Chapitre XV

Calcul différentiel

Table des matières

Dans tout le chapitre, E, F désignent des espaces vectoriels normés de dimension finie, respectivement p et q. De plus, U, V désignent des ouverts de E et F respectivement.

Partie A

Introduction et rappels sur la continuité

Le but de ce chapitre est de généraliser l'étude des fonctions d'un intervalle $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ aux fonctions d'un ouvert de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$. On souhaite donner un sens aux concepts de dérivabilité, tangente, etc... afin de pouvoir déterminer les extrema de telles fonctions ou tracer leurs graphes par exemple.

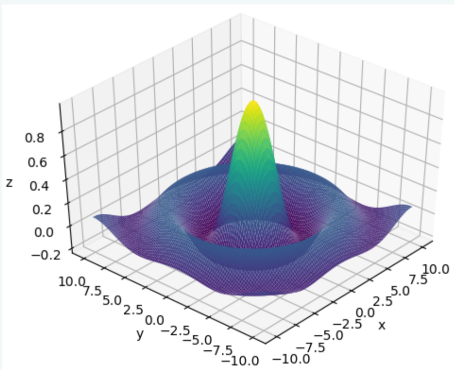
1. Exemple

Exemple 1.

Considérons la fonction $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que :

$$s : (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Son graphe $\mathcal{G} = \{(x, y, s(x, y)) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ est une partie de $\mathbb{R}^3$:



2. Continuité

Définition 1. *Continuité*

Soit $f : U \to F$ une fonction et $a \in U$. On dit que f est continue en a si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in U, \quad \|x - a\|_E \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| \leq \varepsilon.$$

ou de manière équivalente, si, pour $x \in U$:

$$\|f(x) - f(a)\|_F \xrightarrow[\|x-a\|_E \to 0]{} 0.$$

On dit que f est continue sur U si, pour totu $a \in U$, f est continue en a et on note $C(U, F)$ l'espace vectoriel des fonctions de U dans F continues sur U.

Exemple 2.

La fonction

$$s : (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Correction.

La fonction sinc : $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ car composée d'une fonction polynomiale à valeurs positive et de la fonction racine carrée qui sont continues, donc s est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
De plus, sinc est prolongeable par continuité en 0 par $\operatorname{sinc}(0) = 1$ et f est continue en $(0,0)$ avec $f(0,0) = 0$; d'où, quand $(x, y) \to (0,0)$, $s(x, y) \to 1$ et donc s est continue en $(0,0)$.
Par suite, s est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Montrer qu'une fonction est continue en un point.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$. Pour montrer que f est continue en a, il suffit très souvent de :

- calculer $|f(x) - f(a)|$;
- majorer $|f(x) - f(a)|$ par $K\|x - a\|^\alpha$ où $K, \alpha > 0$ et la norme $\|\cdot\|$ sur E est choisie judicieusement en fonction de l'expression de f.
  Remarque : on peut choisir la norme que l'on veut car E est de dimension finie et donc toutes ses normes sont équivalentes.

Exercice 1.

Montrer que les fonctions suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ sont continues en $(0,0)$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad g(x, y) = \begin{cases} (x+y)\sin\left(\frac{1}{x^4+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Correction.

On remarque que, pour $i = 1, 2, \infty$, on a, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|x| \leq \|(x,y)\|_i \text{ et } |y| \leq \|(x,y)\|_i.$$

1. Le dénominateur de la fraction fait penser à la norme 2 sur $\mathbb{R}^2$, utilisons la ! On a, pour

tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, en utilisant la remarque initiale :

$$\begin{aligned}
|f(x,y) - f(0,0)| &= \frac{|x|^3|y|^3}{x^2+y^2} \\
&\leq \frac{\|(x,y)\|_2^3.\|(x,y)\|_2^3}{\|(x,y)\|_2^2} \\
|f(x,y) - f(0,0)| &\leq \|(x,y)\|_2^3 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0
\end{aligned}$$

Donc f est continue en $(0,0)$.

2. Le $x+y$ fait penser à la norme 1 sur $\mathbb{R}^2$, utilisons la ! On a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$\begin{aligned}
|g(x,y) - f(0,0)| &= |x+y|.\left|\sin\left(\frac{1}{x^4+y^2}\right)\right| \\
&\leq (|x|+|y|).1 \\
|f(x,y) - f(0,0)| &\leq \|(x,y)\|_1 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0
\end{aligned}$$

Donc g est continue en $(0,0)$.

Montrer qu'une fonction est n'est pas continue en un point.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$. Pour montrer que f est n'est pas continue en a (étant donnée une valeur pour $f(a)$), il suffit de déterminer une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E tels que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ et

$$f(u_n) \nrightarrow f(a).$$

Exercice 2.

Montrer que les fonctions suivantes ne sont pas continues en 0_E :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad g(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xy+yz}{x^2+2y^2+2z^2} & \text{si } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Correction.

1. On prend, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$. Alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} (0,0)$ et on a :

$$f(u_n) = \frac{\frac{1}{n}.\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0).$$

Ainsi, d'après la caractérisation séquentielle de la continuité, f n'est pas continue en $(0,0)$.

2. On prend, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$. Alors $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} (0,0,0)$ et on a :

$$g(u_n) = \frac{\frac{1}{n}.\frac{1}{n} + 0}{\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + 0} = \frac{1}{3} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{3} \neq 0 = g(0,0,0).$$

Ainsi, d'après la caractérisation séquentielle de la continuité, g n'est pas continue en $(0,0,0)$.

Remarque 1.

Pour montrer qu'une fonction de U dans $\mathbb{R}$ n'est pas prolongeable par continuité en a, il suffit donc de trouver deux suites (u_n) et (v_n) qui convergent vers a et telle que $f(u_n)$ et $f(v_n)$ ne convergent pas vers une même limite (ou que l'une des deux ne converge pas du tout !)

Exercice 3.

Déterminer le domaine de définition de la fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ et montrer qu'elle n'est pas prolongeable par continuité en $(0,0)$.

Correction.

On prend, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ et $v_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$. Alors $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} (0,0)$, $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} (0,0)$ et on a :

$$f(u_n) = \frac{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = 0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

et

$$f(v_n) = \frac{\frac{1}{n^2} - 0}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{2}.$$

d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) \neq \lim\limits_{n \to +\infty} f(v_n)$.

Ainsi, d'après la caractérisation séquentielle de la continuité, f n'est pas prolongeable par continuité en $(0,0)$.

Partie B

Rappels sur les dérivées partielles

1. Dérivée suivant un vecteur

Définition 2.

Soit $f : U \to F$ une fonction, $a \in U$ et $u \in E$.
On dit que f est **dérivable en a suivant u** si la fonction $t \mapsto f(a+tu)$, définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, est dérivable en 0 i.e. si $t \mapsto \dfrac{1}{t}\left(f(a+tu) - f(a)\right)$ admet une limite en 0. Dans ce cas, on note :

$$D_u f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(f(a+tu) - f(a)\right),$$

et $D_u f(a)$ est appelée la **dérivée de f en a selon u**.

Remarque 2.

Cette définition a bien du sens : comme $a \in U$, il existe un réel $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset U$. Ainsi, si $u = 0_E$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $a + tu \in U$; et si $u \neq 0_E$, pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $t \in]-\frac{r}{\|u\|}, \frac{r}{\|u\|}[$, $\|(a+tu) - a\| = |t|\|u\| < r$, donc, $a + tu \in B(a,r) \subset U$.
Ainsi la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}\left(f(a+tu) - f(a)\right)$ est bien définie sur un voisinage de 0 privé de 0 dans $\mathbb{R}$.

Définition-Proposition 3. *Développement à l'ordre 1*

Soit $f : U \to F$ une fonction, $a \in U$ et $u \in E$.
La fonction f est dérivable en a suivant u si, et seulement si, il existe $\ell \in E$ tel que :

$$f(a+tu) = f(a) + t.\ell + \underset{t \to 0}{o}(t).$$

Et dans ce cas, on a $\ell = D_u f(a)$ et l'égalité :

$$f(a+tu) = f(a) + t.D_u f(a) + \underset{t \to 0}{o}(t)$$

est appelé **développement de f en a suivant le vecteur u à l'ordre** 1.

Démonstration.

La fonction f est dérivable en a suivant u si, et seulement si, la fonction $\varphi : t \mapsto f(a+tu)$ est dérivable en 0 si, et seulement si, celle-ci possède un développement à l'ordre 1 (en tant que fonction de la variable réelle) i.e. il existe $\ell \in E$ tel que $\varphi(t) = \varphi(0) + t.\ell + \underset{t \to 0}{o}(t)$ avec, dans ce cas, $\ell = \varphi'(0)$.

D'où le résultat car $\varphi(0) = f(a)$ et $\varphi'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\varphi(t) - \varphi(0)\right) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(f(a+tu) - f(a)\right)$. $\square$

Exemple 3.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f : (x, y) \mapsto x^2 + 5xy^3$. Alors

$$D_{(1,1)}f(x_0, y_0) = 2x_0 + 5y_0^3 + 15x_0y_0^2.$$

On a, pour $t \in \mathbb{R}^*$, en posant $a = (x_0, y_0)$ et $u = (1, 1)$:

$$\begin{array}{rcl} f(a+tu) - f(a) & = & (x_0+t)^2 + 5(x_0+t)(y_0+t)^3 - (x_0^2 + 5x_0y_0^3) \\ & = & x_0^2 + 2x_0t + x_0^2 + 5(x_0+t)(y_0^3 + 3y_0^2t + 3y_0t^2 + t^3) - (x_0^2 + 5x_0y_0^3) \\ & = & t(2x_0 + 5y_0^3 + 15x_0y_0^2) + t^2(3x_0y_0 + x_0t + 3y_0^2 + 3y_0^2t + t^2) \end{array}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{t}\left(f(a+tu) - f(a)\right) = (2x_0+5y_0^3+15x_0y_0^2)+t(3x_0y_0+x_0t+3y_0^2+3y_0^2t+t^2) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 2x_0+5y_0^3+15x_0y_0^2.$$

Par suite, f est dérivable en (x_0, y_0) selon le vecteur $(1, 1)$ et on a :

$$D_{(1,1)}f(x_0, y_0) = 2x_0 + 5y_0^3 + 15x_0y_0^2.$$

Exercice 4.

Soit $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ tel que $f(M) = M^2$ et $A, U \in M_n(\mathbb{R})$.
Déterminer la dérivée de f en A suivant U.

Correction.

Soit $A, U \in M_n(\mathbb{R})$. Pour $t \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\begin{array}{rcl} f(A+tU) - f(A) & = & (A+tU)^2 - A^2 \\ & = & A^2 + tAU + tUA + t^2U^2 - A^2 \\ f(A+tU) - f(A) & = & t(AU+UA) + t^2U \end{array}$$

d'où :

$$\frac{1}{t}\left(f(A+tU) - f(A)\right) = AU + UA + tU \underset{t\to 0}{\longrightarrow} AU + UA$$

donc f est dérivable en A suivant U et on a :

$$D_Uf(A) = AU + UA.$$

Proposition 1.

Soit $f : U \to F$, $L \in \mathcal{L}(F,G)$, $a \in U$ et $u \in E$.
Si f est dérivable en a suivant u, alors $L \circ f$ est dérivable en a suivant u et on a :

$$D_u(L \circ f)(a) = L(D_u f(a)).$$

Démonstration.

On suppose f est dérivable en a suivant u.
On applique la proposition du chapitre XI "Fonctions vectorielles de la variable réelle" ; affirmant que, pour $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to F$ dérivable en $t_0 \in I$ et $L \in \mathcal{L}(F,G)$, $L \circ \varphi$ est dérivable en t_0 et $(L \circ \varphi)'(x_0) = L(f'(x_0))$; à la fonction $\varphi : t \mapsto f(a+tu)$ définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ car U est un ouvert et dérivable en 0 car f est dérivable en a suivant u, de dérivée $\varphi'(0) = D_u f(a)$.
Ainsi $L \circ \varphi : t \mapsto L \circ f(a+tu)$ est dérivable en 0, d'où $L \circ f$ est dérivable en a suivant u et on a :

$$D_u(L \circ f)(a) = (L \circ \varphi)'(0) = L(\varphi'(0)) = L(D_u f(a)).$$

□

2. Dérivées partielles

Définition 4. *Dérivée partielle en un point*

Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E, $f : U \to F$ et $a \in U$.
Pour $j \in [\![1,p]\!]$, on dit que f admet une **j-ème dérivée partielle en a dans la base $\mathcal{B}$** si f admet une dérivée en a suivant e_j. Dans ce cas, on note :

$$\partial_j f(a) = D_{e_j} f(a) \text{ ou encore } \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = D_{e_j} f(a).$$

Définition 5. *Application dérivée partielle*

Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E et $f : U \to F$.
Si f admet une dérivée partielle en tout point x de U dans la base $\mathcal{B}$, alors on appelle **j-ème dérivée partielle de f dans la base $\mathcal{B}$** l'application $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ de U dans F telle que :

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} : x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x).$$

Remarque 3.

Pour $E = \mathbb{R}^3$ par exemple, et $f : (x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$ on notera

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}$$

les dérivées partielles suivant les vecteurs de la base canonique.

Exemple 4.

Pour $f:(x,y,z)\mapsto (x^2y, 2z^3+ye^{2x})$ admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ et on a :

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y,z)=(2xy,2ye^{2x}),\ \frac{\partial}{\partial y}f(x,y,z)=(x^2,e^{2x}),\ \frac{\partial}{\partial z}f(x,y,z)=(0,3z^2)$$

Exercice 5.

Calculer les dérivées partielles de $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$ suivant les vecteurs de la base canonique où :

$$f(x,y,z,t)=\frac{xy+z}{1+t^2}$$

Correction.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}f(x,y,z,t)&=\frac{y}{1+t^2}; & \frac{\partial}{\partial y}f(x,y,z,t)&=\frac{x}{1+t^2};\\
\frac{\partial}{\partial z}f(x,y,z,t)&=\frac{1}{1+t^2}; & \frac{\partial}{\partial t}f(x,y,z,t)&=-\frac{2t(xy+z)}{(1+t^2)^2}.
\end{aligned}$$

Exercice 6.

On considère la fonction $f:(x,y)\mapsto\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$

Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$ mais qu'elle admet des dérivées partielles en $(0,0)$ suivant la base canonique.

Correction.

Tout d'abord f n'est pas continue en $(0,0)$: en effet, on a :

$$f(1/n,1/n)=\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n2}}=\frac{1}{2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{1}{2}\neq 0=f(0,0)$$

et $(1/n,1/n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}(0,0)$.

Ainsi, f n'est pas continue en $(0,0)$ (on peut montrer également qu'elle n'est pas prolongeable par continuité : on aurait pu prendre n'importe quelle valeur pour $f(0,0)$, f n'aurait pas été continue en $(0,0)$).

Malgré cela, on va montrer que f possède des dérivées partielles dans la base canonique (e_1,e_2) de $\mathbb{R}^2$.

On a,
$$\frac{1}{t}(f((0,0)+te_1)-f(0,0))=\frac{1}{t}(f(1,0)-f(0,0))=0\xrightarrow[t\to 0]{}0$$
Donc, par définition, f admet une dérivée partielle en $(0,0)$ suivant e_1 et on a :
$$\frac{\partial}{\partial x}f(0,0)=D_{e_1}f(0,0)=0.$$
Par un calcul similaire, on trouve que f admet une dérivée partielle en $(0,0)$ suivant e_2 et que :
$$\frac{\partial}{\partial y}f(0,0)=D_{e_2}f(0,0)=0.$$
Ainsi, f admet des dérivées partielles en $(0,0)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$... alors qu'elle n'est pas continue en $(0,0)$...

Remarque 4.

Attention ! Contrairement au cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, une fonction peut admettre des dérivées partielles égales en un point mais ne pas être continue en ce point ! (voire la fonction précédente)

Proposition 2.

Soit $\mathcal{B}=(e_1,...,e_p)$ une base de E, $f:U\to F$, $L\in\mathcal{L}(F,G)$, $j\in[\![1,p]\!]$ et $a\in U$.
Si f admet une j-ème dérivée partielle en a dans la base $\mathcal{B}$, alors $L\circ f$ également et on a :
$$\frac{\partial(L\circ f)}{\partial x_j}(a)=L\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\right).$$

Démonstration.

On applique la proposition 1 à $u=e_j$. □

3. Matrice jacobienne

Rappel :
Étant donné une fonction $f:U\to F$ et $\mathcal{C}=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_q)$ une base de F, on a la décomposition, pour chaque $x\in U$,
$$f(x)=\sum_{i=1}^{q}f_i(x)\varepsilon_i$$
où les fonctions $f_i:U\to\mathbb{R}$ sont les **applications composantes** de f dans la base $\mathcal{C}$.

Exemple : Soit $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ telle que :
$$f(x,y,z)=(x+y^2,2xyz).$$

Dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, les applications composantes de f sont :

$$f_1(x,y,z) = x + y^2 \text{ et } f_2(x,y,z) = 2xyz.$$

Définition 6. *Matrice jacobienne*

Soit $f : U \to F$ une fonction, $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ des bases de E, F respectivement et $a \in U$. On suppose que f admet des dérivées partielles en a dans la base $\mathcal{B}$.

On appelle **matrice jacobienne de f en a dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$** la matrice notée $J_f(a) \in M_{q,p}(\mathbb{R})$ telle que :

$$J_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\leq i\leq q\\ 1\leq j\leq p}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix}.$$

Exemple 5.

Application de passage des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes

L'application $\varphi : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie, pour $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, par :

$$\varphi(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta)),$$

admet pour matrice jacobienne en (r,θ) dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$:

$$J_\varphi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Exercice 7.

Calculer la matrice jacobienne dans les bases canoniques :

1. $f : (x,y) \mapsto (x+y, x^2y)$ en (x,y) puis en $(0,0)$;
2. $g : (x,y,z) \mapsto \left(\dfrac{\cos(xy)}{1+z^2}, z^3e^{xy}\right)$ en (x,y,z) puis en $(-1,\pi,0)$;
3. $h : (x,y,z,t) \mapsto (xy, yz, zt, tx)$ en (x,y,z,t) puis en $(1,1,1,1)$.

Correction.

1. On a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, en posant $f_1(x,y) = x+y$ et $f_2(x,y) = x^2y$:

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2xy & x^2 \end{pmatrix} \text{ donc } J_f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. On a, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, en posant $g_1(x,y,z) = \frac{\cos(xy)}{1+z^2}$ et $g_2(x,y,z) = z^3 e^{xy}$:

$$\begin{aligned} J_g(x,y,z) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{y\sin(xy)}{1+z^2} & -\frac{x\sin(xy)}{1+z^2} & -\frac{2z\cos(xy)}{(1+z^2)^2} \\ yz^3e^{xy} & xz^3e^{xy} & 3z^2e^{xy} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc

$$J_g(-1,\pi,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. On a, pour tout $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, en posant $h_1(x,y,z,t) = xy$, $h_2(x,y,z,t) = yz$, $h_3(x,y,z,t) = zt$ et $h_4(x,y,z,t) = tx$:

$$J_h(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_1}{\partial y} & \frac{\partial h_1}{\partial z} & \frac{\partial h_1}{\partial t} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} & \frac{\partial h_2}{\partial z} & \frac{\partial h_2}{\partial t} \\ \frac{\partial h_3}{\partial x} & \frac{\partial h_3}{\partial y} & \frac{\partial h_3}{\partial z} & \frac{\partial h_3}{\partial t} \\ \frac{\partial h_4}{\partial x} & \frac{\partial h_4}{\partial y} & \frac{\partial h_4}{\partial z} & \frac{\partial h_4}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x & 0 & 0 \\ 0 & z & y & 0 \\ 0 & 0 & t & z \\ t & 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

donc

$$J_h(1,1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 8.

Donner la matrice jacobienne de l'application S de passage des coordonnées sphériques vers les coordonnées cartésiennes dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ au point (r,θ,φ)

Correction.

L'application S de passage des coordonnées sphériques vers les coordonnées cartésiennes dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est l'application $S : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie, pour $(r,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, par :

$$S(r,\theta,\phi) = (r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\sin(\varphi), r\cos(\theta)).$$

Sa matrice jacobienne en (r,θ,φ) dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donc :

$$\begin{aligned} J_S(r,\theta,\varphi) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial r}(r,\theta,\varphi) & \frac{\partial S_1}{\partial \theta}(r,\theta,\varphi) & \frac{\partial S_1}{\partial \varphi}(r,\theta,\varphi) \\ \frac{\partial S_2}{\partial r}(r,\theta,\varphi) & \frac{\partial S_2}{\partial \theta}(r,\theta,\varphi) & \frac{\partial S_2}{\partial \varphi}(r,\theta,\varphi) \\ \frac{\partial S_3}{\partial r}(r,\theta,\varphi) & \frac{\partial S_3}{\partial \theta}(r,\theta,\varphi) & \frac{\partial S_3}{\partial \varphi}(r,\theta,\varphi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) & r\cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) & r\cos(\theta)\sin(\varphi) & r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Partie C

Différentiabilité

1. Différentielle d'une application

a. Définitions et premières propriétés

Définition 7. *Différentiabilité locale*

Soit $f : U \to F$ et $a \in U$.
On dit que f est **différentiable en** a, s'il existe $\ell \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que :

$$f(a+h) = f(a) + \ell(h) + o(\|h\|) \text{ quand } h \to 0_E.$$

Dans ce cas, on dira également que f **admet un développement limité à l'ordre** 1 **en** a.

Proposition 3.

Soit $f : U \to F$ et $a \in U$. Si f est différentiable en a, alors f est continue en a.

Démonstration.

On suppose f différentiable en a. Alors f admet un développement limité à l'ordre 1 en a *i.e.* il existe $\ell \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que :

$$f(a+h) = f(a) + \ell(h) + \underset{h \to 0_E}{o}(\|h\|).$$

Comme E est de dimension finie, ℓ est une apllication linéaire continue sur E et donc en 0_E, d'où $\ell(h) \xrightarrow[h \to 0_E]{} \ell(0_E) = 0_F$.
Par suite, pour tout x dans un voisinage de a dans U, on a, par inégalité triangulaire :

$$\|f(x) - f(a)\|_F = \|f(a+h) - f(a)\|_F \leq \|\ell(h)\| + \underset{h \to 0_E}{o}(\|h\|) \xrightarrow[h \to 0_E]{} 0$$

d'où $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$ et donc f est continue en a. $\square$

Lemme 1.

Soit $f : U \to F$ et $a \in U$. Si f est différentiable en a, alors il existe une **unique** application $\ell \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que :

$$f(a+h) = f(a) + \ell(h) + o(\|h\|) \text{ quand } h \to 0_E.$$

Démonstration.

On suppose f différentiable en a. Soit $\ell, \ell' \in \mathcal{L}(E, F)$ tels que :

$$f(a+h) = f(a) + \ell(h) + o(\|h\|) \text{ et } f(a+h) = f(a) + \ell'(h) + o(\|h\|)$$

Montrons que $\ell = \ell'$ *i.e.* pour tout $x \in E$, $\ell(x) = \ell'(x)$.
Soit $x \in E$. Pour $t \in \mathbb{R}^*$, on a $h = tx \to 0_E$ quand $t \to 0$ et $\|h\| = \|tx\| = |t|.\|x\|$. Par suite, on a :

$$f(a+tx) = f(a) + \ell(tx) + \underset{t\to 0}{o}(t) \text{ et } f(a+tx) = f(a) + \ell'(tx) + \underset{t\to 0}{o}(t).$$

Ainsi, par linéarité de ℓ et ℓ' puis en effectuant la différence de ces deux égalités, on obtient :

$$t(\ell(x) - \ell'(x)) = \ell(tx) - \ell'(tx) = \underset{t\to 0}{o}(t)$$

et donc :

$$\ell(x) - \ell'(x) = \underset{t\to 0}{o}(1) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

d'où $\ell(x) = \ell'(x)$.
Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, il en résulte que $\ell = \ell'$; ce qui prouve l'unicité. □

Le lemme précédent justifie la définition suivante :

Définition 8. *Différentielle en un point*

Soit $f : U \to F$ et $a \in U$. Si f est différentiable en a, on appelle **différentielle de f en** a et on note $\mathrm{d}f(a)$ ou encore $\mathrm{d}f_a$ l'unique application linéaire telle que :

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a)(h) + o(\|h\|) \text{ quand } h \to 0_E.$$

Lemme 2.

