Chapitre XVI

Équations différentielles linéaires

Table des matières

Dans ce chapitre, le corps $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I désigne un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

Partie A

Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Dans cette partie E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie.

1. Définitions

Définition 1. *Équation différentielle linéaire d'ordre* 1

Soit $a : I \to \mathcal{L}(E)$ et $b : I \to E$ des applications continues.

- On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre** 1 une équation (E) de la forme :
$$x' = a(t)(x) + b(t). \qquad (E)$$
où l'inconnue x est une fonction dérivable de I dans E.
- Une fonction $f : I \to E$ est une **solution** de E si, pour tout $t \in I$,
$$f'(t) = a(t)(f(t)) + b(t).$$
- On appelle **équation homogène** associée à (E), l'équation différentielle (E_h) linéaire d'ordre 1 :
$$x' = a(t)(x). \qquad (E_h)$$

Définition 2. *Traduction matricielle*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A : I \to M_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to M_{n,1}(\mathbb{K})$.
On appelle **système différentielle linéaire d'ordre** 1 une équation différentielle (S) linéaire d'ordre 1 de la forme :
$$X' = A(t)X + B(t). \qquad (S)$$
où l'inconnue X est une fonction dérivable de I dans $M_{n,1}(\mathbb{K})$.

Question 1.

Pourquoi la terminologie "système linéaire" employée dans la définition précédente est-elle justifiée ?

Réponse.

Si, pour $t \in I$, on note $A(t) = (a_{ij}(t))_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$, $B(t) = (b_i(t))_{1\leq j\leq n}$ et $X(t) = (x_i(t))_{1\leq j\leq n}$, l'équation (S) est équivalente au système :

$$(S)\begin{cases} x_1' &= a_{11}(t)x_1 &+ \dots + & a_{1n}(t)x_n &+ & b_1(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_1' &= a_{n1}(t)x_1 &+ \dots + & a_{nn}(t)x_n &+ & b_n(t) \end{cases}$$

Remarque 1. *Traduction matricielle*

Ainsi, étant donnée une base $\mathcal{B}$ de E, une équation différentielle $x' = a(t)(x) + b(t)$ linéaire d'ordre 1 est équivalente au système linéaire $X' = A(t)X + B(t)$ où :

— $A(t) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a(t))$ et $B(t) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(B(t))$;

— l'inconnue $X(t)$ est obtenue de même par $X(t) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x(t))$.

2. Structure de l'ensemble des solutions

Proposition 1.

Soit $(E) : x' = a(t)(x) + b(t)$ une équation différentielle linéaire d'ordre 1. L'application $x \mapsto \{x'(t) - a(t)(x(t))\}$ est une application linéaire de $C^1(I,E)$ dans $C(I,E)$.

Proposition 2.

Soit (E) une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

L'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène (E_h) est un sous-espace vectoriel de $C^1(I,E)$.

Proposition 3.

Soit (E) une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et $\mathcal{S}_h$ l'ensemble des solutions de (E_h).
Soit f_p une solution de (E). Alors l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) s'exprime :

$$\mathcal{S} = f_p + \mathcal{S}_h = \{f_p + f_h \mid f_h \in \mathcal{S}_h\}.$$

Proposition 4. *Superposition*

Soit $(E) : x' = a(t)(x) + b(t)$ une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
On suppose que $b = \lambda_1 b_1 + \mu_1 b_2$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ et $b_1, b_2 \in C(I,E)$.

Si f_1, f_2 sont des solutions respectives de :

$$(E_1) : x' = a(t)(x) + b_1(t) \quad \text{et} \quad (E_2) : x' = a(t)(x) + b_2(t)$$

alors $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est solution de (E).

