pour  $x \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ,  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| = \lambda \cdot \|x\|$ . L'axiome ii) est obtenu directement avec l'inégalité triangulaire de la norme.
- (b) Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . On note  $p : x \mapsto d(x, F)$ . Soit  $x, y \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ .
- i) Pour tout  $z \in F$ , comme  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , on a  $\lambda z \in F$  et ainsi, par homogénéité de la norme :

$$\lambda d(x, z) = |\lambda| \|x - z\| = \|\lambda(x - z)\| = \|\lambda x - \lambda z\| = d(\lambda x, \lambda z) \geq d(\lambda x, F) = p(\lambda x)$$

Par suite  $\lambda p(x) \geq p(\lambda x)$ .

De plus, si  $\lambda = 0$ , comme  $0_E \in F$ , on a :

$$p(0 \cdot x) = p(0_E) = d(0_E, F) = 0 \leq 0 = 0 \cdot p(x),$$

et si  $\lambda \neq 0$ , pour  $\mu = \frac{1}{\lambda} \in \mathbb{R}_+$  et  $z = \lambda x \in E$ , on a, d'après ce qui précède :

$$\frac{1}{\lambda} p(\lambda x) = \mu p(z) \geq p(\mu z) = p(x).$$

D'où, dans tous les cas,  $p(\lambda x) \geq \lambda p(x)$ .

Il en résulte que  $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ .

- ii) Pour tous  $z, t \in F$ ,  $z + t \in F$  car  $F$  est un sous-espace vectoriel et donc, par inégalité triangulaire :

$$p(x + y) = d(x + y, F) \leq d(x + y, z + t) = \|x + y - (z + t)\| \leq \|x - z\| + \|y - t\|,$$

ainsi, pour tout  $z \in F$ ,  $p(x + y) - \|y - t\| \leq \|x - z\| = d(x, z)$  d'où  $p(x + y) - \|y - t\| \leq d(x, F) = p(x)$ ; et donc, pour tout  $t \in F$ ,  $p(x + y) - p(x) \leq \|y - t\| = d(y, t)$  ce qui donne  $p(x + y) - p(x) \leq d(y, F) = p(y)$ . Par suite,

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y).$$

Il en résulte que  $p : x \mapsto d(x, F)$  est sous-linéaire sur  $E$ .

Montrons la dernière partie de la question. Pour tout  $x \in E$ , comme  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , l'application  $y \mapsto -y$  est une bijection de  $F$  dans lui-même (et même un isomorphisme) et donc :

$$p(-x) = d(-x, F) = \inf_{y \in F} \underbrace{\| -x - y \|}_{= \|x+y\|} = \inf_{y \in F} \|x + (-y)\| = \inf_{z \in F} \|x - z\| = d(x, F) = p(x)$$

Par suite, pour tout  $x \in E$  et tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , si  $\lambda \geq 0$ , par i), on a  $p(\lambda x) = \lambda p(x) = |\lambda|p(x)$  et si  $\lambda < 0$ , on a, d'après i) et ce qui précède,  $p(\lambda x) = p(|\lambda|(-x)) = |\lambda|p(-x) = |\lambda|p(x)$ ; d'où, dans tous les cas :

$$p(\lambda x) = |\lambda|p(x).$$

20. *Exemple d'utilisation du théorème de Hahn-Banach.* Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé sur  $\mathbb{R}$ .

(a) Soit  $f \in F'$ . Comme  $f$  est linéaire continue sur  $F$ , pour tout  $x \in F$ , on a  $f(x) \leq |f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|$ . On définit l'application  $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ , pour  $x \in E$ , par  $p(x) = \|f\| \cdot \|x\|$ . Alors  $p$  est sous-linéaire sur  $E$  car  $p$  est une norme sur  $E$  (question 19a) si  $\|f\| \neq 0$  et si  $\|f\| = 0$ ,  $p = \mathbf{0}$  qui est linéaire donc sous-linéaire sur  $E$ .

On a alors  $f \leq p$  sur  $F$  avec  $p$  sous-linéaire sur  $E$  donc, d'après le théorème de Hahn-Banach, il existe  $g \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$  telle que  $g$  prolonge  $f$  sur  $E$  et  $g \leq p$  sur  $E$ .

Soit  $x \in E$ . On a  $g(x) \leq p(x)$  et comme  $p(-x) = p(x)$  par homogénéité de la norme  $\|\cdot\|$ , on a, par linéarité de  $g$ ,  $-g(x) = g(-x) \leq p(-x) = p(x)$ . Par suite, on a :

$$|g(x)| \leq p(x) = \|f\| \cdot \|x\|,$$

d'où  $g$  est linéaire continue sur  $E$  i.e.  $g \in E'$  et  $\|g\| \leq \|f\|$ .