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to F$. On a : $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, F)$ si, et seulement si, il existe un unique $u \in F$ tel que $\varphi : x \mapsto xu$.

Démonstration.

- $\Leftarrow$ S'il existe un unique $u \in F$ tel que $\varphi : x \mapsto xu$ alors, pour tous $\lambda, \mu, x, y \in \mathbb{R}$, on a $\varphi(\lambda x + \mu y) = (\lambda x + \mu y)u = \lambda(xu) + \mu(yu) = \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y)$ donc $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, F)$.
- $\Rightarrow$ On suppose $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, F)$. On pose $u = \varphi(1) \in F$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a, par linéarité de φ,

  $$\varphi(x) = \varphi(x.1) = x\varphi(1) = xu;$$

  d'où $\varphi : x \mapsto xu$. Par construction, $u = \varphi(1)$ est unique.

□

Proposition 4. *Lien dérivabilité / différentiabilité*

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \to F$ et $a \in I$.
La fonction f est dérivable en a si, et seulement si, elle est diférentiable en a. Dans ce cas, on a, pour tout $h \in \mathbb{R}$:
$$\mathrm{d}f_a(h) = f'(a).h$$

Démonstration.

On a :

$$\begin{gathered} f \text{ est dérivable en } a \\ \text{si, et seulement si,} \\ h \mapsto \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \text{ admet une limite } \ell \in F \text{ quand } h \to 0 \\ \text{si, et seulement si,} \\ \text{il existe } \ell \in F \text{ tel que } \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ell + \underset{h\to 0}{o}(1) \\ \text{si, et seulement si,} \\ \text{il existe } \ell \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(a+h) = f(a) + h.\ell + \underset{h\to 0}{o}(h) \\ \text{si, et seulement si, (en vertu du lemme précédent)} \\ \text{il existe } L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, F) \text{ tel que } f(a+h) = f(a) + L(h) + \underset{h\to 0}{o}(|h|) \\ \text{si, et seulement si,} \\ f \text{ est différentiable en } a. \end{gathered}$$

Dans ce cas, on a donc :
$$\mathrm{d}f(a) : h \mapsto L(h) = h.\ell = h.f'(a)$$

□

Définition 9. *Différentiabilité globale*

Soit $f : U \to F$. On dit que f est **différentiable sur** U si f est différentiable en a pour tout $a \in U$. Dans ce cas, appelle **différentielle de** f **sur** U et on note $\mathrm{d}f$ l'application de U dans $\mathcal{L}(E, F)$ telle que :
$$\mathrm{d}f : x \mapsto \mathrm{d}f(x).$$

b. Exemples

Exemple 6.

Une fonction $f : U \to F$ constante en $c \in F$ est différentiable sur U et on a
$$\mathrm{d}f = \mathbf{0}.$$

On a, pour tout $a \in U$ et tout $h \in E$ tel que $a+h \in U$:

$$f(a+h) - f(a) = c - c = 0_F = \mathbf{0}(h) + \underbrace{0_F}_{=o(\|h\|_F)}.$$

Par suite, f est différentiable en a pour tout $a \in A$ et donc sur U et on a, pour tout $a \in A$, $\mathrm{d}f_a = \mathbf{0} : E \to F$. Ainsi, $\mathrm{d}f = \mathbf{0} : E \to \mathcal{L}(E,F)$.

Proposition 5.

Soit $L : E \to F$. Si $L \in \mathcal{L}(E,F)$, alors L est différentiable sur E et, pour tout $a \in E$, $\mathrm{d}L(a) = f$.

Démonstration.

Soit $L \in \mathcal{L}(E,F)$. On a, pour tous $a, h \in E$:

$$L(a+h) - L(a) = L(a+h-a) = L(h) + \underbrace{0_F}_{=o(\|h\|_F)}.$$

Par suite, L est différentiable en a pour tout $a \in A$ et donc sur E ; et on a :

$$\mathrm{d}L_a = L.$$

□

Corollaire 1.

Soit $L \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E. On a, pour tout $a \in E$ et tout $j \in [\![1,p]\!]$:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(a) = L(e_j).$$

Démonstration.

Soit $a \in E$ et $j \in [\![1,p]\!]$. Comme L est linéaire sur E, elle est différentiable en a et $\mathrm{d}L_a = L$ (d'après la proposition 5), donc on a :

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(a) = \mathrm{d}L_a(e_j) = L(e_j).$$

□

Définition 10. *Applications coordonnées dans une base*

Soit $\mathcal{B} = (e_1, ...e_p)$ une base de E. Pour $i \in [\![1,p]\!]$, on appelle **i-ème application coordonnée**

dans la base $\mathcal{B}$ et on note $\mathrm{d}x_i$ la forme linéaire de E dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\mathrm{d}x_i : x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j \mapsto x_i$$

Exemple 7.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, ...e_p)$ une base de E. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la i-ème application coordonnée $\mathrm{d}x_i$ est différentiable sur E et et on a, pour tout $a \in E$, $\mathrm{d}(\mathrm{d}x_i)_a = \mathrm{d}x_i$.

> En effet, les applications coordonnées étant des formes linéaires, d'après la proposition précédente, elles sont différentiables sur E et leurs différentielles en chaque point sont égales à elles-mêmes.

Proposition 6. *Différentielle d'une application bilinéaire*

Soit $B : E_1 \times E_2 \to F$ une application bilinéaire. Alors B est différentiable sur $E_1 \times E_2$ et on a, pour tout $(x, y) \in E_1 \times E_2$:

$$dB(x, y) : (h, k) \mapsto B(x, k) + B(h, y).$$

Démonstration.

Soit $(x, y) \in E_1 \times E_2$. On a, pour tout $(h, k) \in E_1 \times E_2$:

$$B(x + h, y + k) - B(x, y) = B(x, k) + B(h, y) + B(h, k).$$

Par linéarité des applications $B(x, \cdot)$ et $B(\cdot, y)$, l'application $\ell : E_1 \times E_2 \to F$ telle que :

$$\ell : (h, k) \mapsto B(x, k) + B(h, y)$$

est linéaire.
De plus, $E_1 \times E_2$ étant de dimension finie, l'application bilinéaire B est continue sur $E_1 \times E_2$. Ainsi, il existe $M \geq 0$ tel que, pour tout $(h, k) \in E_1 \times E_2$:

$$\|B(h, k)\|_F \leq M\|h\|_{E_1}\|k\|_{E_2}$$

En considérant sur $E_1 \times E_2$ la norme produit $\|(h, k)\|_\infty = \max(\|h\|_{E_1}, \|k\|_{E_2})$ on obtient :

$$\|B(h, k)\|_F \leq M\|h\|_{E_1}\|k\|_{E_2} \leq M\|(h, k)\|_\infty^2 = o\left(\|(h, k)\|_\infty\right)$$

Ainsi, on a, pour tout $(h, k) \in E_1 \times E_2$:

$$B(x + h, y + k) - B(x, y) = \ell(h, k) + o\left(\|(h, k)\|\right),$$

où ℓ est une application linéaire.
Il en résulte que B est différentiable sur $E_1 \times E_2$ et pour tout $(x, y) \in E_1 \times E_2$:

$$dB(x, y) = \ell : (h, k) \mapsto B(x, k) + B(h, y).$$

□

Plus généralement, on le résultat suivant :

Proposition 7. *Différentielle d'une application multilinéaire*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E_1, ..., E_n$ des espaces vectoriels normés de dimension finie et $M : E_1 \times \ldots \times E_n \to F$ une application multilinéaire. Alors M est différentiable sur $E_1 \times \ldots \times E_n$ et on a, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$:

$$dM(x_1, \ldots, x_n) : (h_1, \ldots, h_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} M(x_1, \ldots, x_{i-1}, h_i, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Démonstration.

On pose $E = E_1 \times \ldots \times E_n$ que l'on munit de la norme produit $\|\cdot\| : (x_1, ..., x_n) \mapsto \max_{1 \le i \le n}(\|x_i\|_{E_i})$. Dans la suite, on notera $\mathcal{P} = \mathcal{P}([\![1, n]\!])$ l'ensemble des parties de $[\![1, n]\!]$.
Pour $x = (x_1, ..., x_n), h = (h_1, ..., h_n) \in E$, on note, pour $A \in \mathcal{P}$, l'élément $y_A(x, h) = y_A = (y_{A,1}, ..., y_{A,n})$ de E vérifiant, pour $i \in [\![1, n]\!]$:

$$y_{A,i} = \begin{cases} h_i & \text{si } i \in A \\ x_i & \text{si } i \notin A \end{cases}$$

Par exemple, on a $y_\emptyset = x$, $y_{[\![1,n]\!]} = h$ ou encore $y_{\{1\}} = (h_1, x_2, ..., x_n)$.
Soit $x = (x_1, .., x_n) \in E$. Pour tout $h = (h_1, ..., h_n) \in E$, on a, par multilinéarité de M :

$$\begin{aligned} M(x+h) &= \sum_{A \in \mathcal{P}} M(y_A) \\ &= M(y_\emptyset) + \sum_{\substack{A \in \mathcal{P} \\ \#A = 1}} M(y_A) + \sum_{\substack{A \in \mathcal{P} \\ \#A \ge 2}} M(y_A) \\ &= M(x) + \sum_{i=1}^{n} M(y_{\{i\}}) + \sum_{\substack{A \in \mathcal{P} \\ \#A \ge 2}} M(y_A) \end{aligned}$$

où, pour $i \in [\![1, n]\!]$, $M(y_{\{i\}}) = M(x_1, \ldots, x_{i-1}, h_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.
Comme M est multilinéaire, $h \mapsto M(x_1, \ldots, x_{i-1}, h_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ est linéaire pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Par suite, l'application $\ell : E \to F$ telle que :

$$\ell : h = (h_1, ..., h_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} M(x_1, \ldots, x_{i-1}, h_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

est linéaire comme combinaison linéaire d'applications linéaires.
De plus, $E_1, ..., E_n$ étant de dimension finie, l'application multilinéaire M est continue sur E. Ainsi, il existe $C \ge 0$ tel que, pour tout $k = (k_1, ..., k_n) \in E$:

$$\|M(k)\|_F \le C \|k_1\|_{E_1} ... \|k_n\|_{E_n}$$

Alors, pour tout $A \in \mathcal{P}$ avec $a = \#A$, on a :

$$\|M(y_A)\|_F \le C \|y_{A,1}\|_{E_1} ... \|y_{A,n}\|_{E_n} \le C \|x\|^{n-a}.\|h\|^a,$$

d'où, si $a \geq 2$:
$$\frac{\|M(y_A)\|_F}{\|h\|} \leq C\|x\|^{n-a}\|h\|^{a-1} \xrightarrow[\|h\|\to 0]{} 0.$$
Ainsi, par somme finie de petit o, on obtient :
$$\sum_{\substack{A\in\mathcal{P}\\ \#A\geq 2}} M(y_A) = \underset{\|h\|\to 0}{o}(\|h\|).$$
Par suite, on a, pour tout $h \in E$:
$$M(x+h) = \ell(h) + o\left(\|h\|\right),$$
où ℓ est une application linéaire.
Il en résulte que M est différentiable sur E et, pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in E$:
$$dM(x) = \ell : h = (h_1, ..., h_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} M(x_1, \ldots, x_{i-1}, h_i, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$
□

Exemple 8.

Soit $\mathcal{B}$ une base de E. L'application $\det_{\mathcal{B}} : E^p \to \mathbb{R}$ est différentiable sur E^p.

L'application $\det_{\mathcal{B}}$ est n-linéaire sur E donc d'après la proposition précédente, elle est différentiable sur E^p.

c. Exercices

Méthode : calculer une différentielle.
Pour montrer qu'une fonction $f : U \to F$ est différentiable en $a \in U$ et calculer $\mathrm{d}f(a)$ avec la définition :

- on calcule $f(a+h) - f(a)$;
- on "récupère" de ce calcul une partie $\ell(h)$ qui dépend linéairement de h ;
- on montre que $f(a+h) - f(a) - \ell(h) = o(\|h\|)$.

Exercice 9.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ telle que $f : M \mapsto M^2$. Montrer que f est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$ et calculer sa différentielle en tout point de $M_n(\mathbb{R})$.

Correction.

Soit $A, H\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{array}{rcl} f(A+H)-f(A) & = & (A+H)^2 - A^2 \\ & = & A^2 + AH + HA + H^2 - A^2 \\ & = & AH + HA + H^2 \end{array}$$

Or, par propriétés du produit matriciel, $\ell : H \mapsto AH + HA$ est linéaire et, en considérant une norme $\|\cdot\|$ sous-multiplicative sur $M_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\frac{\|H^2\|}{\|H\|} \leq \frac{\|H\|^2}{\|H\|} = \|H\| \xrightarrow[H\to 0_n]{} 0$$

d'où $\|H^2\| = \underset{H\to 0_n}{o}(\|H\|)$. Par suite, f est différentiable en A avec $\mathrm{d}f_A = \ell : H \mapsto AH + HA$.
Ceci étant vrai pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, f est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 10.

On suppose que E est un espace euclidien. Soit $f : x \mapsto \|x\|^2$. Montrer que f est différentiable sur E et déterminer sa différentielle en tout point de E.

Correction.

On a, pour tous $a, h \in E$,

$$f(a+h) - f(a) = (a+h|a+h) - (a|a) = 2(a|h) + \|h\|^2$$

On pose $\ell : h \mapsto 2(a|h)$. Alors ℓ est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ par linéarité du produit scalaire par rapport à la deuxième variable et :

$$\frac{\|h\|^2}{\|h\|} = \|h\| \xrightarrow[h\to 0_E]{} 0$$

et d'où $f(a+h) = f(a) + 2(a|h) + o(\|h\|)$ et donc f admet un développement limité à l'ordre 1 en a.
Il en résulte que, pour tout $a \in E$, f est différentiable en a et on a $\mathrm{d}f(a) = \ell : h \mapsto 2(a|h)$.
Ainsi, f est différentiable sur E et $\mathrm{d}f : a \mapsto \mathrm{d}f(a) : h \mapsto 2(a|h)$.

Exercice 11.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et Montrer que l'application $\exp : M \mapsto \exp(M)$ est différentiable en $A = \lambda I_n$ et calculer sa différentielle.

Remarque : en fait, on peut montrer que $\exp$ *est différentiable sur* $M_n(\mathbb{R})$ *- mais comme en général,* A *et* H *ne commutent pas, ce n'est pas aussi simple que dans le cas précédent.*

Démonstration.

On considère une norme $\|\cdot\|$ sous-multiplicative sur $M_n(\mathbb{R})$. Soit $H \in M_n(\mathbb{R})$. Comme $A = \lambda I_n$, A et H commutent, $\exp(A+H) = \exp(A)\exp(H)$. Ainsi, on a :

$$\exp(A+H) - \exp(A) = \exp(A)(\exp(H) - I_n) = \exp(A)\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{H^k}{k!} = \exp(A)H + \exp(A)\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{H^k}{k!}.$$

L'application $\ell : H \mapsto \exp(A)H$ est linéaire et on a :

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{H^k}{k!}\right\| &= \left\|H^2.\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{H^{k-2}}{k!}\right\| \\
&\leq \|H\|^2\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\|H\|^{k-2}}{k!} \\
\left\|\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{H^k}{k!}\right\| &\leq \|H\|^2\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\|H\|^{k-2}}{(k-2)!} = \|H\|^2 e^{\|H\|}
\end{aligned}$$

et ainsi $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{H^k}{k!} = \underset{H\to 0_n}{o}(\|H\|)$ car $\displaystyle\frac{\|H\|^2 e^{\|H\|}}{\|H\|} = \|H\|e^{\|H\|} \xrightarrow[H\to 0_n]{} 0$.

Par suite, exp est différentiable en $A = \lambda I_n$ et comme $\exp(A) = \exp(\lambda I_n) = e^{\lambda}I_n$, on a, pour tout $H \in M_n(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{d}\exp(A)(H) = \exp(A)H = e^{\lambda}H.$$

□

Exercice 12.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\|\cdot\|$ une norme sous-multiplicative sur $E = M_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $A \in E$ telle que $\|A\| < 1$.
   (a) Montrer que $\sum A^k$ converge.
   (b) Montrer que $I_n - A$ est inversible et déterminer son inverse.
2. Montrer que la fonction $f : GL_n(\mathbb{R}) \to E$ définie, pour $M \in GL_n(\mathbb{R})$, par $f(M) = M^{-1}$ est différentiable sur $GL_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa différentielle en tout point.

Correction.

1. Soit $A \in E$ telle que $\|A\| < 1$.
   (a) On a, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ qui est le terme général d'une série géométrique convergente car $\|A\| < 1$, d'où, par comparaison, $\sum A^k$ converge absolument et donc converge.
   (b) On remarque que :

$$(I_n - A)\sum_{k=0}^{+\infty}A^k = \sum_{k=0}^{+\infty}A^k - \sum_{k=0}^{+\infty}A^{k+1} = I_n,$$

donc $I_n - A$ est inversible d'inverse $\sum_{k=0}^{+\infty} A^k$.

2. Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$ et $H \in E$ tel que $\|M^{-1}H\| < 1$. Alors $M+H$ est inversible ; en effet, on a $M+H = M(I_n + M^{-1}H)$, or M est inversible et $I_n + M^{-1}H$ l'est aussi d'après la question précédente avec $A = -M^{-1}H$; d'où $M+H$ est inversible comme produit de matrices inversibles.
Ainsi, $f(M+H)$ est bien défini, et on a :

$$\begin{aligned}
f(M+H) - f(M) &= (M+H)^{-1} - M^{-1} \\
&= ((I_n + M^{-1}H)^{-1} - I_n)M^{-1} \\
&= \left(\left(\sum_{k=0}^{+\infty} (-M^{-1}H)^k \right) - I_n \right) M^{-1} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{+\infty} (-M^{-1}H)^k \right) M^{-1} \\
f(M+H) - f(M) &= -M^{-1}HM^{-1} + \underbrace{\left(\sum_{k=2}^{+\infty} (-M^{-1}H)^k \right) M^{-1}}_{\varepsilon(H)}
\end{aligned}$$

Par propriétés du produit matriciel, l'application $\ell : H \mapsto -M^{-1}HM^{-1}$ est linéaire.
De plus, pour tout $H \in E$ tel que $\|H\| < \|M\|$, on a $\|M^{-1}H\| \leq \|M^{-1}\|.\|H\| < 1$ *(exercice : montrer cette affirmation)* et :

$$\begin{aligned}
\|\varepsilon(H)\| &\leq \sum_{k=2}^{+\infty} \left\|(M^{-1}H)^k\right\| \\
&\leq \left(\|M^{-1}\|.\|H\|\right)^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\|M^{-1}\|.\|H\|\right)^k \\
\|\varepsilon(H)\| &\leq \|H\|^2 . \frac{\|M^{-1}\|^2}{1 - \|M^{-1}\|.\|H\|} ;
\end{aligned}$$

par suite, $\dfrac{\|\varepsilon(H)M^{-1}\|}{\|H\|} \leq \|H\| . \dfrac{\|M^{-1}\|^3}{1 - \|M^{-1}\|.\|H\|} \xrightarrow[\|H\| \to 0]{} 0$.
Ainsi, pour tout $M \in GL_n(\mathbb{R})$, pour tout $H \in E$ tel que $\|H\| < \|M\|$, on a $f(M+H) = f(M) + \ell(M) + o(\|H\|)$ avec ℓ linéaire ; donc f est différentiable sur $G_n(\mathbb{R})$ et :

$$\mathrm{d}f(M) : H \mapsto -M^{-1}HM^{-1}.$$

2. Différentielle et dérivées partielles

Proposition 8. *Différentielle et dérivée suivant un vecteur*

Soit $f : U \to F$ et $a \in U$. Si f est différentiable en a, alors f admet une dérivée en a selon tout vecteur de u et on a :

$$D_u f(a) = \mathrm{d}f(a)(u).$$

En particulier, pour $\mathcal{B}$ est une base de E, si f est différentiable en a, alors f admet des dérivées partielles en a dans la base $\mathcal{B}$.

Démonstration.

On suppose f est différentiable en a. Alors, pour tout $h \in E$ tel que $a + h \in U$, on a :

$$f(a+h) - f(a) = \mathrm{d}f(a)(h) + \underset{\|h\|\to 0}{o}(\|h\|).$$

Soit $u \in E \setminus \{0_E\}$ (le cas $u = 0_E$ est trivial : toute fonction est dérivable suivant 0_E de dérivée égale à 0_F).

On remarque alors que, pour un réel t, $\|tu\| \to 0$ si, et seulement si, $t \to 0$; ainsi, en utilisant la formule précédente appliquée à $h = tu$, on obtient :

$$f(a+tu) - f(a) = \mathrm{d}f(a)(tu) + \underset{t\to 0}{o}(\|tu\|) = t.\,\mathrm{d}f(a)(u) + \underset{t\to 0}{o}(t)$$

Ainsi,

$$\frac{1}{t}(f(a+tu) - f(a)) = \mathrm{d}f(a)(u) + \underset{t\to 0}{o}(1) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \mathrm{d}f(a)(u).$$

Il en résulte que f admet une dérivée en a suivant h et que :

$$D_u f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(a+tu) - f(a)) = \mathrm{d}f(a)(u).$$

□

Proposition 9. *Lien entre différentielle et dérivées partielles*

Soit $f : U \to F$, $a \in U$ et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E.

Si f est différentiable en a, alors, pour tout $h = \sum_{j=1}^{p} h_j e_j \in E$, on a :

$$\mathrm{d}f(a)(h) = \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

ou encore, en utilisant les applications coordonnées dans la base $\mathcal{B}$:

$$\mathrm{d}f(a) = \sum_{j=1}^{p} \mathrm{d}x_j . \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

Démonstration.

On considère une base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ de E. Comme f est différentiable en a, d'après la proposition 8, f admet des dérivées en a suivant chacun des e_j et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = D_{e_j} f(a) = \mathrm{d}f(a)(e_j).$$

Ainsi, pour $h = \sum_{j=1}^{p} h_j e_j \in E$, on a, par linéarité de la différentielle :

$$\mathrm{d}f(a)(h) = \mathrm{d}f(a)\left(\sum_{j=1}^{p} h_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{p} h_j\, \mathrm{d}f(a)(e_j) = \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

$\square$

Corollaire 2. *Lien entre différentielle et dérivées partielles*

Soit $f : U \to F$, $a \in U$ et $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ des bases de E et F respectivement.
Si f est différentiable en a, alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{d}f(a)) = Jf(a).$$

où $Jf(a)$ est la matrice jacobienne de f en a dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$

Démonstration.

Soit $f : U \to F$, $a \in U$ et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p), \mathcal{C} = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_q)$ des bases de E et F respectivement. On note $f_1, ... f_q$ les applications composantes de f dans la base $\mathcal{C}$.
On suppose f différentiable en a. Alors, d'après la proposition précédente, on a, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$:

$$\mathrm{d}f(a)(e_j) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \varepsilon_i.$$

Par suite, on obtient :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{d}f(a)) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq p}} = Jf(a).$$

$\square$

Proposition 10.

Soit $f : U \to F$, $a \in U$ et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p), \mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_p)$ des bases de E. On note $(p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.
Si f est différentiable en a, alors, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x'_j}(a) = \sum_{i=1}^{p} p_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a),$$

où $\frac{\partial}{\partial x'_j}$ désigne la dérivation partielle selon le j-ième vecteur de la base $\mathcal{B}'$.

Démonstration.