3. Problème de Cauchy

Définition 3. *Problème de Cauchy*

Soit $(E) : x' = a(t)(x) + b(t)$ une et t_0. On appelle **problème de Cauchy** la donnée d'une équation différentielle $(E) : x' = a(t)(x) + b(t)$ linéaire d'ordre 1 et d'une **condition initiale** $x(t_0) = x_0$ où $t_0 \in I$ et $x_0 \in E$.
Autrement dit, un problème de Cauchy est un système d'inconnue $x : I \to E$ de la forme :

$$\begin{cases} (E) : & x' = a(t)(x) + b(t) \\ (\text{C.I.}) & x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Remarque 2.

Résoudre un problème de Cauchy revient donc à déterminer toutes les solutions f de $(E) : x' = a(t)(x) + b(t)$ qui vérifient $f(t_0) = x_0$.

Théorème 1. *Théorème de Cauchy linéaire*

Soit $(E) : x' = a(t)(x) + b(t)$ une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
Pour tout $(t_0, x_0) \in I \times E$, il existe **une unique solution** f au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} (E) : & x' = a(t)(x) + b(t) \\ (\text{C.I.}) & x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Lemme 1.

Soit $(E) : x' = a(t)(x) + b(t)$ une équation différentielle linéaire d'ordre 1, $t_0 \in I$ et $\mathcal{S}_h$ l'ensemble des solutions de (E_h).
L'application

$$\text{eval}_{t_0} : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_h & \to & E \\ f & \mapsto & f(t_0) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Théorème 2.

Soit $(E) : x' = a(t)(x) + b(t)$ une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et $\mathcal{S}_h$ l'ensemble des solutions de (E_h). L'espace vectoriel $\mathcal{S}_h$ est de dimension finie et

$$\dim(\mathcal{S}_h) = \dim(E).$$

Partie B

Résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants

1. Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice

Dans ce paragraphe, n est un entier naturel non nul et E est un espace vectoriel de dimension finie n sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

a. Définitions

On rappelle ici la définition d'une exponentielle d'un endomorphisme ou d'une matrice vue dans un précédent chapitre.

Lemme 2.

Soit $a \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$. Les séries $\sum \frac{a^n}{n!}$ et $\sum \frac{A^n}{n!}$ sont convergentes dans, respectivement, $\mathcal{L}(E)$ et $M_n(\mathbb{K})$.

Définition 4.

Soit $a \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$.

— On appelle **exponentielle de l'endomorphisme** a et on note $\exp(a)$ ou encore e^a, l'endomorphisme de E :

$$\exp(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}.$$

— On appelle **exponentielle de la matrice** A et on note $\exp(A)$ ou encore e^A, la matrice de $M_n(\mathbb{K})$:

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Proposition 5.

Soit $a \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E. On a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\exp(a)\right) = \exp\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a)\right)$$

b. Dérivation de $t \mapsto \exp(tA)$

Théorème 3.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. L'application $\varphi : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$\varphi : t \mapsto \exp(tA),$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi'(t) = A.\exp(tA) = A.\varphi(t).$$

Démonstration.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\varphi_n : t \mapsto \frac{(tA)^n}{n!}$. Vérifions les hypothèses du théorème d'interversion dérivation/somme :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\varphi_n'(t) = \frac{nt^{n-1}A^n}{n!}.$$

— D'après le lemme 2, $\sum \varphi_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ - vers $t \mapsto \exp(tA)$.

— Soit $a > 0$. On se donne une norme $\|\cdot\|$ sour multiplicative sur $M_n(\mathbb{K})$.

<u>CVN sur $[-a, a]$:</u>

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [-a, a]$, on a $\|\varphi_0(t)\| = 0$ et, si $n \geq 1$:

$$\|\varphi_n'(t)\| = \left\| \frac{t^{n-1}A^n}{(n-1)!} \right\| \leq \frac{a^{n-1}\|A\|^n}{(n-1)!},$$

donc φ_n' est bornée sur $[-a, a]$ et on a, à partir du rang 1, pour tout $n \geq 1$:

$$\|\varphi_n'\|_\infty \leq \frac{a^{n-1}\|A\|^n}{(n-1)!} = u_n.$$

Or la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge (d'après la règle de D'Alembert par exemple), donc par comparaison, $\sum \|\varphi_n'\|_\infty$ converge.