De plus, on a, comme  $g = f$  sur  $F \subset E$  :

$$\|g\| = \sup_{x \in E \setminus \{0_E\}} \frac{|g(x)|}{\|x\|} \geq \sup_{x \in F \setminus \{0_E\}} \frac{|g(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \in F \setminus \{0_E\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \|f\|,$$

et donc  $\|g\| = \|f\|$ .

(b) On suppose  $\dim(E) > 0$ . Soit  $x_0 \in E \setminus \{0_E\}$ .

On note  $F = \text{Vect}(x_0) = \{\lambda x_0 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ . Pour tout  $x \in F$ , il existe un unique  $\lambda_x \in \mathbb{R}$  tel que  $x = \lambda_x x_0$ ; en effet, si  $\lambda x_0 = x = \mu x_0$ , alors  $(\lambda - \mu)x_0 = 0_E$  donc  $\lambda = \mu$  car  $x_0 \neq 0_E$ .

Ainsi, l'application  $\varphi : F \rightarrow \mathbb{R}$ , pour  $x = \lambda_x x_0 \in F$  avec  $\lambda_x \in \mathbb{R}$ , par  $\varphi(x) = \lambda_x$  est bien définie par unicité du scalaire  $\lambda_x$ .

De plus,  $\varphi$  est linéaire car, pour  $x, y \in F$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ , comme  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ ,  $\alpha x + y \in F$  et donc  $\lambda_{\alpha x + y} x_0 = \alpha x + y = (\alpha \lambda_x + \lambda_y) x_0$ ; d'où par unicité du scalaire  $\lambda_{\alpha x + y}$ ,

$$\varphi(\alpha x + y) = \lambda_{\alpha x + y} = \alpha \lambda_x + \lambda_y = \alpha \varphi(x) + \varphi(y)$$

Reste à vérifier que  $\varphi$  est continue sur  $F$  muni de la norme induite : pour tout  $x \in F \setminus \{0_E\}$ , on a, par homogénéité :

$$\frac{|\varphi(x)|}{\|x\|} = \frac{|\lambda_x|}{|\lambda_x| \cdot \|x_0\|} = \frac{1}{\|x_0\|}.$$

Par suite,  $\varphi \in F'$  et  $\|\varphi\| = \frac{1}{\|x_0\|}$ .

Ainsi, d'après la question précédente (question 20a), il existe  $\psi \in E'$  tel que  $\psi = \varphi$  sur  $F$  et  $\|\psi\| = \|\varphi\| = \frac{1}{\|x_0\|}$ .

On pose  $f = \|x_0\| \cdot \psi$ . Comme  $(E', \|\cdot\|)$  est un espace vectoriel normé, on a alors  $f \in E'$ ,  $\|f\| = \|x_0\| \cdot \|\psi\| = 1$  et, comme  $x_0 \in F$  et  $x_0 = 1 \cdot x_0$  :

$$f(x_0) = \|x_0\| \cdot \psi(x_0) = \|x_0\| \cdot \varphi(x_0) = \|x_0\|.$$

Montrons la dernière partie de la question. Soit  $x \in E$ . Si  $x = 0_E$ , alors pour tout  $f \in E'$ ,  $f(0_E) = 0$  car  $f$  est linéaire.

Pour la réciproque, procédons par contraposée. Supposons que  $x \neq 0_E$ . D'après ce qui précède, il existe  $f \in E'$  tel que  $\|f\| = 1$  et  $f(x) = \|x\| \neq 0$ . D'où la contraposée.

21. *Lemme.* Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé sur  $\mathbb{R}$  et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

(a) Soit  $x_0 \in E$ . Si  $x_0 \in F$  alors l'application  $f = \mathbf{0}$  convient.

Supposons  $x_0 \notin F$ . Alors  $G = \text{Vect}(x_0)$  et  $F$  sont en somme directe et on note  $H = F \oplus G$ .

— On considère l'application  $p : E \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $p : x \mapsto d(x, F)$ . Alors, d'après la question 19b,  $p$  est sous-linéaire sur  $E$ .

Donnons une expression de  $p$  sur  $H$ . Soit  $x = x_F + \lambda x_0 \in H$  avec  $x_F \in F$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Comme  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , l'application  $y \mapsto y - x_F$  est une bijection de  $F$  dans lui-même et donc, en utilisant la deuxième partie de la question 19b :

$$\begin{aligned} p(x) &= d(x_F + \lambda x_0, F) \\ &= \inf_{y \in F} \|x_F + \lambda x_0 - y\| \\ &= \inf_{y \in F} \|\lambda x_0 - (y - x_F)\| \\ &= \inf_{z \in F} \|\lambda x_0 - z\| \\ &= d(\lambda x_0, F) \\ &= p(\lambda x_0) \\ p(x) &= |\lambda| p(x_0) \end{aligned}$$

— On construit, comme dans la question 20b car  $x_0 \neq 0_E$  puisque  $x_0 \notin F$  qui est un sous-espace vectoriel, l'application linéaire  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$  telle que, pour  $x = \lambda x_0 \in G$ ,  $\varphi(x) = \lambda$ .