On suppose f différentiable en a. Alors, d'après la proposition 8, f admet des dérivées partielles en a dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$; et, pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, comme, par définition de la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$, $e'_j = \sum_{i=1}^{p} p_{i,j} e_i$, on a, par linéarité de $\mathrm{d}f_a$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x'_j}(a) &= \mathrm{d}f_a(e'_j) \\
&= \mathrm{d}f_a\left(\sum_{i=1}^{p} p_{i,j} e_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{p} p_{i,j}\, \mathrm{d}f_a(e_i) \\
\frac{\partial f}{\partial x'_j}(a) &= \sum_{i=1}^{p} p_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).
\end{aligned}$$

□

3. Opérations sur les applications différentiables

Proposition 11. *Combinaisons linéaires*

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $f, g : U \to F$ et $a \in U$.
Si f et g sont différentiables en a (resp. sur U), alors $\lambda f + \mu g$ est différentiable en a (resp. sur U) et on a :

$$\mathrm{d}(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda\, \mathrm{d}f(a) + \mu\, \mathrm{d}g(a).$$

Démonstration.

On suppose f et g sont différentiables en a. On a, pour tout $h \in E$ tel que $a + h \in U$:

$$\begin{aligned}
(\lambda f + \mu g)(a+h) - (\lambda f + \mu g)(a) &= \lambda(f(a+h) - f(a)) + \mu(g(a+h) - g(a)) \\
&= \lambda\left(\mathrm{d}f(a)(h) + o(\|h\|)\right) + \mu\left(\mathrm{d}g(a)(h) + o(\|h\|)\right) \\
&= \left(\lambda\, \mathrm{d}f(a) + \mu\, \mathrm{d}g(a)\right)(h) + o(\|h\|).
\end{aligned}$$

donc :

$$(\lambda f + \mu g)(a+h) = (\lambda f + \mu g)(a) + \ell(h) + o(\|h\|)$$

avec $\ell = \lambda\, \mathrm{d}f(a) + \mu\, \mathrm{d}g(a) \in \mathcal{L}(E,F)$ comme combinaison linéaire des applications linéaires $\mathrm{d}f(a)$ et $\mathrm{d}g(a)$. Par suite, $\lambda f + \mu g$ est différentiable en a et :

$$\mathrm{d}(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda\, \mathrm{d}f(a) + \mu\, \mathrm{d}g(a).$$

$\square$

Corollaire 3.

L'ensemble $\mathcal{D}(\{a\},F)$ (resp. $\mathcal{D}(U,F)$) des applications de U dans F différentiables en a (resp. sur U), muni de ses opérations usuelles, est un espace vectoriel.
De plus, pour $\mathcal{B}=(e_1,...e_p)$ une base de E et $j\in[\![1,p]\!]$, l'application $\dfrac{\partial}{\partial x_j}:f\mapsto\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ est une application linéaire de $\mathcal{D}(U,F)$ dans $\mathcal{F}(U,F)$.

Démonstration.

On a $\mathcal{D}(\{a\},F)\subset\mathcal{F}(U,F)$, $\mathbf{0}:x\mapsto 0_F\in\mathcal{D}(\{a\},F)$ d'après l'exemple 6 et d'après le point précédent, pour tous $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ et et tous $f,g\in\mathcal{D}(\{a\},F)$, $\lambda f+\mu g\in\mathcal{D}(\{a\},F)$. Par suite, $\mathcal{D}(\{a\},F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(U,F)$ et donc est un espace vectoriel.
De plus, pour $\mathcal{D}(U,F)$ l'ensemble des applications de U dans F différentiables sur U, on a :

$$\mathcal{D}(U,F)=\bigcap_{a\in U}\mathcal{D}(\{a\},F),$$

donc $\mathcal{D}(U,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(U,F)$ comme intersection de sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(U,F)$, et ainsi, $\mathcal{D}(U,F)$ est un espace vectoriel.
L'application $\dfrac{\partial}{\partial x_j}:f\mapsto\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ est bien définie sur $\mathcal{D}(U,F)$ d'après la proposition 8. Montrons sa linéarité. Soit $f,g\in\mathcal{D}(U,F)$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. D'après la proposition 11, on a $\lambda f+\mu g\in\mathcal{D}(U,F)$ et $\mathrm{d}(\lambda f+\mu g)=\lambda\,\mathrm{d}f+\mu\,\mathrm{d}g$.
On a alors, pour tout $a\in U$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\lambda f+\mu g))}{\partial x_j}(a) &= \mathrm{d}(\lambda f+\mu g)_a(e_j)\\ &= \lambda\,\mathrm{d}f_a(e_j)+\mu\,\mathrm{d}g(e_j)\\ &= \lambda\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)+\mu\frac{\partial g}{\partial x_j}(a),\end{aligned}$$

d'où $\dfrac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial x_j}=\lambda\dfrac{\partial f}{\partial x_j}+\mu\dfrac{\partial g}{\partial x_j}$.
Il en résulte que $\frac{\partial}{\partial x_j}:\mathcal{D}(U,F)\to\mathcal{F}(U,F)$ est une application linéaire. $\square$

Proposition 12. *Produit d'applications différentiables à valeurs réelles*

Soit $f,g:U\to\mathbb{R}$ et $a\in U$.
Si f et g sont différentiables en a (resp. sur U), alors fg est différentiable en a (resp. sur U) et on a :

$$d(fg)(a)=g(a)\,\mathrm{d}f(a)+f(a)\,\mathrm{d}g(a).$$

Démonstration.

On suppose f et g différentiables en a. On a, pour tout $h \in E$ tel que $a+h \in U$:

$$\begin{array}{rcl}(fg)(a+h)-(fg)(a) & = & f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a) \\ & = & (f(a)+\mathrm{d}f(a)(h)+o(\|h\|))\,(g(a)+\mathrm{d}g(a)(h)+o(\|h\|))-f(a)g(a) \\ & = & g(a)\,\mathrm{d}f(a)(h)+f(a)\,\mathrm{d}g(a)(h)+(f(a)+g(a))o(\|h\|) \\ & & +(\mathrm{d}f(a)(h)+\mathrm{d}g(a)(h))o(\|h\|)+\mathrm{d}f(a)(h)\,\mathrm{d}g(a)(h)+o(\|h\|^2).\end{array}$$

De plus, comme E est de dimension finie, $\mathrm{d}f(a)$ et $\mathrm{d}g(a)$ sont des applications linéaires continues, donc on a :

$$|\,\mathrm{d}f(a)(h)+\mathrm{d}g(a)(h)| \leq |\,\mathrm{d}f(a)(h)|+|\,\mathrm{d}g(a)(h)| \leq (|\!|\!|\,\mathrm{d}f(a)|\!|\!|+|\!|\!|\,\mathrm{d}g(a)|\!|\!|).\|h\|$$

et

$$|\,\mathrm{d}f(a)(h)\,\mathrm{d}g(a)(h)| = |\,\mathrm{d}f(a)(h)|.|\,\mathrm{d}g(a)(h)| \leq (|\!|\!|\,\mathrm{d}f(a)|\!|\!|.|\!|\!|\,\mathrm{d}g(a)|\!|\!|)\|h\|^2$$

d'où :

$$(\mathrm{d}f(a)(h)+\mathrm{d}g(a)(h))o(\|h\|)+\mathrm{d}f(a)(h)\,\mathrm{d}g(a)(h)=o(\|h\|^2).$$

Ainsi :

$$(fg)(a+h)-(fg)(a)=g(a)\,\mathrm{d}f(a)(h)+f(a)\,\mathrm{d}g(a)(h)+\underbrace{(f(a)+g(a))o(\|h\|)+o(\|h\|^2)}_{=o(\|h\|)};$$

et donc :

$$(fg)(a+h)=(fg)(a)+\ell(h)+o(\|h\|)$$

avec $\ell = g(a)\,\mathrm{d}f(a)+f(a)\,\mathrm{d}g(a) \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ comme combinaison linéaire des applications linéaires $\mathrm{d}f(a)$ et $\mathrm{d}g(a)$. Par suite, fg est différentiable en a et :

$$\mathrm{d}(fg)(a)=g(a)\,\mathrm{d}f(a)+f(a)\,\mathrm{d}g(a).$$

□

Corollaire 4.

L'ensemble $\mathcal{D}(\{a\},\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{D}(U,\mathbb{R})$) des applications de U dans $\mathbb{R}$ différentiables en a (resp. sur U), muni de ses opérations usuelles, est une algèbre.

Démonstration.

On a $\mathcal{D}(\{a\},\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(U,\mathbb{R})$ qui est une algèbre. D'après le corollaire 3, $\mathcal{D}(\{a\},\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(U,\mathbb{R})$. De plus, $\mathcal{D}(\{a\},\mathbb{R})$ est stable par produit d'après la proposition précédente et contient $x \mapsto 1$ car cette application est constante et donc différentiable en a d'après l'exemple 6.

Par suite, $\mathcal{D}(\{a\},\mathbb{R})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(U,\mathbb{R})$ et donc est une algèbre.

De plus, pour $\mathcal{D}(U,\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de U dans $\mathbb{R}$ différentiables sur U, on a :

$$\mathcal{D}(U,\mathbb{R})=\bigcap_{a\in U}\mathcal{D}(\{a\},\mathbb{R}),$$

donc $\mathcal{D}(U,\mathbb{R})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(U,\mathbb{R})$ comme intersection de sous-algèbres de $\mathcal{F}(U,\mathbb{R})$, et ainsi, $\mathcal{D}(U,\mathbb{R})$ est une algèbre. □

Corollaire 5.

Soit $f,g : U \to \mathbb{R}$, $a \in U$, $\mathcal{B} = (e_1, ...e_p)$ une base de E et $j \in [\![1,p]\!]$.
Si f et g sont différentiables en a, alors fg admet une j-ème dérivée partielle en a dans la base $\mathcal{B}$ et on a :

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x_j}(a) = g(a).\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + f(a).\frac{\partial g}{\partial x_j}(a).$$

Démonstration.

On suppose f et g différentiables en a. Alors, d'après la proposition précédente, fg est différentiable en a. Ainsi, d'après la proposition 8, f, g et fg admettent une j-ième dérivée partielle en a dans la base $\mathcal{B}$ et on a, d'après la proposition précédente :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(fg)}{\partial x_j}(a) &= \mathrm{d}(fg)_a(e_j) \\
&= g(a)\,\mathrm{d}f_a(e_j) + f(a)\,\mathrm{d}g_a(e_j) \\
\frac{\partial(fg)}{\partial x_j}(a) &= g(a).\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + f(a).\frac{\partial g}{\partial x_j}(a).
\end{aligned}$$

Remarque : bien-sûr, cette formule peut-être directement prouvée par la formule de dérivation d'un produit de fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en raisonnant en terme de fonctions composantes ! □

Proposition 13.

Les applications polynomiales sont différentiables sur E.

Démonstration.

Pour $\mathcal{B}$ une base de E, toute application polynomiale dans la base $\mathcal{B}$ est combinaison linéaire de produits d'applications coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ et d'applications constantes ; applications qui appartiennent à l'algèbre des fonctions différentiables de E dans $\mathbb{R}$ (voire corollaire précédent) d'après les exemples 7 et 6. Une algèbre étant stable par produits et combinaisons linéaires, les applications polynomiales appartiennent à l'algèbre des fonctions différentiables de E dans $\mathbb{R}$ et donc sont différentiables sur E. □

Proposition 14. *Règle de la chaîne*

Soit $f : U \to F$, $g : V \to G$ telles que $f(U) \subset V$ et $a \in U$.
Si f est différentiable en a (resp. sur U) et g est différentiable en $f(a)$ (resp. sur $f(U)$), alors

$g \circ f$ est différentiable en a (resp. sur U) et on a :

$$\mathrm{d}(g \circ f)(a) = \mathrm{d}g(f(a)) \circ \mathrm{d}f(a).$$

Démonstration.

On suppose f différentiable en a et g différentiable en $f(a)$. Comme $\mathrm{d}f(a)$ est une application linéaire continue sur E car E est de dimension finie, pour $h \in E$ et $h' = \mathrm{d}f(a)(h) + o(\|h\|)$, on a $h' \xrightarrow[h \to 0_E]{} 0_F$, donc, U et V étant des ouverts de E et F respectivement, il existe un voisinage de a tel que, pour tout h dans ce voisinage, $a + h \in U$ et $f(a) + h' \in V$ et on a :

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(a+h) - (g \circ f)(a) &= g(f(a+h)) - g(f(a)) \\
&= g(f(a) + \mathrm{d}f(a)(h) + o(\|h\|)) - g(f(a)) \\
&= g(f(a) + h') - g(f(a)) \\
&= \mathrm{d}g(f(a))(h') + o(\|h'\|_F) \\
(g \circ f)(a+h) - (g \circ f)(a) &= \mathrm{d}g(f(a))(\mathrm{d}f(a)(h)) + \mathrm{d}g(f(a))(o(\|h\|)) + o(\|h'\|_F).
\end{aligned}$$

Or, d'une part, par continuité de l'application linéaire $\mathrm{d}g(f(a))$ en 0_F (car F est de dimension finie), on a :

$$\mathrm{d}g(f(a))(\underbrace{o(\|h\|)}_{\text{dans } F}) = \|h\| \, \mathrm{d}g(f(a))(\underbrace{o(1)}_{\text{dans } F}) = \underbrace{o(\|h\|)}_{\text{dans } G};$$

et, d'autre part, comme $\mathrm{d}f(a)$ est une application linéaire continue sur E, pour tout $x \in E$, $\|\mathrm{d}f(a)(x)\|_F \leq \|\!|\mathrm{d}f(a)|\!\|.\|x\|$, d'où, comme $h' = \mathrm{d}f(a)(h) + o(\|h\|)$:

$$\|h'\|_F \leq (\|\!|\mathrm{d}f(a)|\!\| + o(1)).\|h\|$$

et donc, dans l'espace G, $o(\|h'\|_F) = o(\|h\|)$.

Par suite, on a :

$$(g \circ f)(a+h) = (g \circ f)(a) + (\mathrm{d}g(f(a)) \circ \mathrm{d}f(a))(h) + o(\|h\|).$$

L'application $\mathrm{d}g(f(a)) \circ \mathrm{d}f(a)$ étant linéaire comme composée d'applications linéaires, $g \circ f$ est différentiable en a et :

$$\mathrm{d}(g \circ f)(a) = \mathrm{d}g(f(a)) \circ \mathrm{d}f(a).$$

□

Exemple 9.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$.

— Soit $f : U \to F$ une application différentiable sur U, $a \in U$ et $h \in B(0_E, r)$ où $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$. L'application $\varphi : t \mapsto f(a + th)$ est bien définie et dérivable sur $[-1, 1]$

et on a, pour $(e_1, ..., e_p)$ une base de E et pour tout $t \in [-1, 1]$:

$$\varphi'(t) = \mathrm{d}f(a + th)(h) = \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a + th)$$

où $h = \sum_{i=1}^{p} h_j e_j$.

— On a $\det = \det_{\mathcal{B}} \circ C$ où $C : M_n(\mathbb{R}) \to M_{n,1}(\mathbb{R})^n$ est l'application qui, à une matrice de $M_n(\mathbb{R})$, associe le n-uplet de ses colonnes ; et $\mathcal{B}$ est la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.
Par suite, C étant linéaire, elle est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$ et $\det_{\mathcal{B}}$ étant multilinéaire (voire exemple 8), elle est différentiable sur $M_{n,1}(\mathbb{R})^n$. Par suite, d'après la règle de la chaîne, det est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$.

— Comme $h \in B(0_E, r)$, pour tout $t \in [-1, 1]$, $\|th\| = |t|.\|h\| < r$, d'où $a + th \in B(a, r)$. Par suite, φ est bien définie sur $[-1, 1]$. De plus, $\varphi = f \circ \gamma$ où $\gamma : t \mapsto a + th$. Or γ est dérivable et donc différentiable sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\gamma'(t) = h$; ainsi, φ est différentiable et donc dérivable sur $[-1, 1]$ comme composée de deux fonctions différentiables avec $\gamma([-1, 1]) \subset U$; et on a, d'après la proposition 4 et la règle de la chaîne, pour tout $t \in [-1, 1]$ et $s \in \mathbb{R}$:

$$\varphi'(t).s = \mathrm{d}\varphi_t(s) = \mathrm{d}f_{\gamma(t)} \circ \mathrm{d}\gamma_t(s) = s.\,\mathrm{d}f_{a+th}(h)$$

d'où, en prenant $s = 1$, $\varphi'(t) = \mathrm{d}f_{a+th}(h) = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a + th)$ d'après la proposition 9.

Remarque : on a en fait prouvé une formule qui nous aurait permis d'écrire directement la dérivée de φ ; en fait, $\varphi = f \circ \gamma$ où γ est ce qu'on appellera un *arc paramétré* et la proposition 28 nous donnera une formule toute faite pour ce genre de situation.

Exercice 13.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = M_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'application $g : E \to \mathbb{R}$ définie, pour $M \in E$, par $g(M) = \mathrm{Tr}(M^2)$ est différentiable sur E et déterminer sa différentielle en tout point.

Correction.

On a $g = \mathrm{Tr} \circ f$ où $f : M \mapsto M^2$. L'application Tr étant linéaire, elle est différentiable sur E de différentielle en $A \in E$: $\mathrm{dTr}_A = \mathrm{Tr}$. D'après l'exercice 9, l'application f est différentiable sur E de différentielle en $A \in E$: $\mathrm{d}f_A : H \mapsto AH + HA$. Par suite, d'après la règle de la chaîne (Proposition 14), $g = \mathrm{Tr} \circ f$ est différentiable sur E et on a, pour tous $A, H \in E$:

$$\mathrm{d}g_A(H) = \mathrm{dTr}_{f(A)} \circ \mathrm{d}f_A(H) = \mathrm{Tr}(AH + HA).$$

De plus, Tr étant linéaire et vérifiant, pour tous $M, N \in E$, $\mathrm{Tr}(MN) = \mathrm{Tr}(NM)$, on obtient, pour tous $A, H \in E$:

$$\mathrm{d}g_A(H) = \mathrm{Tr}(AH) + \mathrm{Tr}(HA) = 2\mathrm{Tr}(AH).$$

Corollaire 6. *Jacobienne d'une composée*

Soit $f : U \to F$, $g : V \to G$ telles que $f(U) \subset V$, $a \in U$ et $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ des bases de E, F, G respectivement.
Si f est différentiable en a et g est différentiable en $f(a)$, alors :

$$J(g \circ f)(a) = Jg(f(a)) \times Jf(a).$$

Correction.

On suppose f est différentiable en a et g est différentiable en $f(a)$. Alors, d'après la règle de la chaîne (Proposition 14), $g \circ f$ est différentiable en a et on a :

$$\mathrm{d}(g \circ f)(a) = \mathrm{d}g(f(a)) \circ \mathrm{d}f(a).$$

D'après le corollaire 2, on a :

$$Jf(a) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\,\mathrm{d}f(a)); \quad Jg(f(a)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(\,\mathrm{d}g(f(a)))$$

et

$$J(g \circ f)(a) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(\,\mathrm{d}(g \circ f)(a))$$

d'où :

$$\begin{aligned}
Jg(f(a)) \times Jf(a) &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(\,\mathrm{d}g(f(a))) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\,\mathrm{d}f(a)) \\
&= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(\,\mathrm{d}g(f(a)) \circ \mathrm{d}f(a)) \\
&= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(\,\mathrm{d}(g \circ f)(a)) \\
Jg(f(a)) \times Jf(a) &= J(g \circ f)(a).
\end{aligned}$$

Corollaire 7.

Soit $f : U \to F$, $g : V \to G$ telles que $f(U) \subset V$, $a \in U$, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p), \mathcal{C} = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_q)$ des bases de E, F respectivement et $j \in [\![1, p]\!]$.
Si f est différentiable en a et g est différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ admet une j-ème dérivée partielle en a dans la base $\mathcal{B}$ et on a :

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a).\frac{\partial g}{\partial y_i}(f(a)),$$

où $f_1, ..., f_q$ sont les applications composantes de f et où les $\frac{\partial}{\partial y_i}$ désignent les dérivations partielles dans la base $\mathcal{C}$.

Démonstration.

On suppose f est différentiable en a et g est différentiable en $f(a)$, alors, d'après la proposition précédente, $g \circ f$ est différentiable en a et donc, d'après la proposition 8, admet une j-ème dérivée partielle en a dans la base $\mathcal{B}$ et on a $\mathrm{d}(g \circ f)_a = \mathrm{d}g_{f(a)} \circ \mathrm{d}f_a$.

Par suite, comme $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^q \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\varepsilon_i$, on a, :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_j}(a) &= \mathrm{d}(g\circ f)_a(e_j) \\
&= \mathrm{d}g_{f(a)} \circ \mathrm{d}f_a(e_j) \\
&= \mathrm{d}g_{f(a)}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\right) \\
&= \sum_{i=1}^q \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a).\, \mathrm{d}g_{f(a)}(\varepsilon_i) \\
\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_j}(a) &= \sum_{i=1}^q \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a).\frac{\partial g}{\partial y_i}(f(a)).
\end{aligned}$$

Remarque : on aurait pu raisonner avec le corollaire précédent en terme de matrices jacobiennes pour prouver ce résultat. □

Exemple 10.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ est une base de E. À partir du corollaire précédent, on retrouve la formule de la proposition 2 pour $f : U \to F$ différentiable sur U, $L \in \mathcal{L}(F, G)$ et $j \in [\![1, p]\!]$:

$$\frac{\partial(L\circ f)}{\partial x_j} = L \circ \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Soit $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_q)$ une base de F. Comme L est linéaire sur F, elle est différentiable sur F d'après la proposition 5 et on a, d'après le corollaire 1, pour tout $b \in F$ et tout $i \in [\![1, q]\!]$, $\frac{\partial L}{\partial y_i}(b) = L(\varepsilon_i)$. Par suite, d'après le corollaire précédent, $L \circ f$ admet une j-ième dérivée partielle en tout point de U et on a, pour tout $a \in U$, par linéarité de L :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(L\circ f)}{\partial x_j}(a) &= \sum_{i=1}^q \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a).\frac{\partial L}{\partial y_i}(f(a)) \\
&= \sum_{i=1}^q \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a).L(\varepsilon_i) \\
&= L\left(\sum_{i=1}^q \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\varepsilon_i\right) \\
\frac{\partial(L\circ f)}{\partial x_j}(a) &= = L\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\right).
\end{aligned}$$

Proposition 15. *Différentielle d'une inverse*

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $a \in U$.
Si f est différentiable en a et $f(a) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est différentiable en a et :

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{f}\right)(a) = -\frac{1}{f^2(a)}\,\mathrm{d}f(a).$$

En particulier, si f est différentiable sur U, alors $\frac{1}{f}$ est différentiable sur l'ouvert $U' = \{a \in U \mid f(a) \neq 0\}$.

Démonstration.

On suppose f différentiable en a et $f(a) \neq 0$. L'application $i : x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, donc, d'après la proposition 4, est différentiable sur $\mathbb{R}^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $x + t \neq 0$, on a :

$$\mathrm{d}i(t) = i'(x).t = -\frac{1}{x^2}.t$$

Comme f est différentiable en a, f est continue en a donc il existe un ouvert $W \subset U$ tel que, pour tout $u \in W$, $f(u) \neq 0$. Par suite, on a $f(W) \subset \mathbb{R}^*$ et $a \in W$, donc, f étant différentiable en a et i étant différentiable sur $\mathbb{R}^*$ et donc en $f(a)$, d'après la régle de la chaîne (Proposition 14), $\frac{1}{f} = i \circ f : W \to \mathbb{R}$ est différentiable en a et on a, pour tout $h \in E$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\left(\tfrac{1}{f}\right)(a)(h) &= \mathrm{d}(i \circ f)(a)(h) \\
&= \left(\mathrm{d}i(f(a)) \circ \mathrm{d}f(a)\right)(h) \\
&= -\frac{1}{f(a)^2}.\,\mathrm{d}f(a)(h)
\end{aligned}$$

d'où

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{f}\right)(a) = -\frac{1}{f^2(a)}\,\mathrm{d}f(a).$$

Il reste à montrer que $U' = \{a \in U \mid f(a) \neq 0\}$ est un ouvert de E : on a $U' = U \setminus Z = U \cap Z^c$ où $Z = \{u \in U \mid f(a) = 0\}$; or $Z = f^{-1}(\{0\})$ est fermé comme image réciproque du fermé $\{0\}$ de $\mathbb{R}$ par l'application f continue sur U car différentiable sur U, d'où U' est un ouvert de E comme intersection finie d'ouverts de E. □

Exercice 14.