Par suite, $\sum \varphi_n'$ converge normalement sur $[-a, a]$ et donc uniformément sur $[-a, a]$.

Par suite, $\sum \varphi_n'$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Ainsi, d'après le théorème d'interversion dérivation/somme, φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\varphi'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{nt^{n-1}A^n}{n!} = A \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}A^{n-1}}{(n-1)!} = A \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tA)^n}{n!} = A.\exp(tA).$$

□

Corollaire 1.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. L'application $\varphi : t \mapsto \exp(tA)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a, pour $t \in \mathbb{R}$:

$$\varphi^{(k)}(t) = A^k \exp(tA) = A^k \varphi(t).$$

c. Propriétés de l'exponentielle

Proposition 6.

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Si A et B commutent, alors A et $\exp(B)$ commutent.

Théorème 4.

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Si A et B commutent, alors $\exp(A)$ et $\exp(B)$ commutent et :

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$$

On se sert souvent du théorème précédent pour calculer l'exponentielle d'une matrice A trigonalisable mise sous la forme $A = P(D+N)P^{-1}$ où D est diagonalisable, N nilpotente et D, N commutent (*remarque : il est toujours possible d'écrire une matrice trigonalisable sous cette forme, il s'agit de la décomposition de Dunford de cette matrice).*

Exercice 1.

Déterminer l'exponentielle de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Correction.

On $A = P(I_2 + 2N)P^{-1}$ où $N = E_{12}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $I_2, 2N$ commutent.

Ainsi, on a $\exp(A) = P\exp(I_2+2N)P^{-1} = P\exp(I_2)\exp(2N)P^{-1}$. Or :

- $\exp(I_2) = eI_2$;
- $\exp(2N) = I_2 + 2N$ car N est niloptente d'indice 2 et donc

$$\exp(2N) = \sum_{n=0}^{1} \frac{2^n N^n}{n!} = I_2 + 2N.$$

Ainsi, on a :

$$\exp(A) = Pe(I_2+2N)P^{-1} = eA.$$

2. Équation homogène à coefficients constants

Dans ce paragraphe, on considère un système différentielle homogène de la forme $X' = AX$ où $A \in M_n(\mathbb{K})$ (A ne dépend pas du paramètre t).

a. Solution générale du problème de Cauchy

Théorème 5.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $X_0 \in M_{n,1}(\mathbb{K})$. L'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} (E_h): & X' = AX \\ (\text{C.I.}) & X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

est donnée par :

$$f : t \mapsto \exp\left((t - t_0)A\right) X_0.$$

b. Résolution pratique de l'équation homogène

Considérons un système différentiel homogène $(E_h) : X' = AX$ à coefficients constants dans $M_n(\mathbb{R})$.

Utilisation de l'exponentielle de matrice.

- On calcule l'exponentielle de la matrice tA pour $t \in \mathbb{R}$.
  Le calcul est "simple" si la matrice est diagonalisable ou nilpotente par exemple.
- L'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de $(E_h) : X' = AX$ est :

$$\mathcal{S}_h = \{f : t \mapsto \exp(tA) . C \mid C \in M_{n,1}(\mathbb{R})\}$$

Dans la pratique, le calcul d'une exponentielle de matrice n'est pas aisé. Il en est donc de même pour le calcul explicite des solutions d'un système différentiel homogène d'ordre A. On peut toutefois distinguer des cas où on dispose de méthodes alternatives pour déterminer explicitement les solutions. *Dans chacun des exercices suivants, on effectuera également le calcul de l'exponentielle pour comparer les méthodes de résolution.*