On pose alors  $h = d(x_0, F) \cdot \varphi \circ \pi$  où  $\pi \in \mathcal{L}(H)$  est la projection sur  $G$  parallèlement à  $F$  ( $h$  est bien définie car  $\text{Im}(\pi) = G$ ). L'application  $h$  est linéaire comme composée d'applications linéaires et donc  $h \in \mathcal{L}(H, \mathbb{R})$ . De plus, on a, pour tout  $x = x_F + \lambda x_0 \in H$  avec  $x_F \in F$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} h(x) &= d(x_0, F) \cdot \varphi(\pi(x_F + \lambda x_0)) \\ &= d(x_0, F) \cdot \varphi(\lambda x_0) \\ &= \lambda d(x_0, F) \\ &= \lambda p(x_0) \\ &\leq |\lambda| p(x_0) \\ h(x) &\leq p(x) \end{aligned}$$

On a donc  $h \in \mathcal{L}(H, \mathbb{R})$  et  $h \leq p$  sur  $H$  avec  $p$  sous-linéaire sur  $E$  donc d'après le théorème de Hahn-Banach, il existe  $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$  telle que  $f = h$  sur  $H$  et  $f \leq p$  sur  $E$ .

— Comme  $x_0 \in G \subset H$ , on a :

$$f(x_0) = h(x_0) = d(x_0, F) \cdot \varphi(\pi(x_0)) = d(x_0, F) \cdot \underbrace{\varphi(x_0)}_{=\varphi(1 \cdot x_0)=1} = d(x_0, F).$$

— On a, pour tout  $x \in F$ , comme  $F \subset H$  :

$$f(x) = h(x) = d(x_0, F) \cdot \varphi(\pi(x)) = d(x_0, F) \cdot \varphi(0_E) = 0,$$

d'où  $F \subset \text{Ker}(f)$ .

— Comme  $p : x \mapsto d(x, F)$  est positive sur  $E$  et  $f \leq p$  sur  $E$ , alors  $|f| \leq p$  sur  $E$ . De plus,  $F$  étant un sous-espace vectoriel de  $E$ , on a  $0_E \in F$  d'où, pour tout  $x \in E$  :

$$|f(x)| \leq p(x) = d(x, F) \leq d(x, 0_E) = \|x\|$$

et donc,  $f$  étant linéaire, on a bien  $f \in E'$ .

(b) ( $\Rightarrow$ ) On suppose  $F$  dense dans  $E$ . Soit  $f \in E'$  tel que  $F \subset \text{Ker}(f)$ . Comme  $f$  est continue sur  $E$  et que  $f = \mathbf{0}$  sur  $F$  alors  $f = \mathbf{0}$  sur  $E$  car  $F$  est dense dans  $E$ .

( $\Leftarrow$ ) On a l'équivalence :  $F$  est dense dans  $E$  si, et seulement si, pour tout  $x \in E$ ,  $d(x, F) = 0$ .

On procède par contraposée en supposant que  $F$  n'est pas dense dans  $E$ . D'après l'équivalence précédente, il existe  $x_0 \in E$  tel que  $d(x_0, F) \neq 0$ . On applique alors le résultat de la question 21a : il existe  $f \in E'$  tel que  $F \subset \text{Ker}(f)$  et  $f(x_0) = d(x_0, F) \neq 0$  d'où  $f \neq \mathbf{0}$ .

Ce qui prouve la contraposée.

On a donc démontré l'équivalence annoncée.

22. *Preuve du résultat.* Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé sur  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $(E', \|\cdot\|)$  est séparable. Alors il existe  $D \subset E'$  dénombrable et dense dans  $E'$ . Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite énumérant les éléments de  $D$ . Pour  $f \in E'$ , on a  $\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$  donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $x_n \in E$  avec  $\|x_n\| = 1$  tel que  $|f_n(x_n)| \geq \frac{1}{2} \|f_n\|$ .

Montrons que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est totale dans  $E$ .

On note  $F = \text{Vect}((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ . Utilisons la caractérisation de la densité de la question 21b. Soit  $f \in E'$  tel que  $F \subset \text{Ker}(f)$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dense dans  $E'$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\|f_n - f\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ . Comme  $x_n \in F$ , on a  $f(x_n) = 0$  et ainsi :

$$\|f_n\| \leq 2|f_n(x_n)| = 2|(f_n - f)(x_n)| \leq 2\|f_n - f\| \cdot \underbrace{\|x_n\|}_{=1} \leq \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Par suite, on a, par inégalité triangulaire :

$$\|f\| \leq \|f - f_n\| + \|f_n\| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout  $\varepsilon > 0$ , on obtient  $\|f\| = 0$  et donc  $f = \mathbf{0}$ .

Par suite, d'après la question 21b,  $F = \text{Vect}((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$  est dense dans  $E$  et donc la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est totale dans  $E$ .

Il en résulte, d'après la question 14, que  $(E, \|\cdot\|)$  est séparable.