Justifier que $f : (x, y) \mapsto \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ est différentiable sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et déterminer sa différentielle en tout point de U. On prolonge f sur $\mathbb{R}^2$ avec $f(0, 0) = 0$; f ainsi prolongée est-elle différentiable en $(0, 0)$?

Correction.

On a $f = \frac{g}{h}$ où $g : (x, y) \mapsto xy$ et $h : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ sont polynomiales sur $\mathbb{R}^2$. De plus, h ne s'annule pas sur U donc g et $\frac{1}{h}$ sont différentiables sur U ; d'où f est différentiable sur U comme produit de fonctions différentiables sur U. De plus, on a, pour tout $(x, y) \in U$:

— $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = y$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = x$; d'où :

$$\mathrm{d}g_{(x,y)} = y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y;$$

— $\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = 2x$ et $\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = 2y$; d'où :

$$\mathrm{d}h_{(x,y)} = 2(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y).$$

et ainsi,

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{h}\right)_{(x,y)} = -\frac{1}{h(x)^2}\,\mathrm{d}h_{(x,y)} = -\frac{1}{(x^2+y^2)^2}(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y).$$

Par suite, on a, pour tout $(x, y) \in U$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f_{(x,y)} &= \frac{1}{h(x,y)}\,\mathrm{d}g_{(x,y)} + g(x,y)\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{h}\right)_{(x,y)} \\
&= \frac{1}{x^2+y^2}(y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y) + xy\left(-\frac{1}{(x^2+y^2)^2}(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y)\right) \\
\mathrm{d}f_{(x,y)} &= \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\left(y^3\,\mathrm{d}x + x^3\,\mathrm{d}y\right).
\end{aligned}$$

Remarque : on aurait également pu calculer directement les dérivées partielles de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et utiliser la formule :

$$\mathrm{d}f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

De plus, on a montré, dans l'exercice 2, que f (avec $f(0,0) = 0$) n'est pas continue en $(0, 0)$, donc elle n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

Exercice 15.

On suppose que E est un espace euclidien. Soit $f : E \setminus \{0_E\} \to \mathbb{R}$ telle que $f : x \mapsto \frac{1}{\|x\|}$. Montrer que f est différentiable sur E et déterminer sa différentielle en tout point de $E \setminus \{0_E\}$.

Correction.

On remarque que $f = \sqrt{\cdot} \circ \frac{1}{\|\cdot\|^2}$. La fonction $\sqrt{\cdot}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de différentielle $\mathrm{d}\sqrt{\cdot}(x)$: $t \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}.t$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et, d'après l'exercice 10, $\|\cdot\|^2$ est différentiable sur E, ne s'annule pas sur $E \setminus \{0_E\}$, donc $\frac{1}{\|\cdot\|^2}$, qui est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, est différentiable sur $E \setminus \{0_E\}$, de différentielle en $a \in E \setminus \{0_E\}$:

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{\|\cdot\|^2}\right)(a) = -\frac{1}{\|a\|^4}\,\mathrm{d}\|\cdot\|^2(a) : h \mapsto -\frac{2(a|h)}{\|a\|^4}.$$

Par suite, d'après la règle de la chaîne (Proposition 14), f est différentiable sur $E \setminus \{0_E\}$ et on a, pour tout $a \in E \setminus \{0_E\}$ et tout $h \in E$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f(a)(h) &= \left(\mathrm{d}\sqrt{\cdot}\left(\frac{1}{\|a\|^2}\right) \circ \mathrm{d}\left(\frac{1}{\|\cdot\|^2}\right)(a)\right)(h) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{\|a\|^2}}} \cdot \left(-\frac{2(a|h)}{\|a\|^4}\right) \\
\mathrm{d}f(a)(h) &= -\frac{(a|h)}{\|a\|^3}
\end{aligned}$$

Proposition 16. *Différentiabilité d'une application à valeurs dans un produit*

Soit $F_1, ..., F_q$ des espaces vectoriels normés de dimensions finies, $f : U \to F_1 \times \ldots \times F_q$ et $a \in U$. Pour $i \in [\![1, q]\!]$, on note $f_i = \pi_i \circ f : U \to F_i$ où $\pi_i : (x_1, ..., x_q) \in F_1 \times \ldots \times F_q \mapsto x_i \in F_i$ est la projection du produit sur F_i. On a l'équivalence suivante :

L'application f est différentiable en a (resp. sur U) si, et seulement si, pour tout $i \in [\![1, q]\!]$, $f_i : U \to F_i$ est différentiable en a (resp. sur U).
Et dans ce cas, pour tout $i \in [\![1, q]\!]$, on a :

$$\mathrm{d}f_i(a) = \pi_i \circ \mathrm{d}f(a),$$

et

$$\mathrm{d}f(a) = \sum_{i=1}^{q} r_i \circ \mathrm{d}f_i(a)$$

où, pour chaque $i \in [\![1, q]\!]$, r_i est l'application de F_i dans $F_1 \times \ldots \times F_q$ définie par $r_i(x_i) = (0_{F_1}, ..., 0_{F_{i-1}}, x_i, 0_{F_{i+1}}, ..., 0_{F_q})$.

Démonstration.

($\Rightarrow$) On suppose f différentiable en a. Soit $i \in [\![1, q]\!]$. L'application π_i est linéaire de $F_1 \times \ldots \times F_q$ dans F_i, donc, d'après la proposition 5, elle est différentiable en $f(a)$ de différentielle en ce point $\mathrm{d}\pi_i(f(a)) = \pi_i$. Par suite, d'après la règle de la chaîne, la règle de la chaîne (Proposition 14), $f_i = \pi_i \circ f$ est différentiable en a et on a :

$$\mathrm{d}f_i(a) = \mathrm{d}\pi_i(f(a)) \circ \mathrm{d}f(a) = \pi_i \circ \mathrm{d}f(a).$$

($\Leftarrow$) On suppose que, pour tout $i \in [\![1, q]\!]$, $f_i : U \to F_i$ est différentiable en a.
Pour chaque $i \in [\![1, q]\!]$, on considère $r_i : F_i \to F_1 \times \ldots \times F_q$ l'application définie, pour $x_i \in F_i$, par :

$$r_i(x_i) = (0_{F_1}, ..., 0_{F_{i-1}}, x_i, 0_{F_{i+1}}, ..., 0_{F_q})$$

Alors, on a $f = \sum_{i=1}^{n} r_i \circ f_i$. Or, pour tout $i \in [\![1, q]\!]$, r_i est linéaire, donc, d'après la proposition 5, est différentiable en $f(a)$ de différentielle en ce point égale à r_i ; et ainsi, d'après la régle de la chaîne, $r_i \circ f_i$ est différentiable en a et $\mathrm{d}(r_i \circ f_i)(a) = r_i \circ \mathrm{d}f_i(a)$.
Par suite, f est différentiable en a comme combinaison linéaire d'applications différen-

tiables en a (Proposition 11) et on a :

$$\mathrm{d}f(a) = \sum_{i=1}^{q} r_i \circ \mathrm{d}f_i(a).$$

□

Corollaire 8. *Différentiabilité et applications composantes*

Soit $f : U \to F$, $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_q)$ une base de F et $a \in U$. On note $f_1, ..., f_q$ les applications composantes de f dans la base $\mathcal{C}$. On a l'équivalence suivante :

L'application f est différentiable en a (resp. sur U) si, et seulement si, pour tout $i \in [\![1, q]\!]$, $f_i : U \to \mathbb{R}$ est différentiable en a (resp. sur U).
Dans ce cas, on a :

$$\mathrm{d}f(a) = \sum_{i=1}^{q} \mathrm{d}f_i(a)\varepsilon_i.$$

Démonstration.

L'idée est d'appliquer la proposition précédente en "voyant" F comme le produit $\mathbb{R}^q$. Plus précisément, notons $\varphi_{\mathcal{C}} : (x_1, ..., x_q) \mapsto \sum_{i=1}^{q} x_i\varepsilon_i$ l'isomorphisme de $\mathbb{R}^q$ dans F via la base $\mathcal{C}$.
On reprend les notations de la proposition précédente avec $F_i = \mathbb{R}$ pour tout $i \in [\![1, q]\!]$ et on considère $\tilde{f} = \varphi_{\mathcal{C}}^{-1} \circ f : U \to \mathbb{R}^q = F_1 \times ... \times F_q$. On remarque alors que, pour tout $i \in [\![1, q]\!]$, $\tilde{f}_i = \pi_i \circ \tilde{f} = f_i$ car $\pi_i \circ \varphi_{\mathcal{C}}^{-1} : \sum_{k=1}^{q} x_k\varepsilon_k \mapsto x_i$.
Par suite, d'après la proposition précédente, $\tilde{f}$ est différentiable en a si, et seulement si, pour tout $i \in [\![1, q]\!]$, $f_i : U \to \mathbb{R}$ est différentiable en a.
Et dans ce cas, on a :

$$\mathrm{d}\tilde{f}(a) = \sum_{i=1}^{q} r_i \circ \mathrm{d}f_i(a)$$

Or, $\varphi_{\mathcal{C}}$ et $\varphi_{\mathcal{C}}^{-1}$ étant linéaires, elles sont différentiables sur leurs espaces de départ, de différentielles en tout point égale à elles-mêmes ; donc, d'après la régle de la chaîne, $f = \varphi_{\mathcal{C}} \circ \tilde{f}$ est différentiable en a si, et seulement si, $\tilde{f} = \varphi_{\mathcal{C}}^{-1} \circ f$ est différentiable en a.
Ainsi, f est différentiable en a si, et seulement si, pour tout $i \in [\![1, q]\!]$, $f_i : U \to \mathbb{R}$ est différentiable en a.
Et dans ce cas, comme, pour tout $i \in [\![1, q]\!]$, $\varphi_{\mathcal{C}} \circ r_i : x_i \mapsto x_i\varepsilon_i$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f(a) &= \varphi_{\mathcal{C}} \circ \mathrm{d}\tilde{f}(a) \\
&= \varphi_{\mathcal{C}} \circ \left(\sum_{i=1}^{q} r_i \circ \mathrm{d}f_i(a)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{q} (\varphi_{\mathcal{C}} \circ r_i) \circ \mathrm{d}f_i(a) \\
\mathrm{d}f(a) &= \sum_{i=1}^{q} \mathrm{d}f_i(a)\varepsilon_i
\end{aligned}$$

$\square$

Exercice 16.

Soit $f:(x,y)\mapsto(y,x,x+y)$ et $g:(x,y,z)\mapsto(x^2+y^2,z^2)$. Montrer que $g\circ f$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer sa différentielle en tout point de $\mathbb{R}^2$ de deux manières : en calculant $g\circ f$ et avec le produit des matrices jacobiennes dans les bases canoniques.

Correction.

Tout d'abord, on remarque que f est une application linéaire donc elle est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et que g est différentiable sur $\mathbb{R}^3$ car ses applications composantes sont polynomiales et donc différentiables sur $\mathbb{R}^3$. Par suite, d'après la règle de la chaîne, $g\circ f$ est différentaible sur $\mathbb{R}^2$. Calculons la différentielle de $g\circ f$ en tout point de $\mathbb{R}^2$.

- *1ère façon :* on a, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $g\circ f(x,y)=(y^2+x^2,(x+y)^2)$, donc $g\circ f$ étant différentiable sur $\mathbb{R}^2$, on obtient, pour tout $(h,k)\in\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(gof)_{(x,y)}(h,k) &= h\frac{\partial(gof)}{\partial x}(x,y)+k\frac{\partial(gof)}{\partial y}(x,y)\\
&= h(2x,2(x+y))+k(2y,2(x+y))\\
\mathrm{d}(gof)_{(x,y)}(h,k) &= 2(h(x,x+y)+k(y,x+y)).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathrm{d}(gof)_{(x,y)}=2(\,\mathrm{d}x(x,x+y)+\,\mathrm{d}y(y,(x+y)).$$

- *2nde façon :* Notons $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement. Alors, dans ces bases, on a, pour tout $(u,v,w)\in\mathbb{R}$ et tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}\left((\,\mathrm{d}g_{(u,v,w)}\right)=Jg(u,v,w) &= \begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x}(u,v,w) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(u,v,w) & \frac{\partial g_1}{\partial z}(u,v,w)\\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(u,v,w) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(u,v,w) & \frac{\partial g_2}{\partial z}(u,v,w)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}2u & 2v & 0\\ 0 & 0 & 2w\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

et

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\,\mathrm{d}f_{(x,y)})=Jf(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)\\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}\left(\mathrm{d}(g\circ f)_{(x,y)}\right) &= J(g\circ f)(x,y)\\
&= Jg(f(x,y))\times Jf(x,y)\\
&= \begin{pmatrix}2y & 2x & 0\\ 0 & 0 & 2(x+y)\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}2x & 2y\\ 2(x+y) & 2(x+y)\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On retrouve bien, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathrm{d}(g \circ f)_{(x,y)}(h,k) = (2xh + 2yk, 2(x+y)(h+k)) = 2(h(x, x+y) + k(y, x+y))$$

4. Fonctions de classe C^1

a. Définition et premiers exemples

Définition 11. *Fonction de classe C^1*

Soit $f : U \to F$. On dit que f est de **classe C^1 sur** U si f est différentiable sur U et $\mathrm{d}f : E \to \mathcal{L}(E,F)$ est continue sur U.

Exemple 11.

- Soit $f : U \to F$. Si f est constante sur U, alors f est de classe C^1 sur U.
- Soit $L : E \to F$. Si $L \in \mathcal{L}(E,F)$, alors L est de classe C^1 sur E.
- Une fonction de la variable réelle est de classe C^1 avec "l'ancienne" définition si, et seulement si, elle l'est avec la "nouvelle".

- Si f est constante en $c \in F$, f est différentiable sur U et $\mathrm{d}f : a \mapsto \mathbf{0}$ qui est une application continue sur U car constante sur U.
- Si $L \in \mathcal{L}(E,F)$, L est différentiable sur U et $\mathrm{d}L : a \mapsto L$ qui est une application continue sur U car constante sur U.
- D'après la proposition 4, pour une fonction $f : U \subset \mathbb{R} \to F$ la différentiabilité sur U équivaut à la dérivabilité, et dans ce cas, pour tout $a \in U$, $\mathrm{d}f_a : t \mapsto f'(a).t$. Ainsi, $\mathrm{d}f : U \subset \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}, F)$ est continue sur U si, et seulement si, f' est continue sur U. En effet, pour tous $a, b \in U$, on a :

$$|||\,\mathrm{d}f_b - \mathrm{d}f_a|||= \sup_{t=\pm 1} \|(\mathrm{d}f_b - \mathrm{d}f_a)(t)\|_F = \|f'(b) - f'(a)\|_F.$$

Exercice 17.

On suppose que E est un espace euclidien. Montrer que $f : x \mapsto \|x\|^2$ est de classe C^1 sur E.

Correction.

D'après l'exercice 10, f est différentiable sur E et, pour tout $a, h \in E$, on a :

$$\mathrm{d}f(a)(h) = 2(a|h).$$

Montrons que $\mathrm{d}f$ est continue sur E (dans $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$). On remarque que, pour tout $a, b, h \in E$ et

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, par linéarité du produit scalaire par rapport à sa première variable :

$$\mathrm{d}f(\lambda a + \mu b)(h) = 2(\lambda a + \mu b|h) = \lambda \times 2(a|h) + \mu \times 2(b|h) = \lambda\,\mathrm{d}f(a)(h) + \mu\,\mathrm{d}f(b)(h)$$

et donc $\mathrm{d}f(\lambda a+\mu b) = \lambda\,\mathrm{d}f(a)+\mu\,\mathrm{d}f(b)$. Ainsi, $\mathrm{d}f$ est une application linéaire définie sur E qui est de dimension finie, donc $\mathrm{d}f$ est continue sur E.
Par suite, f est de classe C^1 sur E.

b. Opérations sur les fonctions de classe C^1

Proposition 17.

L'ensemble $C^1(U,F)$ des applications de classe C^1 de U dans F, muni de ses opérations usuelles, est un espace vectoriel.

Correction.

D'après le corollaire 3, l'ensemble $\mathcal{D}(U,F)$ des applications différentiables sur U, muni de ses opérations usuelles, est un espace vectoriel. Montrons que $C^1(U,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}(U,F)$.
L'application nulle de U dans F appartient à $C^1(U,F)$ car elle est constante et donc de classe C^1 sur U, d'après l'exemple 11.
De plus, pour $f,g \in C^1(U,F)$ et $\lambda, \varphi \in \mathbb{R}$, on a, d'après la proposition 11 :

$$\mathrm{d}(\lambda f + \lambda g) = \lambda\,\mathrm{d}f + \mu\,\mathrm{d}g$$

donc $\mathrm{d}(\lambda f + \lambda g)$ est continue sur U comme combinaison linéaire d'applications continues sur U.
Donc $C^1(U,F)$ est stable par combinaison linéaire.
Il en résulte que $C^1(U,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}(U,F)$ et donc un espace vectoriel.

Question 1.

De quelle structure peut-on munir l'ensemble $C^1(U,\mathbb{R})$?

Réponse.

On peut munir cet ensemble, muni de ses opérations usuelles, d'une structure d'algèbre : en effet, c'est une sous-algèbre de l'algèbre $\mathcal{D}(U,\mathbb{R})$ des applications différentiables de U dans $\mathbb{R}$, d'après la proposition précédente et notamment par la formule de la différentielle d'un produit (Proposition 12).

Proposition 18.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, ...e_p)$ une base de E. Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, la i-ème application coordonnée $\mathrm{d}x_i$: $x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j \mapsto x_i$ est de classe C^1 de E dans $\mathbb{R}$.

Démonstration.

L'application $\mathrm{d}x_i$ est linéaire, et donc de classe C^1 sur E (voire exemple 11). □

Théorème 1. *Applications polynomiales*

Les applications polynomiales sur E sont de classe C^1 sur E.

Démonstration.

Une application polynomiale sur E est de classe C^1 sur E comme combinaison linéaire de produits d'applications coordonnées qui sont de classe C^1 sur E d'après la proposition 18. □

Exemple 12.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application det : $M_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur $M_n(\mathbb{R})$.

Dans l'exemple 9, on a montré que det est différentiable à partir de son expression du déterminant dans la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$; ici, on va plutôt utiliser la formule explicite du déterminant en fonction de ses coefficients dans la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$, à savoir, pour $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n} \in M_n(\mathbb{R})$:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

D'après cette formule, le déterminant d'une matrice est une combinaison linéaire de produits de ses coefficients et donc det est polynomiale dans la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$. Par suite, d'après le théorème 1, L'application det est de classe C^1 sur $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 18.

Justifier que les applications suivantes sont de classe C^1 sur E et déterminer leurs différentielles.

1. $f : (x, y) \mapsto (x^2 + y)^2$ et $E = \mathbb{R}^2$.
2. $g : (x, y, z) \mapsto x^3 + y^3 + z^3 + xyz$ et $E = \mathbb{R}^3$.

Correction.

Les applications f et g sont polynomiales sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement et donc sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement. De plus, en utilisant le lien entre différentielle et dérivées partielles, on obtient :

1. pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f_{(x,y)} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}y \\
&= 4x(x^2+y)\,\mathrm{d}x + 2(x^2+y)\,\mathrm{d}y \\
\mathrm{d}f_{(x,y)} &= 2(x^2+y)\,(2x\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y)\,;
\end{aligned}$$

2. pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}g_{(x,y,z)} &= \frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z)\,\mathrm{d}x + \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z)\,\mathrm{d}y + \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)\,\mathrm{d}z \\
\mathrm{d}g_{(x,y,z)} &= (3x^2+yz)\,\mathrm{d}x + (3y^2+zx)\,\mathrm{d}y + (3z^2+xy)\,\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Proposition 19.

Soit $f : U \to F$, $g : V \to G$ telles que $f(U) \subset V$. Si f est de classe C^1 sur U et g est de classe C^1 sur V, alors $g \circ f$ est de classe C^1 sur U.

Démonstration.

On suppose f et g de classe C^1 sur U et sur V respectivement. Alors en particulier, elles sont différentiables sur U et sur V respectivement, et comme $f(V) \subset V$, d'après la règle de la chaîne (Proposition 14), $g \circ f$ est différentiable sur U et on a :

$$\mathrm{d}(g \circ f) : a \mapsto \mathrm{d}g_{f(a)} \circ \mathrm{d}f_a.$$

On munit $\mathcal{L}_c(E,F)$, $\mathcal{L}_c(F,G)$ et $\mathcal{L}_c(E,G)$ des normes subordonnées aux normes de leurs espaces de départs et d'arrivées respectifs, que l'on note respectivement $|||\cdot|||_{E,F}$, $|||\cdot|||_{F,G}$ et $|||\cdot|||_{E,G}$. On rappelle que , pour tout $\varphi \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et tout $\psi \in \mathcal{L}_c(F,G)$, on a :

$$|||\psi \circ \varphi|||_{E,G} \leq |||\psi|||_{F,G} \cdot |||\varphi|||_{E,F}.$$

Soit $a \in U$. On a alors, pour $x \in U$:

— comme f est de classe C^1, $\mathrm{d}f$ est continue en a donc $|||\,\mathrm{d}f_x - \mathrm{d}f_a|||_{E,F} \xrightarrow[x \to a]{} 0$ et $|||\,\mathrm{d}f_x|||_{E,F} \xrightarrow[b \to a]{} |||\,\mathrm{d}f_a|||_{E,F}$;

— comme g est de classe C^1, $\mathrm{d}g$ est continue sur V et comme f est différentiable en a, f est continue en a ; donc $\mathrm{d}g_{f(\cdot)} = (\,\mathrm{d}g) \circ f$ est continue en $a \in U$ avec $f(a) \in V$ comme composée d'applications continues ; d'où $\left|\left|\left|\,\mathrm{d}g_{f(x)} - \mathrm{d}g_{f(a)}\right|\right|\right|_{F,G} \xrightarrow[x \to a]{} 0$.

Ainsi, pour $x \in U$, on a :

$$\begin{aligned}
&\left\|\left| \mathrm{d}(g\circ f)_x - \mathrm{d}(g\circ f)_a \right|\right\|_{E,G} \\
&\qquad = \left\|\left| \mathrm{d}g_{f(x)} \circ \mathrm{d}f_x - \mathrm{d}g_{f(a)} \circ \mathrm{d}f_a \right|\right\|_{E,G} \\
&\qquad \leq \left\|\left| \mathrm{d}g_{f(x)} \circ \mathrm{d}f_x - \mathrm{d}g_{f(a)} \circ \mathrm{d}f_x \right|\right\|_{E,G} + \left\|\left| \mathrm{d}g_{f(a)} \circ \mathrm{d}f_x - \mathrm{d}g_{f(a)} \circ \mathrm{d}f_a \right|\right\|_{E,G} \\
&\qquad \leq \left\|\left| \left(\mathrm{d}g_{f(x)} - \mathrm{d}g_{f(a)}\right) \circ \mathrm{d}f_x \right|\right\|_{E,G} + \left\|\left| \mathrm{d}g_{f(a)} \circ \left(\mathrm{d}f_x - \mathrm{d}f_a\right) \right|\right\|_{E,G} \\
&\qquad \leq \underbrace{\left\|\left| \mathrm{d}g_{f(x)} - \mathrm{d}g_{f(a)} \right|\right\|_{F,G}}_{\xrightarrow[x\to a]{}0} \cdot \underbrace{\left\|\left| \mathrm{d}f_x \right|\right\|_{E,F}}_{\xrightarrow[x\to a]{}\left\|\left| \mathrm{d}f_a \right|\right\|_{E,F}} + \left\|\left| \mathrm{d}g_{f(a)} \right|\right\|_{F,G} \cdot \underbrace{\left\|\left| \mathrm{d}f_x - \mathrm{d}f_a \right|\right\|_{E,F}}_{\xrightarrow[x\to a]{}0},
\end{aligned}$$

donc :

$$\left\|\left| \mathrm{d}(g\circ f)_x - \mathrm{d}(g\circ f)_a \right|\right\|_{E,G} \xrightarrow[x\to a]{} 0.$$

Par suite, $\mathrm{d}(g\circ f)$ est continue en a et ce, pour tout $a \in U$, donc $\mathrm{d}(g\circ f)$ est continue sur U. Il en résulte que $g\circ f$ est de classe C^1 sur U. □

Proposition 20.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$. Si f est de classe C^1 sur U et ne s'annule pas sur U, alors $\dfrac{1}{f}$ est de classe C^1 sur U.

Démonstration.

On suppose que f est de classe C^1 sur U et que f ne s'annule pas sur U. On a $\frac{1}{f} = i \circ f$ où $i : x \mapsto \frac{1}{x}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ (voire Exemple 11) et f est de classe C^1 sur U et à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ car f ne s'annule pas sur U, donc, d'après la proposition 19, $\frac{1}{f}$ est de classe C^1 sur U. □

c. Théorème fondamental du calcul différentiel

Théorème 2. *Théorème fondamental du calcul différentiel*

On rappelle que U désigne un ouvert de E.
Soit $f : U \to F$. Pour toute base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ de E, on a équivalence entre les assertions suivantes :

i) La fonction f est de classe C^1 sur U.

ii) Pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, l'application $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} : U \to F$ est bien définie et continue sur U.

Démonstration.

On munit E de la norme $\|\cdot\|_1 : x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j \mapsto \sum_{j=1}^{p} |x_j|$. Comme E est de dimension finie, pour montrer la continuité d'une application définie sur E, il suffit de l'établir en utilisant la norme $\|\cdot\|_1$.
De plus, on munit $\mathcal{L}(E,F)$ de la norme $|||\cdot|||$ subordonnée aux normes $\|\cdot\|_1$ sur E et $\|\cdot\|_F$ sur F.

i) $\Rightarrow$ ii) On suppose f de classe C^1 sur U. Alors f est différentiable sur U, donc les dérivées partielles dans la base $\mathcal{B}$ sont bien définies sur U (Proposition 8).
Soit $a \in U$ et $j \in [\![1,p]\!]$. L'application $\mathrm{d}f$ est continue sur U donc, pour $x \in U$, $|||\,\mathrm{d}f_x - \mathrm{d}f_a||| \xrightarrow[x\to a]{} 0$; et ainsi, on a, par définition de la j-ième dérivée partielle dans la base $\mathcal{B}$:

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\right\|_F = \|(\,\mathrm{d}f_x - \mathrm{d}f_a)(e_j)\|_F \leq |||\,\mathrm{d}f_x - \mathrm{d}f_a|||.\underbrace{\|e_1\|_1}_{=1} \xrightarrow[x\to a]{} 0.$$

ii) $\Rightarrow$ i) On suppose que, pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ est bien définie et continue sur U.

Dans la suite, pour $h = \sum_{j=1}^{p} h_j e_j \in E$ et $k \in [\![0,p]\!]$, on note $h_{\leq k} = \sum_{j=1}^{k} h_j e_j$ (avec la convention $h_{\leq 0} = 0_E$).
Soit $a \in U$. Montrons dans un premier temps que f est différentiable en a.
Comme U est un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset U$ où $B(a,r)$ désigne la boule ouverte de centre a et de rayon r pour la norme $\|\cdot\|_1$.
Soit $h = \sum_{j=1}^{p} h_j e_j \in E$ tel que $\|h\|_1 < r$. Alors, pour tout $k \in [\![0,p]\!]$, on a :

$$\|h_{\leq k}\|_1 = \sum_{j=1}^{k-1} |h_j| \leq \sum_{j=1}^{p} |h_j| = \|h\|_1 < r;$$

d'où $a + h_{\leq k} \in B(a,r)$ et donc $a + h_{\leq k} \in U$.

Ainsi, pour $h = \sum_{j=1}^{p} h_j e_j \in E$ avec $\|h\|_1 < r$ et pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, comme $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ est définie sur U, par définition de la k-ième dérivée partielle dans la base $\mathcal{B}$, f est dérivable en $a + h_{\leq k-1} \in U$ suivant le vecteur e_k, d'où, en utilisant la définition-proposition 3, quand $h \to 0_E$ (et donc $h_k \to 0$) :

$$\begin{aligned} f(a+h_{\leq k}) &= f(a + h_{\leq k-1} + h_k e_k) \\ &= f(a+h_{\leq k-1}) + h_k.D_{e_k}(a+h_{\leq k-1}) + \underbrace{o(h_k)}_{=o(\|h\|_1)} \\ f(a+h_{\leq k}) &= f(a+h_{\leq k-1}) + h_k.\frac{\partial f}{\partial x_k}(a+h_{\leq k-1}) + \underset{h\to 0_E}{o}(\|h\|_1); \end{aligned}$$

or, comme $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ est continue en $a \in U$, on a $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a+h_{\leq k-1}) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) + \underset{h\to 0_E}{o}(1)$ car si $h \to 0_E$ alors $h_{\leq k} \to 0_E$; et donc :

$$f(a+h_{\leq k}) - f(a+h_{\leq k-1}) = h_k.\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) + \underbrace{\underset{h\to 0_E}{o}(h_k) + \underset{h\to 0_E}{o}(\|h\|_1)}_{=\underset{h\to 0_E}{o}(\|h\|_1)}.$$

Par suite, on a :

$$\begin{aligned}
f(a+h)-f(a) &= f(a+h_{\leq p})-f(a+h_{\leq 0}) \\
&= \sum_{k=1}^{p}\left(f(a+h_{\leq k})-f(a+h_{\leq k-1})\right) \\
&= \sum_{k=1}^{p}\left(h_k.\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)+o(\|h\|_1)\right) \\
f(a+h)-f(a) &= \sum_{k=1}^{p} h_k.\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)+o(\|h\|_1).
\end{aligned}$$

L'application $h \mapsto \sum_{k=1}^{p} h_k.\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ étant linéaire, il en résulte que f est différentiable en a.

Il reste à montrer que $\mathrm{d}f : a \mapsto \sum_{j=1}^{p} \mathrm{d}x_j.\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ est continue en sur U.

Soit $a \in U$. Pour $x \in U$ et pour tout $h = \sum_{j=1}^{p} h_j e_j \in E$, on a, par inégalité triangulaire :

$$\|\mathrm{d}f_x(h)-\mathrm{d}f_a(h)\|_F \leq \sum_{j=1}^{p}|h_j|.\left\|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)-\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\right\|_F \leq \max_{1\leq i\leq p}\left(\left\|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right\|_F\right).\|h\|_1;$$

donc, par continuité en a des dérivées partielles de f dans la base canonique, on obtient :

$$|||\mathrm{d}f_x-\mathrm{d}f_a||| \leq \max_{1\leq i\leq p}\underbrace{\left(\left\|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right\|_F\right)}_{\xrightarrow[x\to a]{}0} \xrightarrow[x\to a]{} 0.$$

Par suite, $\mathrm{d}f$ est continue en a, et ce, pour tout $a \in U$, donc $\mathrm{d}f$ est continue sur U.
Il en résulte que f est de classe C^1 sur U. □

Ce théorème permet par exemple de montrer qu'une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie "par morceaux" est de classe C^1 ou non :

Exemple 13.

— La fonction $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

— La fonction $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ mais pas sur $\mathbb{R}^2$.

— La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On a, pour $t \in \mathbb{R}^*$:

$$\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0 \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \text{ et } \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0 \xrightarrow[t\to 0]{} 0.$$

Donc f admet des dérivées partielles en $(0,0)$ suivant la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

De plus, on a, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2};$$

Ainsi, les applications $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas. Or, on a, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| &= \frac{2|x|y^4}{(x^2+y^2)^2} \\
&\leq \frac{2\|(x,y)\|_2^5}{\|(x,y)\|_2^4} \\
\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| &\leq 2\|(x,y)\|_2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0
\end{aligned}$$

et, par un calcul analogue, on trouve $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$.
Par suite, les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont bien définies sur $\mathbb{R}^2$ et continues sur $\mathbb{R}^2$ donc, d'après le théorème fondamental du calcul différentiel, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
En particulier, f est différentiable en $(0,0)$ et

$$\mathrm{d}f_{(0,0)} = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).\,\mathrm{d}y = \mathbf{0}.$$

— La fonction g est continue sur $\mathbb{R}^2$ car, sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, g est quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas et en $(0,0)$, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$|g(x,y) - g(0,0)| \leq \|(x,y)\|_2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0.$$

De plus g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On a, pour $t \in \mathbb{R}^*$:

$$\frac{g(t,0)-g(0,0)}{t} = 0 \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \text{ et } \frac{g(0,t)-g(0,0)}{t} = 0 \xrightarrow[t\to 0]{} 0.$$

Donc g admet des dérivées partielles en $(0,0)$ suivant la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et on a :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = 0 \text{ et } \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 0.$$

De plus, on a, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} \text{ et } \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2(x^2+y^2-2y)}{(x^2+y^2)^2};$$

or, pour $u_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (0,0)$, on remarque que :

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(u_n) - \frac{\partial g}{\partial x}(0,0)\right| = \frac{\frac{2}{n^4}}{\frac{4}{n^4}} = \frac{1}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2} \neq 0 = \frac{\partial g}{\partial x}(0,0).$$

Donc l'application $\frac{\partial g}{\partial x}$, qui est pourtant bien définie sur $\mathbb{R}^2$, n'est pas continue en $(0,0)$ et donc a fortiori sur $\mathbb{R}^2$. Ainsi, d'après le théorème fondamental du calcul différentiel, g n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 19.

1. Déterminer si les fonctions suivantes sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$:

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{y^4}{x^2+2y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad g : (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans l'affirmative, donner une expression de leur différentielle en tout point de $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que la fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$ admet un prolongement C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Correction.

1. (a) La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$. On a, pour $t \in \mathbb{R}^*$:

$$\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0 \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \text{ et } \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \frac{t}{2} \xrightarrow[t\to 0]{} 0.$$

Donc f admet des dérivées partielles en $(0,0)$ suivant la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

De plus, on a, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-2xy^4}{(x^2+2y^2)^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{4y^3}{x^2+2y^2};$$

Ainsi, les applications $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas. Or, on a, pour $(x,y) \in$

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, comme $x^2+2y^2 \geq \|(x,y)\|_2^2$:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| &= \frac{2|x|y^4}{(x^2+2y^2)^2} \\
&\leq \frac{2\|(x,y)\|_2^5}{\|(x,y)\|_2^4} \\
\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| &\leq 2\|(x,y)\|_2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right| &= \frac{4|y|^3}{x^2+2y^2} \\
&\leq \frac{4\|(x,y)\|_2^3}{\|(x,y)\|_2^2} \\
\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right| &\leq 4\|(x,y)\|_2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0.
\end{aligned}$$

Par suite, les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont bien définies sur $\mathbb{R}^2$ et continues sur $\mathbb{R}^2$ donc, d'après le théorème fondamental du calcul différentiel, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

En particulier, f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\mathrm{d}f_{(x,y)} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y).\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).\,\mathrm{d}y.$$

d'où :

$$\mathrm{d}f_{(x,y)} = 2y^3\,((-xy)\,\mathrm{d}x + 4\,\mathrm{d}y)$$

(ce qui vaut aussi pour $(x,y) = (0,0)$!).

(b) La fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On a, pour $t \in \mathbb{R}^*$:

$$\frac{g(t,0)-g(0,0)}{t} = 0 \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \text{ et } \frac{g(0,t)-g(0,0)}{t} = 0 \xrightarrow[t\to 0]{} 0.$$

Donc g admet des dérivées partielles en $(0,0)$ suivant la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et on a :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = 0 \text{ et } \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 0.$$

De plus, on a, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{x^2(x-y)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ et } \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{y^2(y-x)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}};$$

or, pour $u_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{2n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (0,0)$, on remarque que :

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(u_n) - \frac{\partial g}{\partial x}(0,0)\right| = \frac{\frac{1}{2n^3}}{\frac{5\sqrt{5}}{8n^3}} = \frac{4}{5\sqrt{5}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{4}{5\sqrt{5}} \neq 0 = \frac{\partial g}{\partial x}(0,0).$$

Donc l'application $\frac{\partial g}{\partial x}$, qui est pourtant bien définie sur $\mathbb{R}^2$, n'est pas continue en $(0,0)$ et donc a fortiori sur $\mathbb{R}^2$. Ainsi, d'après le théorème fondamental du calcul différentiel, g n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

2. En considérant la suite de terme général $u_n = (\frac{1}{n}, 0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (0,0)$, on obtient :

$$f(u_n) = \frac{\frac{2}{n^4}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On tente alors de prolonger la fonction f en $(0,0)$ par $f(0,0) = 0$. Notons de nouveau f la fonction ainsi prolongée. Montrons tout d'abord que celle-ci est bien continue sur $\mathbb{R}^2$.
Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, f est quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas et en $(0,0)$, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$|f(x,y) - f(0,0)| \leq \frac{2\|(x,y)\|_2^4}{\|(x,y)\|_2^2} = 2\|(x,y)\|_2^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0.$$

Donc, ainsi prolongée, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
De plus, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On a, pour $t \in \mathbb{R}^*$:

$$\frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = t \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \text{ et } \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = t \xrightarrow[t\to 0]{} 0.$$

Donc f admet des dérivées partielles en $(0,0)$ suivant la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

De plus, on a, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x(2y^4 + x^2y^2 - x^4)}{(x^2+2y^2)^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y(2x^4 + x^2y^2 - y^4)}{(x^2+2y^2)^2};$$

Ainsi, les applications $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas. Or, on a, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| &= \frac{|x|(2y^4 + x^2y^2 - x^4)}{(x^2+2y^2)^2} \\
&\leq \frac{4\|(x,y)\|_2^5}{\|(x,y)\|_2^4} \\
\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| &\leq 4\|(x,y)\|_2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0
\end{aligned}$$

et, par un calcul analogue, on trouve $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0.$
Par suite, les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont bien définies sur $\mathbb{R}^2$ et continues sur $\mathbb{R}^2$ donc, d'après le théorème fondamental du calcul différentiel, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
Il en résulte que f admet un prolongement C^1 sur $\mathbb{R}^2$ avec $f(0,0) = 0$.

Exercice 20.

La fonction de l'exemple introductif $s : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Correction.

On a vu, dans l'exemple 2, que s est continue sur $\mathbb{R}^2$. Elle est de plus de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme quotient de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Reste à voir ce qui se passe autour de $(0,0)$.
On a, pour $t \in \mathbb{R}^*$:

$$\frac{s(t,0)-s(0,0)}{t} = \frac{\sin(|t|)-|t|}{t|t|} = -\frac{t}{6} + o(t^2) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

et de même $\frac{s(0,t)-s(0,0)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$.
Donc s admet des dérivées partielles en $(0,0)$ suivant la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et on a :

$$\frac{\partial s}{\partial x}(0,0) = 0 \text{ et } \frac{\partial s}{\partial y}(0,0) = 0.$$

De plus, on a, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et en posant $r = \|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$:

$$\frac{\partial s}{\partial x}(x,y) = \frac{2x(\sin(r) - r\cos(r))}{r^3} \text{ et } \frac{\partial s}{\partial y}(x,y) = \frac{2y(\sin(r) - r\cos(r))}{r^3};$$

Quand $(x,y) \to (0,0)$, ce qui équivaut à $r \to 0$, on a $\sin(r) - r\cos(r) = \frac{2r^3}{3} + o(r^4)$, donc :

$$\frac{\partial s}{\partial x}(x,y) = 2x(\frac{2}{3} + o(r)) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 = \frac{\partial s}{\partial x}(0,0)$$

car $x \to 0$ quand $(x,y) \to (0,0)$; et par un calcul analogue, on trouve : $\frac{\partial s}{\partial y}(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} \frac{\partial s}{\partial y}(0,0)$.
Par suite, les dérivées partielles $\frac{\partial s}{\partial x}$ et $\frac{\partial s}{\partial y}$ sont bien définies sur $\mathbb{R}^2$ et continues sur $\mathbb{R}^2$ donc, d'après le théorème fondamental du calcul différentiel, s est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition 21.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. Pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, l'application de dérivation partielle $\dfrac{\partial}{\partial x_j} : f \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ est linéaire de $C^1(U,F)$ dans $C(U,F)$.

Démonstration.

Soit $j \in [\![1, p]\!]$.
Tout d'abord, d'après le théorème fondamental du calcul différentiel (Théorème 2), pour tout $f \in C^1(U, F)$, on a $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in C(U, F)$ donc l'application $\frac{\partial}{\partial x_j}$ est bien définie sur l'espace vectoriel $C^1(U, F)$ et est à valeurs dans $C(U, F)$.
De plus, d'après le corollaire 3, l'application $\frac{\partial}{\partial x_j}$ est linéaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{D}(U, F)$ donc sa restriction au sous-espace vectoriel $C^1(U, F)$ l'est aussi. □

5. Fonctions de classe C^k

a. Dérivées partielles successives

Définition 12.

Soit $f : U \to F$, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E, $k \in \mathbb{N}^*$ et $j_1, ..., j_k \in [\![1, p]\!]$.
Sous réserve d'existence, on appelle **dérivée partielle de f d'ordre k dans la base $\mathcal{B}$ selon les indices** $(j_1, ..., j_k)$ et on note :

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} ... \partial x_{j_k}} = \frac{\partial}{\partial x_{j_1}}\left(... \left(\frac{\partial f}{\partial x_{j_k}} \right) ... \right).$$

On dit que f **admet des dérivées partielles d'ordre k dans la base $\mathcal{B}$** si, pour tout k-uplet de $[\![1, p]\!]^k$, la dérivée partielle de f d'ordre k dans la base $\mathcal{B}$ selon ce k-uplet existe.

Remarque 5.

Si plusieurs dérivées partielles se font m fois à la suite par le même indice j_i, on écrira $\partial x_{j_i}^m$ l'expression $\underbrace{\partial x_{j_i} ... \partial x_{j_i}}_{m \text{ termes}}$ au dénominateur de la dérivée partielle. Par exemple :

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial y}$$

Exercice 21.

Justifier l'existence et calculer les dérivées partielles secondes (i.e. d'ordre 2) dans la base canonique de $f : (x, y) \mapsto (x^2 y, e^{xy+1})$.

Correction.

— L'application composante f_1 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale et on a :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} : (x, y) \mapsto 2xy \text{ et } \frac{\partial f_1}{\partial y} : (x, y) \mapsto x^2$$

— L'application composante f_2 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car composée de l'exponentielle qui est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et d'une fonction polynomiale ; et on a :

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} : (x,y) \mapsto ye^{xy+1} \text{ et } \frac{\partial f_2}{\partial y} : (x,y) \mapsto xe^{xy+1}$$

Par suite, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ d'après la proposition 8, et on a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (2xy, ye^{xy+1}) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x^2, xe^{xy+1})$$

Par des arguments similaires aux précédents, les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, et donc les dérivées partielles dans la base canonique de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent (et sont continues) d'après le théorème fondamental du calcul différentiel (Théorème 2). Par suite, les dérivées partielles de f d'ordre 2 existent, et on a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

- ⋆ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = (2y, y^2 e^{xy+1})$;
- ⋆ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = (2x, (1+xy)e^{xy+1})$;
- ⋆ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = (2x, (1+xy)e^{xy+1})$;
- ⋆ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = (0, x^2 e^{xy+1})$.

b. Fonction de classes C^k

Définition 13.

Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $f : U \to F$.

- — Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on dit que f est de **classe C^k sur** U si les fonctions dérivées partielles de f d'ordre k dans la base $\mathcal{B}$ sont bien définies et continues sur U, et on note $C^k(U,F)$ l'ensemble des fonctions de U dans F de classe C^k sur U.
- — Si f est de classe C^k sur U pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on dit que f est de **classe C^∞ sur** U, et on note $C^\infty(U,F)$ l'ensemble des fonctions de U dans F de classe C^∞ sur U.

Remarque 6.

- — Pour $k = 0$, on adopte la convention $C^0(U,F) = C(U,F)$.
- — On remarque que, pour $k = 1$, cette définition de fonction de classe C^1 en terme de dérivées partielles est équivalente à celle formulée précédemment en terme de différentielle d'après le théorème fondamental du calcul différentiel !
- — Attention, a priori, la définition dépend de la base de E choisie pour les dérivations partielles : on verra dans la suite qu'il n'en est rien.

Proposition 22.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E. On a :

$$C^\infty(U,F) \subset C^{k+1}(U,F) \subset C^k(U,F) \subset C^1(U,F) \subset C(U,F).$$

Démonstration.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E et $f \in C^{k+1}(U,F)$. Comme les dérivées partielles d'ordre $k+1$ de f existent, alors ses dérivées partielles d'ordre k existent.
De plus, comme $f \in C^{k+1}(U,F)$, pour tout $(j_1, ..., j_k) \in [\![1,p]\!]^k$, les dérivées partielles (d'ordre 1) de la fonction $\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} ... \partial x_{j_k}}$ existent et sont continues sur U donc, d'après le théorème fondamental du calcul différentiel (Théorème 2), $\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} ... \partial x_{j_k}}$ est de classe C^1 sur U et ainsi, en particulier, différentiable sur U, donc continue sur U d'après la proposition 3. D'où $f \in C^k(U,F)$.
Il en résulte que $C^{k+1}(U,F) \subset C^k(U,F)$.

En raisonnant par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ avec l'inclusion précédente, on obtient que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $C^k(U,F) \subset C^1(U,F)$ et, comme, d'après la remarque 6, $C^1(U,F)$ est l'ensemble des fonctions différentiables sur U de différentielle continues ; d'après la proposition 3, $C^1(U,F) \subset C(U,F)$.

Pour finir, on remarque que $C^\infty(U,F) = \bigcap_{m \in N^*} C^m(U,F)$ donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $C^\infty(U,F) \subset C^{k+1}(U,F)$. $\square$

Proposition 23.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E. Pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, l'application $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ est bien définie sur $C^k(U,F)$ et à valeurs dans $C^{k-1}(U,F)$.

Démonstration.

Soit $j \in [\![1,p]\!]$. D'après la proposition 22, on a $C^k(U,F) \subset C^1(U,F)$; or, d'après la proposition 21, $\frac{\partial}{\partial x_j}$ est bien définie sur $C^1(U,F)$ donc elle est bien définie sur $C^k(U,F)$. Or, pour $f \in C^k(U,F)$, comme, par définition les dérivées partielles d'ordre k de f dans la base $\mathcal{B}$ existent et sont continues sur U, les dérivées partielles d'ordre $k-1$ de $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ dans la base $\mathcal{B}$ existent (on convient qu'appliquer une dérivée partielle d'ordre 0 revient à appliquer l'identité) et sont continues sur U, d'où $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in C^{k-1}(U,F)$. Par suite, l'image de $\frac{\partial}{\partial x_j}$ restreinte à $C^k(U,F)$ est incluse dans $C^{k-1}(U,F)$. $\square$

Corollaire 9.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E. Pour tout $m \in [\![1,k]\!]$ et tout $(j_1, ..., j_m) \in [\![1,p]\!]^m$, l'application $\dfrac{\partial^m}{\partial x_{j_1} ... \partial x_{j_m}}$ est bien définie sur $C^k(U,F)$ et à valeurs dans $C^{k-m}(U,F)$.

Correction.

On raisonne par récurrence finie à partir de la proposition précédente.

Exemple 14.

— Soit $f : U \to F$. Si f est constante sur U, alors f est de classe C^∞ sur U.
— Soit $L : E \to F$. Si $L \in \mathcal{L}(E, F)$, alors L est de classe C^∞ sur E.
— Les applications coordonnées dans une base sont de classe C^∞ sur E.

— Si f est constante sur U, ses dérivées partielles d'ordre 1 dans n'importe quelle base de E sont égale à l'application nulle $\mathbf{0} : U \to F$ qui est continue sur U et est elle-même constante sur U et donc, de proche en proche, f est de class C^k sur U pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
— Si $L \in \mathcal{L}(E, F)$, d'après le corollaire 1, L admet des dérivées partielles d'ordre 1 qui sont constantes sur E et donc, d'après l'exemple précédent, qui sont de classe C^k sur U, pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi, L est de classe C^{k+1} sur U pour tout $k \in \mathbb{N}$ et donc $L \in C^\infty(U, F)$.

c. Opérations sur les fonctions de classe C^k

Théorème 3.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble $C^k(U, F)$, muni de ses opérations usuelles, est un espace vectoriel (si $F = \mathbb{R}$, une algèbre) et est indépendant de la base de E choisie pour les dérivations partielles.
De plus, pour $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E et pour tout $(j_1, ..., j_k) \in [\![1, p]\!]^k$, l'application $\dfrac{\partial^k}{\partial x_{j_1} ... \partial x_{j_k}} : f \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} ... \partial x_{j_k}}$ est linéaire de $C^k(U, F)$ dans $C(U, F)$.

Démonstration.

Pour $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E et $k \in \mathbb{N}^*$, on écrira $C^k_{\mathcal{B}}(U, F)$ pour l'ensemble des fonctions de U dans F de classe C^k sur U puisque la définition dépend, a priori, de la base $\mathcal{B}$ pour les dérivations partielles.

Montrons, par récurrence sur $\mathbb{N}^*$ que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}_k$ ="Pour toute base $\mathcal{B}$ de E, $C^k_{\mathcal{B}}(U, F)$ est une espace vectoriel (si $F = \mathbb{R}$, une algèbre) ; pour tout $(j_1, ..., j_k) \in [\![1, p]\!]^k$, l'application $\dfrac{\partial^k}{\partial x_{j_1} ... \partial x_{j_k}}$ est linéaire de $C^k_{\mathcal{B}}(U, F)$ dans $C(U, F)$; et, pour toute base $\mathcal{B}'$ de E, $C^k_{\mathcal{B}}(U, F) = C^k_{\mathcal{B}'}(U, F)$." est vraie.

- **Initialisation.** D'après le théorème fondamental du calcul différentiel (Théorème 2), pour toute base $\mathcal{B}$ de E, $C^1_{\mathcal{B}}(U, F)$ (définition avec les dérivations partielles dans la base $\mathcal{B}$) est égal à $C^1(U, F)$ (définition avec la différentielle) donc $C^1_{\mathcal{B}}(U, F)$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$.
  De plus, d'après la proposition 17 et la question 1, $C^1(U, F)$ est un espace vectoriel, si $F = \mathbb{R}$ une algèbre ; et, d'après la proposition 21, pour $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, $\frac{\partial}{\partial x_j}$ est une application linéaire de $C^1(U, F)$ dans $C(U, F)$.
  Par suite, $\mathcal{P}_1$ est vraie.

- **<u>Hérédité.</u>** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose la propriété $\mathcal{P}_k$ vraie.

  Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E.

  — *Espace vectoriel et linéarité.* Montrons que $C_{\mathcal{B}}^{k+1}(U, F)$ est un espace vectoriel et, pour tout $(j_1, ..., j_{k+1}) \in [\![1, p]\!]^{k+1}$, la linéarité de l'application $\frac{\partial^{k+1}}{\partial x_{j_1} ... \partial x_{j_{k+1}}}$.

  La fonction nulle est de classe C^{k+1} sur U car ses dérivées partielles existent et sont continues sur U : elles sont nulles.

  Soit $f, g \in C_{\mathcal{B}}^{k+1}(U, F)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

  Soit $j \in [\![1, p]\!]$. D'après la proposition 22, on a $C_{\mathcal{B}}^{k+1}(U, F) \subset C^1(U, F)$ et, d'après la proposition 21, $\frac{\partial}{\partial x_j} : C^1(U, F) \to C(U, F)$ est linéaire, donc $\frac{\partial}{\partial x_j}(\lambda f + \mu g) = \lambda \frac{\partial}{\partial x_j} f + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} g$.

  De plus, d'après la proposition 23, $\frac{\partial}{\partial x_j} f$ et $\frac{\partial}{\partial x_j} g$ appartiennent à $C_{\mathcal{B}}^k(U, F)$ qui est un espace vectoriel par hypothèse de récurrence, donc $\frac{\partial}{\partial x_j}(\lambda f + \mu g)$ appartient à $C_{\mathcal{B}}^k(U, F)$.

  Par suite, pour tout $(j_1, ..., j_{k+1}) \in [\![1, p]\!]^{k+1}$, $\dfrac{\partial^{k+1}(\lambda f + \mu g)}{\partial x_{j_1} ... \partial x_{j_{k+1}}} = \dfrac{\partial^k}{\partial x_{j_1} ... \partial x_{j_k}} \left(\dfrac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial x_{j_{k+1}}} \right)$ existe et est continue sur U ; donc, $\lambda f + \mu g \in C_{\mathcal{B}}^{k+1}(U, F)$.

  Ainsi, $C_{\mathcal{B}}^{k+1}(U, F)$ est un espace vectoriel comme sous-espace vectoriel de $C_{\mathcal{B}}^k(U, F)$.

  De plus, par hypothèse de récurrence, $\frac{\partial^k}{\partial x_{j_1} ... \partial x_{j_k}} : C_{\mathcal{B}}^k(U, F) \to C(U, F)$ est linéaire, donc :

  $$\frac{\partial^{k+1}}{\partial x_{j_1} ... \partial x_{j_{k+1}}} = \frac{\partial^k}{\partial x_{j_1} ... \partial x_{j_k}} \circ \frac{\partial}{\partial x_{j_{k+1}}}$$

  est une application linéaire de $C_{\mathcal{B}}^{k+1}(U, F)$ dans $C(U, F)$ comme composée d'applications linéaires.

  — *Algèbre.* Montrons maintenant que, si $F = \mathbb{R}$, $C^{k+1}(U, F)$ est une algèbre. On a déjà montré que $C_{\mathcal{B}}^{k+1}(U, F)$ est un sous-espace vectoriel de $C_{\mathcal{B}}^k(U, F)$; la fonction constante en 1 est de classe C^{k+1} sur U car ses dérivées partielles d'ordre supérieur à 1 existent et sont continues sur U : elles sont nulles. Puis, pour $f, g \in C_{\mathcal{B}}^{k+1}(U, F) \subset C^1(U, F)$, comme $C^1(U, F)$ est une algèbre, $fg \in C^1(U, F)$, d'où, d'après le corollaire 5, on a, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$:

  $$\frac{\partial(fg)}{\partial x_j} = g . \frac{\partial f}{\partial x_j} + f . \frac{\partial g}{\partial x_j},$$

  or, on a $f, g \in C_{\mathcal{B}}^{k+1}(U, F) \subset C_{\mathcal{B}}^k(U, F)$ et $\frac{\partial f}{\partial x_j}, \frac{\partial g}{\partial x_j} \in C_{\mathcal{B}}^k(U, F)$; et, par hypothèse de récurrence, $C_{\mathcal{B}}^k(U, F)$ est une algèbre, on a $\frac{\partial(fg)}{\partial x_j} \in C_{\mathcal{B}}^k(U, F)$. Par suite, les dérivées partielles d'ordres $k+1$ dans la base $\mathcal{B}$ de fg existent et sont continues, d'où $fg \in C_{\mathcal{B}}^{k+1}(U, F)$.

  Il en résulte que $C_{\mathcal{B}}^{k+1}(U, F)$ est une sous-algèbre de $C_{\mathcal{B}}^k(U, F)$ et donc une algèbre.

  — *Indépendance de la base.* Il reste à montrer que, pour toute base $\mathcal{B}'$ de E, $C_{\mathcal{B}}^{k+1}(U, F) = C_{\mathcal{B}'}^{k+1}(U, F)$. Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_p)$ une base de E. On notera $\frac{\partial}{\partial x'_j}$ la dérivation partielle par rapport au j-ième vecteur de la base $\mathcal{B}'$.

  Soit $f \in C_{\mathcal{B}}^{k+1}(U, F)$. Comme $C_{\mathcal{B}}^{k+1}(U, F) \subset C^1(U, F)$, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, la j-ième dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x'_j}$ de f dans la base $\mathcal{B}'$ est bien définie sur U ; et, d'après la proposition 10, on a, pour $(p_{i,j})_{1\leq i,j\leq p}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$:

$$\frac{\partial f}{\partial x'_j} = \sum_{i=1}^{p} p_{i,j}\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Or, d'après la proposition 23, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^k_{\mathcal{B}}(U,F)$ qui, par hypothèse de réccurence, est un espace vectoriel ; donc $\frac{\partial f}{\partial x'_j} \in C^k_{\mathcal{B}}(U,F)$.
De plus, toujours par hypothèse de récurrence, on a $C^k_{\mathcal{B}}(U,F) = C^k_{\mathcal{B}'}(U,F)$, donc, pour tout $(j_1,...,j_{k+1}) \in [\![1,p]\!]^{k+1}$, la fonction $\frac{\partial f}{\partial x'_{j_{k+1}}}$ appartient à $C^k_{\mathcal{B}'}(U,F)$ et ainsi ses dérivées partielles d'ordre k selon les indices $(j_1,...,j_k)$ dans la base $\mathcal{B}'$ existent et sont continues sur U ; par suite, les dérivées partielles de f d'ordre $k+1$ selon les indices $(j_1,...,j_{k+1})$ dans la base $\mathcal{B}'$ existent et sont continues sur U i.e. $f \in C^{k+1}_{\mathcal{B}'}(U,F)$. Ainsi, $C^{k+1}_{\mathcal{B}}(U,F) \subset C^{k+1}_{\mathcal{B}'}(U,F)$. Puis, en échangeant $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ dans le raisonnement précédent, on obtient $C^{k+1}_{\mathcal{B}'}(U,F) \subset C^{k+1}_{\mathcal{B}}(U,F)$.
Il en résulte que $C^{k+1}_{\mathcal{B}}(U,F) = C^{k+1}_{\mathcal{B}'}(U,F)$.

Ce qui achève le raisonnement par récurrence : par suite, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}_k$ est vraie. $\square$

Corollaire 10.

L'ensemble $C^\infty(U,F)$, muni de ses opérations usuelles, est un espace vectoriel (si $F = \mathbb{R}$, une algèbre).

Démonstration.

On a $C^\infty(U,F) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} C^k(U,F)$ donc $C^\infty(U,F)$ est un sous-espace vectoriel (resp. si $F = \mathbb{R}$, une sous-algèbre) de $\mathcal{F}(U,F)$ comme intersection de sous-espaces vectoriels (resp. sous-algèbre) de $\mathcal{F}(U,F)$ (Théorème 3). $\square$

Proposition 24.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $L \in \mathcal{L}(F,G)$ et $f : U \to F$.
Si f est de classe C^k sur U, alors $L\circ f$ est de classe C^k sur U et, pour toute base $\mathcal{B} = (e_1,...,e_p)$ de E et pour tout $(j_1,...,j_k) \in [\![1,p]\!]^k$, on a :

$$\frac{\partial^k (L\circ f)}{\partial x_{j_1}...\partial x_{j_k}} = L \circ \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1}...\partial x_{j_k}}.$$

Démonstration.

Soit $\mathcal{B} = (e_1,...,e_p)$ une base de E. On suppose $f \in C^k(U,F)$. Alors, en particulier, $f \in C^1(U,F)$ (Proposition 22, donc, d'après l'exemple 10, $L\circ f$ est différentiable sur U et, pour tout $j \in [\![1,p]\!]$,

on a :
$$\frac{\partial(L\circ f)}{\partial x_j}=L\circ\frac{\partial f}{\partial x_j}$$
qui est continue sur U comme composée d'applications continues.
Comme $\frac{\partial(L\circ f)}{\partial x_j}=L\circ g$ avec g de classe C^{k-1} sur U, on peut appliquer de nouveau le raisonnement précédent et, ainsi, de proche en proche, on obtient que $L\circ f$ est de classe C^k sur U et, pour tout $(j_1,\dots,j_k)\in[\![1,p]\!]^k$, on a :
$$\frac{\partial^k(L\circ f)}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_k}}=L\circ\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_k}}.$$
$\square$

Proposition 25. *Applications composantes d'une fonction de classe C^k*

Soit $k\in\mathbb{N}^*$, $f:U\to F$, $\mathcal{C}=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_q)$ et $f_1,\dots,f_q$ les applications composantes de f dans la base $\mathcal{C}$.
La fonction f est de classe C^k sur U si, et seulement si, pour tout $i\in[\![1,q]\!]$, f_i est de classe C^k sur U.
Dans ce cas, on a, pour $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_p)$ une base de E et $(j_1,\dots,j_k)\in[\![1,p]\!]^k$:
$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_k}}=\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial^k f_i}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_k}}\varepsilon_i.$$

Démonstration.

($\Rightarrow$) On suppose f de classe C^k sur U. Pour tout $i\in[\![1,q]\!]$, on a $f_i=\pi_i\circ f$ où $\pi_i:F\to\mathbb{R}$ est l'application linéaire qui, à une vecteur de F associe sa i-ème corrdonnée dans la base $\mathcal{C}$; par suite, d'après la proposition 24, f_i est de classe C^k sur U.

($\Leftarrow$) On suppose que, pour tout $i\in[\![1,q]\!]$, f_i est de classe C^k sur U. On a :
$$f=\sum_{i=1}^{q}f_i\varepsilon_i=\sum_{i=1}^{q}r_i\circ f_i$$
où, pour $i\in[\![1,q]\!]$, $r_i\in\mathcal{L}(\mathbb{R},F)$ est l'application $x\mapsto x\varepsilon_i$.
Or, pour tout $i\in[\![1,q]\!]$, comme r_i est linéaire, d'après la proposition 24, $r_i\circ f_i$ est de classe C^k sur U donc f est de classe C^k sur U comme combinaison linéaire d'applications de classe C^k sur U car $C^k(U,F)$ est un espace vectoriel (Théorème 3).
De plus, toujours d'après proposition 24, pour toute base $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_p)$ de E et tout

$(j_1, ..., j_k) \in [\![1, p]\!]^k$, par linéarité de $\frac{\partial^k}{\partial x_{j_1} ... \partial x_{j_k}}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} ... \partial x_{j_k}} &= \frac{\partial^k}{\partial x_{j_1} ... \partial x_{j_k}} \left(\sum_{i=1}^{q} r_i \circ f_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial^k (r_i \circ f_i)}{\partial x_{j_1} ... \partial x_{j_k}} \\
&= \sum_{i=1}^{q} r_i \circ \frac{\partial^k f_i}{\partial x_{j_1} ... \partial x_{j_k}} \\
\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} ... \partial x_{j_k}} &= \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^k f_i}{\partial x_{j_1} ... \partial x_{j_k}} \varepsilon_i.
\end{aligned}$$

□

Proposition 26. *Opérations sur les fonctions de classe C^k*

Soit $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$.

— Les combinaisons linéaires ;
— les produits de fonctions à valeurs réelles avec des fonctions à valeurs dans F ;
— les composées

de fonctions de classe C^k sont de classe C^k.

Démonstration.

— Comme $C^k(U, F)$ est un espace vectoriel d'après le théorème 3, il est stable par combinaison linéaire.

— Comme $C^k(U, \mathbb{R})$ est une algèbre d'après le théorème 3, elle est stable par produit. Ainsi, pour $\varphi \in C^k(U, \mathbb{R})$ et $f \in C^k(U, \mathbb{R})$, d'après la proposition 25, les composantes $f_1, ..., f_q$ de f dans une base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_q)$ appartiennent à $C^k(U, \mathbb{R})$ et donc, toujours d'après la proposition 25, on a :

$$\varphi.f = \sum_{i=1}^{q} \underbrace{(\varphi.f_i)}_{\in C^k(U,\mathbb{R})} \varepsilon_i \in C^k(U, F).$$

— Montrons, par récurrence sur $\mathbb{N}^*$, que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}_k$ ="Pour tout $f \in C^k(U, F)$ et tout $g \in C^k(V, G)$ avec $f(U) \subset V$, $g \circ f \in C^k(U, G)$" est vraie.

- **Initialisation.** La propriété $\mathcal{P}_1$ est vraie d'après le proposition 19 (du fait de l'équivalence des définitions de C^1 via le théorème fondamental du calcul différentiel).

- **Hérédité.** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{P}_k$ vraie. Comme, d'après la proposition 22, $C^{k+1}(U, F) \subset C^1(U, F)$ et $C^{k+1}(V, G) \subset C^1(V, G)$, d'après la proposition 19, $g \circ f \in C^1(U, G)$.
  Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_q)$ une base de F. On écrira $\frac{\partial}{\partial x_j}$ les dérivations partielles dans la base $\mathcal{B}$ et $\frac{\partial f}{\partial y_j}$ celles dans la base $\mathcal{C}$.

D'après le corollaire 7, pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, on a :

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} . \frac{\partial g}{\partial y_i} \circ f,$$

où $f_1, \dots, f_q$ sont les applications composantes de f. Or, pour tout $i \in [\![1,q]\!]$, d'après la proposition 23, $\frac{\partial g}{\partial y_i} \in C^k(U,G)$ et, d'après la proposition 22, $f \in C^k(U,F)$ donc, par hypothèse de récurence, $\frac{\partial g}{\partial y_i} \circ f$ appartient à $C^k(U,G)$.
De plus, pour tout $i,j \in [\![1,q]\!] \times [\![1,p]\!]$, comme $f \in C^{k+1}(U,F)$, on a, d'après la proposition 25, $f_i \in C^{k+1}(U,\mathbb{R})$ et donc, d'après la proposition 23, $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \in C^k(U,\mathbb{R})$; d'où, d'après le point précédent sur les produits d'applications de classe C^k, $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} . \frac{\partial g}{\partial y_i} \circ f \in C^k(U,G)$. Par suite, par stabilité de $C^k(U,G)$ par combinaison linéaire, pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, $\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_j} \in C^k(U,G)$.
Il en résulte que, pour tout $(j_1, \dots, j_{k+1}) \in [\![1,p]\!]^{k+1}$, comme $\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_{j_{k+1}}}$ admet des dérivées partielles d'ordre k selon les indices $(j_1, \dots, j_k)$ qui sont continues sur U, alors $g \circ f$ admet des dérivées partielles d'ordre $k+1$ selon les indices $(j_1, \dots, j_{k+1})$ qui sont continues sur U i.e. $g \circ f \in C^k(U,G)$. Et donc la propriété $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

Ce qui achève le raisonnement par récurrence : par suite, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}_k$ est vraie.

□

Proposition 27. *Applications polynomiales*

Les applications polynomiales sur E sont de classe C^∞ sur E.

Démonstration.

Les applications polynomiales sont des combinaisons linéaires de produits des applications coordonnées qui sont linéaires sur E et donc de classe C^∞ sur E (Exemple 14) ; ainsi, comme $C^\infty(E,\mathbb{R})$ est une algèbre d'après le théorème 3, les application spolynomiales sont de classe C^k sur E.

□

d. Théorème de Schwarz

Théorème 4. *Théorème de Schwarz*

Soit $f : U \to F$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E. Si f est de classe C^2 sur U alors, pour tous $i,j \in [\![1,p]\!]$, on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Démonstration.

Comme seules les directions selon e_i et e_j entre en jeu dans cet énoncé, on se dit que tout doit se jouer dans le cas à deux variables ! Commençons par traiter ce cas et on verra à la fin comment on en déduit le cas général.

Cas $E = \mathbb{R}^2$. On se place dans la cas $E = \mathbb{R}^2$ et $(0,0) \in U$. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme infinie $\|\cdot\|_\infty$. Comme $(0,0)$ appartient à l'ouvert U, il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte $B((0,0),r) \subset U$. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to F$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On suppose que f est de classe C^2 sur l'ouvert U. On cherche à montrer que :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(0,0).$$

On verra à la fin que l'égalité en $(0,0)$ nous suffit.

Tout d'abord, l'idée : on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)$$

et, pour $x \in \mathbb{R}$ avec $|x| < r$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{t' \to 0} \frac{1}{t'}(f(x,t') - f(x,0))$$

donc :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{t \to 0}\left(\lim_{t' \to 0} \frac{1}{tt'}\left(f(t,t') - f(t,0) - f(0,t') + f(0,0)\right)\right)$$

, et de manière analogue, on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{t \to 0}\left(\lim_{t' \to 0} \frac{1}{tt'}\left(f(t,t') - f(t',0) - f(0,t) + f(0,0)\right)\right).$$

On se dit alors que si tout se passe bien (et c'est la continuité des dérivées partielles secondes qui fera ici que c'est le cas !), $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ devraient toutes deux valoir :

$$\lim_{t \to 0}\left(\frac{1}{t^2}\left(f(t,t) - f(t,0) - f(0,t) + f(0,0)\right)\right)$$

et donc être égales !

Pour $t \in \mathbb{R}^*$ avec $|t| < r$, on pose $\varphi(t) = (f(t,t) - f(t,0) - f(0,t) + f(0,0))$.

Commençons par mettre en relation les dérivées partielles secondes "croisées" et la fonction φ. Soit $t \in \mathbb{R}^*$ avec $|t| < r$.

— Pour tout $y \in [0,1]$ et tout $t' \in]-r,r[$, $(t', yt) \in U$ donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(t', yt)\,\mathrm{d}y$ est bien définie car $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur U ; et, d'après le théorème fondamental de l'analyse, on a :

$$\begin{aligned} f(t',t) - f(t',0) &= \int_0^1 t \frac{\partial f}{\partial y}(t', yt)\,\mathrm{d}y \\ &= t\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(t', yt)\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

— Pour tout $x \in [0,1]$ et tout $t' \in]-r, r[$, $(xt, t') \in U$ donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(xt, t')\,\mathrm{d}x$ est bien définie car $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ est continue sur U ; et, d'après le théorème fondamental de l'analyse, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(t,t') - \frac{\partial f}{\partial y}(0,t') &= \int_0^1 t \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(xt,t')\,\mathrm{d}x \\ &= t\int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(xt,t')\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Or, par continuité de $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur U, la fonction $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(t, yt) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, yt)$ est continue sur $[0,1]$; donc l'intégrale $\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(xt, yt)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$ est bien définie et on a :

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= (f(t,t) - f(t,0)) - (f(0,t) - f(0,0)) \\ &= t\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(t,yt)\,\mathrm{d}y - t\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(0,yt)\,\mathrm{d}y \\ &= t\int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial y}(t,yt) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,yt)\right)\mathrm{d}y \\ &= t\int_0^1 \left(t\int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(xt,yt)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\ \varphi(t) &= t^2\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(xt,yt)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Et, par des arguments similaires, l'intégrale $\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(xt, yt)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$ est bien définie et on a :

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= (f(t,t) - f(0,t)) - (f(t,0) - f(0,0)) \\ &= t\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(xt,t)\,\mathrm{d}x - t\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(xt,0)\,\mathrm{d}x \\ &= t\int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x}(xt,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(xt,0)\right)\mathrm{d}x \\ &= t\int_0^1 \left(t\int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(xt,yt)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ \varphi(t) &= t^2\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(xt,yt)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Par suite, on a :

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(xt,yt)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \frac{\varphi(t)}{t^2} = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(xt,yt)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

Maintenant, faisons tendre t vers 0.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont continues en $(0,0)$, il existe $\delta > 0$ (on prend le minimum des δ de chaque fonction) tel que, pour tout $(x,y) \in U$ vérifiant $\|(x,y)\|_\infty \leq \delta$:

$$\|\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)\|_F \leq \varepsilon \text{ et } \|\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)\|_F \leq \varepsilon.$$

Par suite, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$ avec $|t| < \min(\delta, r)$ et tout $(x, y) \in [0,1]^2$, on a $(xt, yt) \in U$ et $\|(xt, yt)\|_\infty \leq \delta$; donc, d'une part, par inégalité triangulaire et croissance de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\varphi(t)}{t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)\right\|_F &= \left\|\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(xt, yt)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)\right\|_F \\
&= \left\|\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(xt, yt)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y - \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\right\|_F \\
&= \left\|\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(xt, yt) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\right\|_F \\
&\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 \underbrace{\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(xt, yt) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)\right\|_F}_{\leq \varepsilon}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\
\left\|\frac{\varphi(t)}{t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)\right\|_F &\leq \varepsilon;
\end{aligned}$$

puis d'autre part, par un calcul similaire :

$$\left\|\frac{\varphi(t)}{t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)\right\|_F = \left\|\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(xt, yt)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)\right\|_F \leq \varepsilon.$$

Il en résulte que :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t)}{t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

ce qu'il fallait démontrer.

Cas général. Déduisons donc le cas général du cas $E = \mathbb{R}^2$ en $(0,0)$.
On reprend E un espace vectoriel de dimension finie p muni d'une norme $\|\cdot\|$, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E et $i, j \in [\![1, p]\!]$ avec $i \neq j$ - si $i = j$, le théorème est clairement valide (notons que, comme $i \neq j$, $p \geq 2$).

Soit U un ouvert de E et $f : U \to F$. On suppose f de classe C^2 sur U. Montrons que, pour tout $a \in U$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$.

On considère l'application linéaire injective $L : \mathbb{R}^2 \to E$ tel que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $L(x, y) = xe_i + ye_j$ et on note $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^2} = \|L(\cdot)\|$ la norme sur $\mathbb{R}^2$ "tirée en arrière" par L de celle sur E.

Soit $a = \sum_{k=1}^p a_k e_k \in U$. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $L_a(x, y) = a + xe_i + ye_j = a + L(x, y)$.
Comme U est un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B_{\|\cdot\|}(a, r) \subset U$. On pose alors $U' = B_{\|\cdot\|_{\mathbb{R}^2}}((0,0), r)$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et on remarque que, pour tout $(x, y) \in U'$, $\|a - L_a(x, y)\| = \|L(x, y)\| = \|(x, y)\|_{\mathbb{R}^2} < r$ donc $L_a(x, y) \in U$.

On pose $\widetilde{f} = f \circ L_a$ qui est donc bien définie sur l'ouvert U'. De plus, L_a est de classe C^2 sur U' comme somme d'une fonction constante et d'une application linéaire qui sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$, donc $\widetilde{f}$ est de classe C^2 sur U' comme composée de fonctions de classe C^2. Ainsi, comme $(0,0) \in U'$, d'après le cas initial $E = \mathbb{R}^2$, on a :

$$\frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial y \partial x}(0,0).$$

Calculons les dérivées partielles secondes de $\widetilde{f}$ à partir de son expression $\widetilde{f} = f \circ L_a$ et la formule de la dérivation partielle d'une composée (Corollaire 7).

Comme $L_a = a + L$, on a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial L_a}{\partial x}(x, y) = L(1, 0) = e_i \text{ et } \frac{\partial L_a}{\partial y}(x, y) = L(0, 1) = e_j;$$

donc, pour $L_{a,1}, ..., L_{a,p}$ les applications composantes de L_a dans la base $\mathcal{B}$, on a, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$:

$$\frac{\partial L_{a,k}}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{si } k \neq i \end{cases} \text{ et } \frac{\partial L_{a,k}}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k \neq j \end{cases}$$

Ainsi, pour $g : U \to F$ de classe C^1 sur U,

i) on a :

$$\frac{\partial (g \circ L_a)}{\partial x} = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial L_{a,k}}{\partial x} . \frac{\partial g}{\partial x_k} \circ L_a = \frac{\partial g}{\partial x_i} \circ L_a,$$

ii) et :

$$\frac{\partial (g \circ L_a)}{\partial y} = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial L_{a,k}}{\partial y} . \frac{\partial g}{\partial x_k} \circ L_a = \frac{\partial g}{\partial x_j} \circ L_a.$$

Par suite, en appliquant successivement d'une part, i) à $g = f$ puis ii) à $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial x \partial y}(0,0) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial y}\right)(0,0) \\ &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial (f \circ L_a)}{\partial y}\right)(0,0) \\ &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \circ L_a\right)(0,0) \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j} \circ L_a\right)(0,0) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(L_a(0,0)) \\ \frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial x \partial y}(0,0) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(a); \end{aligned}$$

et d'autre part, ii) à $g = f$ puis i) à $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, on obtient, par des calculs similaires :

$$\frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i}(a).$$

Il en résulte que :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(a) = \frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i}(a).$$

Ceci étant vrai pour tout $a \in U$, on conclut :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i}.$$

$\square$

Corollaire 11.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $f : U \to F$ et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E. Si f est de classe C^k sur U, alors, pour tout $(j_1, ..., j_k) \in [\![1, p]\!]^k$ et toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_k$:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_{\sigma(1)}} ... \partial x_{j_{\sigma(k)}}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} ... \partial x_{j_k}}.$$

Autrement dit, pour une fonction de classe C^k, les dérivées partielles d'ordre k ne dépendent pas de l'ordre des dérivations.

Démonstration.

Pour $i, i' \in [\![1, k]\!]$, on note $\tau_{i,i'}$ la transposition de $\mathcal{S}_k$ qui échange i et i'.
On suppose f de classe C^k sur U. Si $k = 1$, l'énoncé est trivialement vrai car $\mathcal{S}_1 = \{\mathrm{id}\}$. Supposons $k \geq 2$.
Le groupe $\mathcal{S}_k$ est engendré par les transpositions élémentaires i.e. de la forme $\tau_{i,i+1}$ pour $i \in [\![1, k-1]\!]$; on commence donc par traiter le cas de ce type de transpositions.
Soit $i \in [\![1, k-1]\!]$. Pour tout $(j_1, ..., j_k) \in [\![1, p]\!]^k$, la fonction $\frac{\partial^{k-(i+1)} f}{\partial x_{j_{i+2}} ... \partial x_{j_k}}$ est de classe C^{i+1} sur U (Corollaire 9) et donc de classe C^2 sur U car $i + 1 \geq 2$; ainsi, d'après le théorème de Schwarz :

$$\frac{\partial^2}{\partial x_{j_{i+1}} \partial x_{j_i}} \left(\frac{\partial^{k-(i+1)} f}{\partial x_{j_{i+2}} ... \partial x_{j_k}} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x_{j_i} \partial x_{j_{i+1}}} \left(\frac{\partial^{k-(i+1)} f}{\partial x_{j_{i+2}} ... \partial x_{j_k}} \right),$$

d'où :

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_{\tau_{i,i+1}(1)}} ... \partial x_{j_{\tau_{i,i+1}(k)}}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} ... \partial x_{j_{i-1}} \partial x_{j_{i+1}} \partial x_{j_i} x_{j_{i+2}} ... \partial x_{j_k}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} ... \partial x_{j_k}}.$$

Maintenant traitons le cas général. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_k$. Comme $\mathcal{S}_k$ est engendré par les transpositions élémentaires, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $\tau_1, ..., \tau_n$ des transpositions élémentaires telles que $\sigma = \tau_1 \circ ... \circ \tau_n$. De proche en proche en utilisant ce qui précéde, on a donc, pour $(j_1, ..., j_k) \in [\![1, p]\!]^k$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_{\sigma(1)}} ... \partial x_{j_{\sigma(k)}}} &= \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_{\tau_1(\tau_2 \circ ... \circ \tau_n(1))}} ... \partial x_{j_{\tau_1(\tau_2 \circ ... \circ \tau_n(k))}}} \\
&= \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_{\tau_2 \circ ... \circ \tau_n(1)}} ... \partial x_{j_{\tau_2 \circ ... \circ \tau_n(k)}}} \\
&= \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_{\tau_2(\tau_3 \circ ... \circ \tau_n(1))}} ... \partial x_{j_{\tau_2(\tau_3 \circ ... \circ \tau_n(k))}}} \\
&= \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_{\tau_3 \circ ... \circ \tau_n(1)}} ... \partial x_{j_{\tau_3 \circ ... \circ \tau_n(k)}}} \\
&= ... \\
&= \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_{\tau_n(1)}} ... \partial x_{j_{\tau_n(k)}}} \\
\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_{\sigma(1)}} ... \partial x_{j_{\sigma(k)}}} &= \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} ... \partial x_{j_k}}.
\end{aligned}$$

□

Exemple 15.

La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

admet des dérivées partielles secondes sur $\mathbb{R}^2$ dans la base canonique mais n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ car $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Exercice 22.

Déterminer s'il existe une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ telle que $V = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial t}\right)$; et dans ce cas, déterminer f :

1. $V : (x,t) \mapsto (xt^2, -xt)$
2. $V : (x,t) \mapsto (2xt, x^2 + t)$.

Partie D

Arcs paramétrés et vecteurs tangents

1. Arcs paramétrés et dérivées le long d'un arc

Dans ce paragraphe, I désigne un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

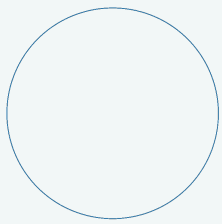
a. Arc paramétré

Définition 14. *Arc paramétré*

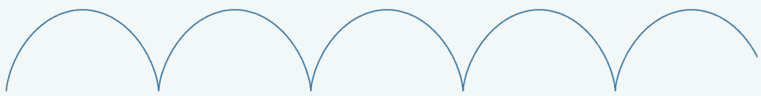
Une fonction $\gamma : I \to E$ est appelé **arc paramétré** et on appelle **support** de γ l'image $\gamma(I)$ de γ.

Exemple 16.

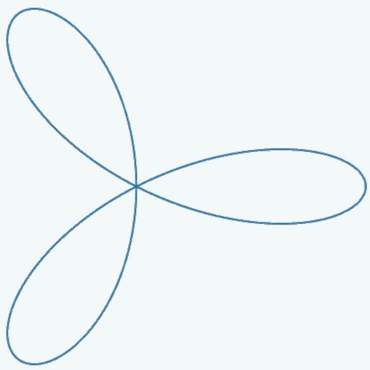
1. *Cercle :* L'arc paramétré $\gamma : t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ a pour support le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 :



2. *Cycloïde :* L'arc paramétré $\gamma : t \mapsto (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$ a pour support :



3. *Trifolium :* L'arc paramétré $\gamma : t \mapsto (\cos(2t) - \cos(t), \sin(2t) + \sin(t))$ a pour support :



4. *Folium :* L'arc paramétré $\gamma : t \mapsto (\frac{1-t^2}{1+t^2}, t\frac{1-t^2}{1+t^2})$ a pour support :

b. Opérations le long d'un arc

Proposition 28. *Dérivée le long d'un arc*

Soit $f : U \to F$ et $\gamma : I \to U$ un arc paramétré tel que $\gamma(I) \subset U$.

- Soit $t_0 \in I$. Si f est différentiable en $\gamma(t_0)$ et γ est dérivable en t_0, alors $f \circ \gamma$ est dérivable en t_0 et on a :
$$(f \circ \gamma)'(t_0) = \mathrm{d}f(\gamma(t_0))(\gamma'(t_0)).$$
- Si f et γ sont de classe C^1 sur respectivement U et I, alors $f \circ \gamma$ est de classe C^1 sur I.

Démonstration.

- D'après la proposition 14, $f \circ \gamma$ est différentiable en t_0 et donc, d'après la proposition 4, $f \circ \gamma$ est dérivable en t_0 et, pour tout $h \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} h.(f \circ \gamma)'(t_0) &= \mathrm{d}(f \circ \gamma)(t_0)(h) \\ &= (\mathrm{d}f(\gamma(t_0)) \circ \mathrm{d}\gamma(t_0))(h) \\ &= \mathrm{d}f(\gamma(t_0))(\mathrm{d}\gamma(t_0)(h)) \\ &= \mathrm{d}f(\gamma(t_0))(h.\gamma'(t_0)) \\ &= h.\,\mathrm{d}f(\gamma(t_0))(\gamma'(t_0)) \end{aligned}$$
et donc, pour $h = 1 \in \mathbb{R}$, on obtient $(f \circ \gamma)'(t_0) = \mathrm{d}f(\gamma(t_0))(\gamma'(t_0))$.
- Cela découle directement de la proposition 19.

□

Corollaire 12.

Soit $a \in E$, $h \in B(0_E, r)$ avec $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$, $f : U \to F$ et $\gamma : t \to a + th$. La fonction $f \circ \varphi$ est bien définie sur $[1, 1]$ et si, de plus f est différentiable sur U, alors $f \circ \gamma$ est différentiable sur $[1,1]$ avec, pour tout $t \in [1,1]$:

$$(f \circ \gamma)'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t))(h).$$

Démonstration.

Comme $h \in B(0_E, r)$, pour tout $t \in [-1,1]$, $\|th\| = |t|.\|h\| < r$, d'où $a + th \in B(a,r)$. Par suite, $\gamma([-1,1]) \subset U$, d'où $f \circ \gamma$ est bien définie sur $[-1,1]$. De plus, si f est différentiable sur U, comme l'arc paramétré g est différentiable sur $[-1,1]$ (car de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$), d'après la proposition précédente, $f \circ \gamma$ est différentiable sur $[-1,1]$ et on a, pour tout $t \in [-1,1]$:

$$(f \circ \gamma)'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t))(\gamma'(t))$$

Or, $\gamma'(t) = h$ pour tout $t \in [-1,1]$ d'où le résultat. □

Exemple 17.

— Soit $f : U \to F$ une application de classe C^2 sur U, $a \in U$ et $h \in B(0_E, r)$ où $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset U$. L'application $\varphi : t \mapsto f(a+th)$ est bien définie et de classe C^2 sur $[-1,1]$, et on a, pour $(e_1, ..., e_p)$ une base de E et pour tout $t \in [-1,1]$:

$$\varphi'(t) = \mathrm{d}f(a+th)(h) = \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a+th),$$

et

$$\varphi''(t) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{p} h_j h_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(a+th)$$

où $h = \sum_{i=1}^{p} h_j e_j$.

—

— D'après le corollaire précédent φ est bien définie sur $[-1,1]$ et différentiable sur $[-1,1]$ (voire aussi l'exemple 9) et on a, pour tout $t \in [-1,1]$:

$$\varphi'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t))(h) = \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a+th) = \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \circ \gamma(t)$$

où $\gamma : t \mapsto a + th$.

Soit $j \in [\![1,p]\!]$. Comme $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ est de classe C^1 et γ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (et même C^∞) avec, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\gamma'(t) = h$; alors $\frac{\partial f}{\partial x_j} \circ \gamma$ est de classe C^1 sur $[-1,1]$, d'après la proposition précédente.

Par suite, φ' est de classe C^1 sur $[-1,1]$ comme combinaison linéaire de fonctions de classe C^1 sur $[-1,1]$; et ainsi, φ est de classe C^2 sur $[-1,1]$.

De plus, d'après le corollaire précédent, on a, pour tout $t \in [-1, 1]$:

$$\begin{aligned}
\varphi''(t) &= \sum_{j=1}^{p} h_j \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \circ \gamma\right)'(t) \\
&= \sum_{j=1}^{p} h_j \,\mathrm{d}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_{\varphi(t)} (\varphi'(t)) \\
&= \sum_{j=1}^{p} h_j \sum_{i=1}^{p} h_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\right)(a+th) \\
\varphi''(t) &= \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p} h_j h_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(a+th).
\end{aligned}$$

Proposition 29. *Intégration le long d'un arc*

Soit $a, b \in U$ et $f : U \to F$ une fonction de classe C^1 sur U. Pour tout arc paramétré $\gamma : [0,1] \to U$ de classe C^1 sur I tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$, on a :

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t))(\gamma'(t))\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration.

Soit $\gamma : [0,1] \to U$ un arc paramétré de classe C^1 sur I tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$. Alors, d'après la proposition 28, $f \circ \gamma$ est dérivable sur $[0,1]$ et on a, pour tout $t \in [0,1]$:

$$(f \circ \gamma)'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t))(\gamma'(t))$$

Ainsi, d'après le théorème fondamental de l'analyse, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t))(\gamma'(t))\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 (f \circ \gamma)'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= f \circ \gamma(1) - f \circ \gamma(0) \\
\int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t))(\gamma'(t))\,\mathrm{d}t &= f(b) - f(a).
\end{aligned}$$

□

Corollaire 13.

Soit $f : U \to F$. Si U **connexe par arcs** alors :
la fonction f est constante sur U si, et seulement si, $\mathrm{d}f = \mathbf{0}$.

Remarque 7.

Si U n'est pas connexe par arcs, l'implication réciproque est fausse en général : par exemple, si $U =]0,1[\sqcup]2,3[$, la fonction qui vaut 0 sur $]0,1[$ et 1 sur $]0,1[$ n'est pas constante sur U mais est différentiable sur U de différentielle nulle sur U.

2. Vecteurs tangents à une partie

Définition 15. *Vecteur tangent*

Soit X une partie de E et x un point de X.

— Soit $v \in E$ un vecteur. On dit que v est **tangent à X en x** s'il existe $\varepsilon > 0$ et $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to X$ un arc paramétré dérivable en 0 tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$.

— On note $T_x X$ l'ensemble des vecteurs tangents à X en x.

Remarque 8.

Si pour v dans E, il existe un arc défini sur $\mathbb{R}$ ou, plus généralement, sur un intervalle dont 0 est un point intérieur, dérivable à 0 avec $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$, alors v est tangent à X en x : en effet, il suffit de restreindre l'arc à un intervalle de la forme $]-\varepsilon, \varepsilon[$ pour satisfaire à la définition.

Exemple 18.

— Pour tous $X \subset E$ et $x \in X$, 0_E appartient à $T_x X$.

— Soit $\mathcal{V}$ un sous-espace affine de E dirigé par un sous-espace vectoriel V de E. Alors, pour tout $x \in \mathcal{V}$, $T_x \mathcal{V} = V$.

— On suppose euclidien et on pose $S = S(0_E, 1)$ la sphère unité de E. Alors, pour $x \in S$, $T_x S = \{x\}^\perp$.

Remarque : très souvent, pour déterminer un plan tangent, on conjecture son expression puis on raisonne par double inclusion.

— On considère l'arc γ constant en x de $\mathbb{R}$ dans E : il est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée nulle, son image est inclus dans X car $x \in X$ et $\gamma(0) = x$, $\gamma'(0) = 0_E$. D'où $0_E \in T_x X$.

— ⋆ Montrons $V \subset T_x \mathcal{V}$.
Soit $v \in V$. On pose $\gamma : t \mapsto x + tv \in \mathcal{V}$. Alors γ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ donc dérivable en 0 et à valeurs dans $\mathcal{V}$; de plus $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$ car γ' est constante en v. Par suite, $v \in T_x \mathcal{V}$.

⋆ Montrons $T_x \mathcal{V} \subset V$.
Soit $v \in T_x \mathcal{V}$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ et un arc $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathcal{V}$ tel que $\gamma(0) = x$ et $\Gamma'(0) = v$. Pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ avec $t \neq 0$, comme $\gamma(t), \gamma(0) \in V$, la combinaison linéaire :

$$\frac{1}{t}(\gamma(t) - \gamma(0)) = \frac{1}{t}\gamma(t) - \frac{1}{t}\gamma(0) \text{ appartient à } V.$$

Or E est de dimension finie, donc le sous-espace vectoriel V est fermé dans E (pour n'importe quelle norme et donc celle qu'on s'est fixée au départ). Par suite, par caractérisation séquentielle des fermés (quitte à prendre une suite t_n tendant vers 0) :

$$\gamma'(0) = \lim_{t\to 0} \underbrace{\frac{1}{t}(\gamma(t) - \gamma(0))}_{\in V} \in V.$$

Ainsi, par double inclusion, on a $T_x\mathcal{V} = V$.

— ⋆ Montrons $\{x\}^\perp \subset T_xS$.
Soit $v \in \{x\}^\perp$. On pose $g : t \mapsto x + tv$. Alors g à valeurs dans $E \setminus \{0_E\}$: en effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$, d'après le théorème de Pythgore, on a :

$$\|g(t)\|^2 = \|x + tv\|^2 = \|x\|^2 + |t|\|v^2\| > 0 \text{ car } \|x\| = 1.$$

Ainsi, l'arc $\gamma : t \to \frac{g(t)}{\|g(t)\|}$ est bien défini sur $\mathbb{R}$. Montrons que γ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc en 0.
On a $\gamma = g \times (\varphi \circ g)$ où $\varphi = \frac{1}{\|\cdot\|} = (\cdot)^{-\frac{1}{2}} \circ \|\cdot\|^2$ est différentiable sur $E \setminus \{0_E\}$ d'où $\varphi \circ g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après la proposition 28 et donc γ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
De plus, on a, pour tous $a, h \in E$ avec $a \neq 0_E$:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{d}\varphi(a)(h) & = & (\,\mathrm{d}(\cdot)^{-\frac{1}{2}}(\|a\|^2) \circ \mathrm{d}\|\cdot\|^2(a))(h) \\ & = & -\frac{1}{2}\|a\|^{-3}.(2(a|h)) \\ \mathrm{d}\varphi(a)(h) & = & -\dfrac{(a|h)}{\|a\|^3}. \end{array}$$

Ainsi, on a, d'après la proposition 28 et comme $(x|v) = 0$:

$$(\varphi \circ g)'(t) = \mathrm{d}f(g(t))(g'(t)) = -\frac{(x + tv|v)}{\|x + tv\|^3} = -\frac{t\|v\|^2}{\|x + tv\|^3}.$$

Par suite, comme $\|x\| = 1$,

$$\begin{array}{rcl} \gamma'(0) & = & g'(0)\varphi(g(0)) + \gamma(0)(\varphi \circ g)'(0) \\ & = & v.\frac{1}{\|x\|} + x.0 \\ \gamma'(0) & = & v \end{array}$$

Ainsi, l'arc γ est dérivable en 0, $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$; d'où $v \in T_xS$.

⋆ Montrons $T_xS \subset \{x\}^\perp$.
Soit $v \in T_xS$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ et un arc $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to S$ tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$.
Montrons que $(x|v) = 0$.
Comme $\mathrm{Im}(\gamma) \subset S$, la fonction $f : t \mapsto \|\gamma(t)\|^2$ est constante sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ et donc dérivable, de dérivée nulle en 0. Ainsi, γ étant dérivable en 0 et $\|\cdot\|^2$ est différentiable sur E, on a, d'après la proposition 28 :

$$0 = f'(0) = \mathrm{d}\|\cdot\|^2(\gamma(0))(\gamma'(0)) = 2(\gamma(0)|\gamma'(0)) = 2(x|v).$$

Donc $v \in \{x\}^\perp$.

Ainsi, par double inclusion, on a $T_xS = \{x\}^\perp$.

Partie E

Fonctions numériques

Dans cette partie E désigne un espace euclidien et on note $(\cdot|\cdot)$ son produit scalaire.

1. Gradient

a. Définition et premières propriétés

Lemme 3.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $a \in U$. Si f est différentiable en a, il existe une unique vecteur $u \in E$ tel que, pour tout $h \in E$:

$$\mathrm{d}f(a)(h) = (u|h).$$

Définition 16. *Gradient d'une application numérique*

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $a \in U$. Si f est différentiable en a, on appelle **gradient de f en a** et on note $\nabla f(a)$ l'unique vecteur de E tel que, pour tout $h \in E$:

$$\mathrm{d}f(a)(h) = (\nabla f(a)|h).$$

Exemple 19.

On suppose E euclidien. Le gradient $f : x \mapsto \|x\|^2$ en $a \in E$ est $\nabla f(a) = 2a$.

D'après l'exercice 10, pour tout $a \in E$, f est différentiable en a et on a $\mathrm{d}f(a) : h \mapsto 2(a|h) = (2a|h)$, d'où $\nabla f(a) = 2a$.

Exercice 23.

On suppose E euclidien. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $g : E \to \mathbb{R}$ définie, pour $x \in E$, par $g(x) = (f(x)|x)$. Montrer que g est différentiable sur E et déterminer $\nabla g(a)$ pour tout $a \in E$.

Correction.

Soit $a \in E$. On a, pour tout $h \in E$:

$$g(a+h) - g(a) = (f(a+h)|a+h) - (f(a)|a) = \underbrace{(f(a)|h) + (f(h)|a)}_{=\ell(h)} + (f(h)|h).$$

L'application $\ell : h \mapsto (f(a)|h) + (f(h)|a)$ est linéaire comme combinaison linéaire d'applications linéaires (car un produit scalaire est linéaire par rapport à chaque variable et f est linéaire) et on a, par continuité de l'application linéaire f et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\frac{|(f(h)|h)|}{\|h\|} \leq \frac{\|f(h)\|.\|h\|}{\|h\|} = \|f(x)\| \leq \|\|f\|\|.\|x\| \xrightarrow[h \to 0_E]{} 0,$$

donc :

$$g(a+h) = g(a) + \ell(h) + \underset{h \to 0_E}{o}(\|h\|).$$

Par suite, g est différentiable en a et $\mathrm{d}g_a : h \mapsto (f(a)|h) + (f(h)|a)$. Il en résulte que g est différentiable sur E.

De plus, pour tous $a, h \in E$, on a :

$$\mathrm{d}g_a(h) = (f(a)|h) + (f(h)|a) = (f(a)|h) + (h|f^*(a)) = (f(a) + f^*(a)|h),$$

d'où :

$$\nabla g(a) = f(a) + f^*(a).$$

Exercice 24.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $M_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique i.e. $(\cdot|\cdot) : (A, B) \mapsto \mathrm{Tr}({}^tAB)$. Déterminer le gradient de l'application déterminant en tout point de $M_n(\mathbb{R})$.

Proposition 30.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$. Si f est de classe C^1 sur U, alors $\nabla f : x \mapsto \nabla f(x)$ est continue sur U.

b. Gradient et dérivées partielles

Proposition 31.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base **orthonormale** de E et $a \in U$. Si f est différentiable en a alors :

$$\nabla f(a) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) e_j$$

En particulier, si $E = \mathbb{R}^p$ muni de sa base canonique :

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \right).$$

Exercice 25.

Justifier que $f : (x, y) \to y^2(y^2 - x^4)$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer le gradient de f en tout point de $\mathbb{R}^2$.

c. Opérations et gradient

Proposition 32.

Soit $f, g : U \to \mathbb{R}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Si f et g sont différentiable sur U alors on a :
- $\nabla(\lambda f + \mu g) = \lambda \nabla f + \mu \nabla g$;
- $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$;
- pour $\varphi : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I et telle que $f(U) \subset I$,
$$\nabla(\varphi \circ f) = (\varphi' \circ f)\nabla f;$$
- si f ne s'annule pas sur U,
$$\nabla\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{1}{f^2}\nabla f.$$

Exercice 26.

On suppose E euclidien. Montrer que $f : x \mapsto \|x\|$ est différentiable sur $E \setminus \{0_E\}$ et déterminer son gradient en tout point de E.

Correction.

On remarque que $f = \sqrt{\cdot} \circ \|\cdot\|^2$. La fonction $\sqrt{\cdot}$ est différentiable sur $\mathbb{R}_+^*$ car dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et, d'après l'exercice 10, $\|\cdot\|^2$, qui est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ sur $E \setminus \{0_E\}$, est différentiable sur $E \setminus \{0_E\}$. Par suite, d'après la règle de la chaîne (Proposition 14), f est différentiable sur $E \setminus \{0_E\}$. D'après l'exemple 19, pour tout $a \in E$, on a $\nabla(\|\cdot\|^2)(a) = 2a$; donc, d'après la proposition 32, on a, pour tout $a \in E \setminus \{0_E\}$:
$$\nabla f(a) = \nabla(\sqrt{\cdot} \circ \|\cdot\|^2)(a) = (\frac{1}{2\sqrt{\cdot}} \circ \|\cdot\|^2)(a).\nabla(\|\cdot\|^2)(a) = \frac{a}{\|a\|}.$$

d. Interprétation géométrique

Proposition 33.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $a \in U$. On suppose que f est différentiable en a et que $\nabla f(a) \neq 0$. Alors la fonction $h \mapsto D_h f(a)$ restreinte à la sphère unité de E admet un unique maximum en $h_0 = \dfrac{1}{\|\nabla f(a)\|}\nabla f(a)$.

Démonstration.

On a, pour tout $h \in S_E = \{u \in E \mid \|u\| = 1\}$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,
$$D_h f(a) = \mathrm{d}f(a)(h) = (\nabla f(a)|h) \leq \|\nabla f(a)\|.\|h\| = \|\nabla f(a)\|.$$
avec égalité, si, et seulement si, h est colinéaire et de même sens que $\nabla f(a)$

Par suite, $h \mapsto D_h f(a)$ admet un maximum en $h_0 = \dfrac{1}{\|\nabla f(a)\|}\nabla f(a)$. □

2. Vecteurs tangents d'une fonction numérique

Exemple 20.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur U.
Pour $X = \mathcal{G}_f \subset \mathbb{R}^3$ le graphe de f et $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in X$, on a, en considérant $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique :

$$T_{M_0}X = \{n\}^\perp \text{ où } n = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right).$$

De plus, pour $g : (x, y, z) \mapsto f(x, y) - z$, on a $X = \{(x, y, z) \in U \times \mathbb{R} \mid g(x, y, z) = 0\}$ et $\nabla g(M_0) = n$ d'où :

$$T_{M_0}X = \{\nabla g(M_0)\}^\perp = \mathrm{Ker}(\,\mathrm{d}g(M_0)).$$

- ⋆ Montrons $\{n\}^\perp \subset T_{M_0}X$.
Soit $v = (v_x, v_y, v_z) \in \{n\}^\perp$. On considère $g : t \mapsto (x_0, y_0) + t(v_x, v_y)$. Alors $(x_0, y_0) \in U$ car $M_0 \in \mathcal{G}_f$ et comme U est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $g(t) \in U$.
On pose, pour $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\gamma : t \mapsto (g(t), f(g(t)))$. Comme $g_{|]-\varepsilon,\varepsilon[}$ est à valeurs dans U, γ est bien défini sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ et à valeurs dans $X = \mathcal{G}_f = \{(a, f(a)) \mid a = (x, y) \in U\}$.
De plus, γ est dérivable sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ car ses coordonnées le sont : g est dérivable sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ et f est différentiable sur U d'où g et $f \circ g$ sont dérivables sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$.
Dé plus, on a :
  - $\gamma(0) = (g(0), f(g(0))) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) = M_0$ car, comme $M_0 \in \mathcal{G}_f$, $z_0 = f(x_0, y_0)$.
  - $\gamma'(0) = (g'(0), (f \circ g)'(0)) = (v_x, v_y, (f \circ g)'(0))$. Or, on remarque que, comme $(n|v) = 0$, on a :
  $$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)v_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)v_y - v_z = 0$$
  d'où :
  $$\begin{array}{rcl} (f \circ g)'(0) & = & \mathrm{d}f(g(0))(g'(0)) \\ & = & \mathrm{d}f(x_0, y_0)(v_x, v_y) \\ & = & (\nabla f(x_0, y_0)|(v_x, v_y)) \\ & = & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)v_x + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)v_y \\ (f \circ g)'(0) & = & v_z \end{array}$$
  et ainsi, $\gamma'(0) = v$.

  Par suite, $v \in T_{M_0}X$. D'où $\{n\}^\perp \subset T_{M_0}X$.
- ⋆ Montrons $T_{M_0}X \subset \{n\}^\perp$.
Soit $v = (v_x, v_y, v_z) \in T_{M_0}X$. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ et $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to X$ dérivable en 0 et tel que $\gamma(0) = M_0$ et $\gamma'(0) = v$.
Comme γ est à valeurs dans X, pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, il existe $g(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ tel

que $\gamma(t) = (g(t), f(g(t)))$.
Comme γ définie sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ et dérivable en 0, ses applications coordonnées le sont et donc g et $f \circ g$ sont définies sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ et dérivable en 0. De plus, comme f est différentiable sur U, g est à valeurs dans U et dérivable en 0, on a :

$$M_0 = (x_0, y_0, z_0) = \gamma(0) = (g(0), f(g(0)),$$

puis, en utilisant le calcul de $(f \circ g)'(0)$ de l'inclusion précédente :

$$v = (v_x, v_y, v_z) = \gamma'(0) = (g'(0), (f \circ g)'(0)) = \left(v_x, v_y, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)v_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)v_y\right).$$

Ainsi,

$$(n|v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)v_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)v_y - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)v_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)v_y\right) = 0,$$

et donc, $v \in \{n\}^\perp$. Par suite, $T_{M_0}X \subset \{n\}^\perp$.
Ainsi, par double inclusion, on a $T_{M_0}X = \{n\}^\perp$.

Exercice 27.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble des vecteurs tangents à $\mathcal{G}_f$ en (x_0, y_0) est égal à la droite vectorielle qui dirige la tangente de f en x_0.

En fait, le résultat final de l'exemple précédent représente la "règle" comme on va le voir avec le théorème suivant. Sa démonstration, plus précisément, la démonstration de l'inclusion "noyau de la différentielle $\subset$ vecteurs tangents" repose sur le fait qu'on peut toujours mettre *localement* une équation $g(x_1, ..., x_n) = 0$ sous la forme $x_n = f(x_1, ..., x_{n-1})$ avec f est classe C^1 lorsque g est de classe C^1 et que sa différentielle en $(x_1, ..., x_n)$ ne s'annule pas. Il s'agit du **théorème des fonctions implicites** dont la démonstration est hors programme ; on admet donc ce théorème ici.

Théorème 5.

Soit $g : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur U, $X = \{y \in U \mid g(y) = 0\}$ l'ensemble des zéros de g et $x \in X$.
Si $\mathrm{d}g(x) \neq \mathbf{0}$, alors :

$$T_x X = \mathrm{Ker}(\mathrm{d}g(x)) = \{\nabla g(x)\}^\perp.$$

Corollaire 14.

Soit $\mathcal{S}$ une surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $\mathcal{S} :\ g(x, y, z) = 0$ où g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ et $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{S}$. Si $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$, alors $T_{(x_0,y_0,z_0)}\mathcal{S}$ est un plan vectoriel d'équation :

$$T_{(x_0,y_0,z_0)}\mathcal{S} :\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0).(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0).(y - y_0) + \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0).(z - z_0) = 0$$

Remarque 9.

Ce corollaire est se généralise directement en remplaçant $\mathbb{R}^3$ par $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 2$.

Exercice 28.

Déterminer une équation du plan tangent à $\mathcal{S}$ en un point $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{S}$ pour :

1. $\mathcal{S}$ le paraboloïde d'équation $\mathcal{S}: \ z = x^2 + y^2$.
2. $\mathcal{S}$ la sphére unité euclidienne ;
3. $\mathcal{S}$ le cône de droite génératrice $\mathrm{Vect}(1,0,1)$ en $(0,1,1)$.

Correction.

1. On a $\mathcal{S}: \ g(x,y,z) = 0$ où $g : (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 - z$. Alors g est polynomiale et donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$. De plus, on a :
$$\nabla g(M_0) = (2x_0, 2y_0, -1) \neq (0,0,0),$$
d'où :
$$T_{M_0}\mathcal{S}: \ z = z_0 + 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0).$$
2. On a $\mathcal{S}: \ g(x,y,z) = 0$ où $g : (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Alors g est polynomiale et donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$. De plus, comme pour tout $M_0 \in S$, $\|M_0\|_2 = 1$ et donc $M_0 \neq (0,0,0)$, on a :
$$\nabla g(M_0) = (2x_0, 2y_0, 2z_0) \neq (0,0,0),$$
d'où :
$$T_{M_0}\mathcal{S}: \ x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) + z_0(z - z_0) = 0.$$
3. On a $\mathcal{S}: \ g(x,y,z) = 0$ où $g : (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 - z^2$. Alors g est polynomiale et donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$. De plus, comme pour tout $M_0 \in S$ avec $M_0 \neq (0,0,0)$:
$$\nabla g(M_0) = (2x_0, 2y_0, -2z_0) \neq (0,0,0),$$
d'où :
$$T_{M_0}\mathcal{S}: \ z_0(z - z_0) = x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0).$$
Ainsi, en $M_0 = (0,1,1)$, on a :
$$T_{(0,1,1)}\mathcal{S}: \ z = y.$$
Ainsi :
$$T_{(0,1,1)}\mathcal{S} = \mathrm{Vect}((0,1,1),(1,0,0)).$$

3. Approximation au second ordre et matrice hessienne

Dans ce paragraphe, on considère une base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ de E.

a. Formule de Taylor-Young au second ordre

Théorème 6. *Formule de Taylor-Young au second ordre*

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur U. Pour tout $a \in U$, on a, pour $h = \sum_{j=1}^{p} h_j e_j \in E$:

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i,j \leq p} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) + \underset{h \to 0_E}{o}(\|h\|^2).$$

Exemple 21. *Cas $E = \mathbb{R}^2$*

Pour $E = \mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur U, on a, pour $(x_0, y_0) \in U$, en vertu du théorème de Schwarz :

$$\begin{aligned} f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = f(x_0, y_0) \quad &+ \quad h_1 . \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + h_2 . \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ &+ \quad \frac{1}{2} \left(h_1^2 . \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2 h_1 h_2 . \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + h_2^2 . \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \right) \\ &+ \quad \underset{(h_1, h_2) \to (0,0)}{o}(h_1^2 + h_2^2) \end{aligned}$$

b. Matrice hessienne

Définition 17. *Matrice hessienne*

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur U et $a \in U$. On appelle **matrice hessienne** ou simplement **hessienne** de f en a et on note $H_f(a)$ la matrice carrée d'ordre n :

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i,j \leq n} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

Proposition 34.

Si $f : U \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2 sur U, alors, pour tout $a \in U$, $H_f(a) \in S_n(\mathbb{R})$ *i.e.* la hessienne de f en a est symétrique réelle.

Exemple 22. *Cas $E = \mathbb{R}^2$*

Pour $E = \mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur U, on a, pour $(x_0, y_0) \in U$:

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Dans la proposition suivante, on résume, grâce au gradient et la hessienne, la formule de Taylor-Young du second ordre en identifiant, à travers une base orthonormale $\mathcal{B}$, l'espace E et $M_{n,1}(\mathbb{R})$. On rappelle que dans ce cas, $(x|y) = {}^t x.y$.

Proposition 35.

Si $f : U \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2 sur U, pour tout $a \in U$:

$$f(a+h) = f(a) + (\nabla f(a)|h) + \frac{1}{2}(H_f(a)h|h) + \underset{h \to 0_E}{o}(\|h\|^2)$$

ou matriciellement :

$$f(a+h) = f(a) + {}^t\nabla f(a).h + \frac{1}{2}{}^t h.H_f(a).h + \underset{h \to 0_E}{o}(\|h\|^2)$$

Partie F
Optimisation

Dans cette partie E désigne un espace euclidien et on note $(\cdot|\cdot)$ son produit scalaire.

1. Extrema et points critiques

Définition 18. *Extremum local*

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $a \in U$.
On dit que f admet un **minimum local** (resp. un **maximum local** en a s'il existe un voisinage W de a tel que pour tout $x \in W \cap U$:

$$f(a) \leq f(x) \qquad (\text{resp. } f(a) \geq f(x)).$$

Si f admet un minimum ou un maximum local en a, on dit que f admet un **extremum local en** a.

Définition 19. *Point critique*

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $a \in U$. On dit que a est un **point critique** de f si f est différentiable en a et $\mathrm{d}f(a) = \mathbf{0}$ ou de manière équivalente $\nabla f(a) = 0_E$.

Exemple 23.

La fonction $f : (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - x^2 + y^2$ admet des points critiques en $(0, 0)$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ et $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$.

2. Extrema libres : étude au premier ordre

Théorème 7.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ un fonction de classe C^1 sur U et $a \in U$. Si f admet un extremum en a, alors a est un point critique de f.

Exemple 24.

La fonction $f : (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - x^2 + y^2$ admet des extrema locaux en $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ et en $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ mais pas en $(0, 0)$.

Remarque 10.

Comme le montre l'exemple précédent, la réciproque du Théorème 7 est fausse ! Une fonction qui admet un point critique n'admet pas forcément d'extremum en ce point.

Exercice 29.

On considère E un espace euclidien et on note $(\cdot|\cdot)$ son produit scalaire.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $a \in E$. On note $g : E \to \mathbb{R}$ l'application $g : x \mapsto (f(x)|x) - 2(a|x)$.

1. Montrer que g est différentiable sur E et calculer son gradient en tout point de E.
2. On suppose $f \in \mathcal{S}^{++}(E)$. Montrer que g admet un unique point critique sur E et qu'il s'agit d'un minimum global.

Correction.

1. On peut montrer de deux manières que g est différentiable sur E (mais, pour obtenir la gradient, on s'appuiera sur la seconde !) :
   — *Par opérations sur les applications différentiables.* On a $g = g_1 - 2g_2$ où $g_1 : x \mapsto (f(x)|x)$ et $g_2 : x \mapsto (a|x)$.
   L'application g_2 est linéaire sur E par linéarité du produit scalaire par rapport à sa deuxième variable donc g_2 est différentiable sur E.
   De plus, on a $g_1 = u \circ v$ où $v : x \mapsto (f(x), x) \in E \times E$ qui est linéaire par linéarité de f et donc différentiable sur E et $u : (x, y) \mapsto (x|y)$ qui est bilinéaire sur $E \times E$ et donc différentiable sur $E \times E$; ainsi g_2 est différentiable sur E comme composée d'applications différentiables.
   Il en résulte que g est différentiable sur E comme combinaison linéaire d'applications différentiables sur E.
   — *Par définition.* Soit $x \in E$. On a, pour tout $h \in E$, par bilinéarité du produit scalaire et par linéarité de f :

$$\begin{aligned} g(x+h) - g(x) &= (f(x+h)|x+h) - 2(a|x+h) - (f(x)|x) - 2((f(x)|x) - 2(a|x)) \\ &= \underbrace{(f(x)|h) + (f(h)|x) - 2(a|h)}_{=\ell(h)} + (f(h)|h). \end{aligned}$$

   L'application $\ell : h \mapsto (f(x)|h) + (f(h)|x) - 2(a|h)$ est linéaire comme combinaison linéaire d'applications linéaires (car un produit scalaire est linéaire par rapport à chaque variable et f est linéaire) et on a, par continuité de l'application linéaire f et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\frac{|(f(h)|h)|}{\|h\|} \leq \frac{\|f(h)\|.\|h\|}{\|h\|} = \|f(h)\| \leq |||f|||.\|h\| \xrightarrow[h \to 0_E]{} 0,$$

   donc :

$$g(x+h) = g(x) + \ell(h) + \underset{h \to 0_E}{o}(\|h\|).$$

   Par suite, g est différentiable en a et $\mathrm{d}g_a : h \mapsto (f(x)|h) + (f(h)|x) - 2(a|h)$. Il en résulte que g est différentiable sur E.

De plus, en utilisant le calcul de la seconde manière, pour tous $x, h \in E$, on a :

$$\mathrm{d}g_x(h) = (f(x)|h)+(f(h)|x)-2(a|h) = (f(x)|h)+(h|f^*(x))-2(a|h) = (f(x)+f^*(x)-2a|h),$$

d'où :

$$\nabla g(x) = f(x) + f^*(x) - 2a.$$

2. Comme $f \in \mathcal{S}^{++}(E)$, en particulier, $f \in \mathcal{S}(E)$ donc, pour tout $x \in E$, on a $\nabla g(x) = 2(f(x) - a)$.
Ainsi, $\nabla g(x) = 0_E$ si, et seulement si, $f(x) = a$. Or, comme $f \in \mathcal{S}^{++}(E)$, on a $f \in \mathcal{GL}(E)$, et donc $\nabla g(x) = 0_E$ si, et seulement si, $x = f^{-1}(a)$.
Par suite, g possède un unique point critique en $x_0 = f^{-1}(a)$.
Montrons que g atteint un minimum global en ce point. Soit $x \in E$. Pour tout $h \in E$, on a, d'après la question précédente :

$$g(x_0 + h) - g(x_0) = (\underbrace{\nabla g(x_0)}_{=0_E}|h) + (f(h)|h) = (f(h)|h) \geq 0,$$

car f est autoadjoint (défini) positif.
Il en résulte que g atteint un minimum global en x_0.

3. Extrema libres : étude au second ordre

Théorème 8.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ un fonction de classe C^2 sur U et $a \in U$.
- Si f admet un minimum (resp. un maximum) local en a, alors $H_f(a) \in S_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $S_n^-(\mathbb{R})$.
- Si f admet un point critique en a et $H_f(a) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ (resp. $S_n^{--}(\mathbb{R})$), alors f admet un minimum (resp. un maximum) local en a.

Corollaire 15. *Cas particulier $E = \mathbb{R}^2$*

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un fonction de classe C^2 sur U et $(x_0, y_0) \in U$ un point critique de f. On note $H = H_f(x_0, y_0)$ la hessienne de f en (x_0, y_0).
- Si $\det(H) > 0$ alors f admet un extremum local en (x_0, y_0).
  De plus, si $\mathrm{Tr}(H) > 0$, il s'agit d'un minimum ; sinon, c'est un maximum.
- Si $\det(H) < 0$, f n'admet pas d'extremum en (x_0, y_0).
- Si $\det(H) = 0$, on ne pas conclure directement.

Remarque 11.

Le corollaire précédent est également connu sous le nom de théorème de Monge. Dans la littérature, la hessienne est alors écrite

$$H = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

et ainsi, on reformule les conditions du corollaire avec $rt - s^2 = \det(H)$. Dans le cas $rt - s^2 > 0$, on peut même être plus économe : on peut remarquer que sous cette condition, $\mathrm{Tr}(H) = r + t$ et r sont de même signe.
On peut donc reformuler le corollaire avec les notations de Monge :

- Si $rt - s^2 > 0$ alors f admet un extremum local en (x_0, y_0).
  De plus, si $r > 0$, il s'agit d'un minimum ; sinon, c'est un maximum.
- Si $rt - s^2 < 0$, f n'admet pas d'extremum en (x_0, y_0).
- Si $rt - s^2 = 0$, on ne pas conclure directement.

Exemple 25.

Soit $f : (x, y, z) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$ admet deux points critiques en $(0, 0)$ et $(1, 1)$: le premier n'est pas un extremum de f et le second est un minimum local de f.

Exercice 30.

Étudier les extrema de :

1. $f : (x, y) \mapsto y^2(y^2 - x^4)$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. $g : (x, y) \mapsto y^2 - x^2 + \dfrac{x^4}{2}$ sur $\mathbb{R}^2$.

4. Extrema liés : optimisation sous contraintes

Théorème 9. *Théorème d'optimisation sous contrainte*

Soit $f, g : U \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe C^1 sur U, $X = \{x \in U \mid g(x) = 0\}$ et $a \in X$.
Si la restriction $f_{|X}$ de f à X admet un extremum local en a et $\mathrm{d}g(a) \neq 0$, alors $\mathrm{d}f(a)$ est colinéaire à $\mathrm{d}g(a)$ *i.e.* $\nabla f(a)$ est colinéaire à $\nabla g(a)$.