1er cas : A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

- On détermine les valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ (pas forcément deux à deux différentes) et $(V_1, ...V_n)$ une base de vecteurs propres A avec V_i associé à λ_i. On note P la matrice des vecteurs propres de A et $D = P^{-1}AP$.
- Le système $X' = AX$ est équivalent au système $Y' = DY$ où $Y = P^{-1}X$.
- On résout le système diagonale $Y' = DY$ et en utilisant la relation $X = PY$ et on montre ainsi que la famille $(f_1, ..., f_n)$ de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que :

$$f_i : t \mapsto e^{\lambda_i t} V_i$$

  forme une base de l'espace $\mathcal{S}_h$ des solutions de (E_h).

Exercice 2.

Résoudre le système différentiel $X' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} X$.

Correction.

La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable. Les valeurs propres de A sont 1 et 4 avec $m(1) = 2$ et $m(4) = 1$. De plus, (V_1, V_2, V_3) est une base de vecteurs propres avec V_1, V_2 associé à 1 et V_3 associé à 4 où :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Par suite, $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

— Résolution avec la méthode :

Le système $X' = AX$ est équivalent à $Y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} Y$ avec $Y = P^{-1}X$. On a donc le système diagonal :

$$\begin{cases} y_1' &= y_1 \\ y_2' &= \quad y_2 \\ y_3' &= \quad\quad 4y_3' \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} y_1 = & C_1 e^t \\ y_2 = & C_2 e^t \\ y_3 = & C_3 e^{4t} \end{cases}$$

De plus, $X = PY$, donc :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 e^t \\ C_2 e^t \\ C_3 e^{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^t + C_3 e^{4t} \\ C_2 e^t + C_3 e^{4t} \\ -C_2 e^t - C_2 e^t C_3 e^{4t} \end{pmatrix}$$

Autrement dit, comme d'après le théorème de Cauchy linéaire, $\mathcal{S}_h$ est de dimension 3 et que V_1, V_2, V_3 sont linéairement indépendant, la famille (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathcal{S}_h$ où :

$$f_1 : t \mapsto e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad f_2 : t \mapsto e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad f_2 : t \mapsto e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

— Résolution avec l'exponentielle :

Pour $t \in \mathbb{R}$, on a $tA = P(tD)P^{-1}$, donc :

$$\exp(A) = P\exp(tD)P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{4t} \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2e^t + e^{4t} & e^{4t} - e^t & e^{4t} - e^t \\ e^{4t} - e^t & 2e^t + e^{4t} & e^{4t} - e^t \\ e^{4t} - e^t & e^{4t} - e^t & 2e^t + e^{4t} \end{pmatrix}$$

Ainsi, l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions est :

$$\mathcal{S}_h = \{ f : t \mapsto \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2e^t + e^{4t} & e^{4t} - e^t & e^{4t} - e^t \\ e^{4t} - e^t & 2e^t + e^{4t} & e^{4t} - e^t \\ e^{4t} - e^t & e^{4t} - e^t & 2e^t + e^{4t} \end{pmatrix} .C \mid C \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \}.$$

2eme cas : A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$.

- On procède de la même façon que pour A diagonalisable dans $\mathbb{R}$ mais les vecteurs de la famille $(f_1, ..., f_n)$ ne sont pas tous réels. On doit donc déterminer une famille $(g_1, ..., g_n)$ de fonctions à valeurs réelles qui forment une base de $\mathcal{S}_h$.
- Considérons une valeur propre complexe $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et V un vecteur propre associé. Alors, comme A est à coefficients réels, $\bar{\lambda}$ est également valeur propre et $\bar{V}$ est vecteur propre associé à $\bar{V}$.

  Ainsi, pour $f : t \mapsto e^{\lambda t}V$, $(f, \bar{f})$ est un couple de solution de $X' = AX$ vu comme une équation complexe.
  On pose alors :

$$g_1 = \frac{1}{2}(f + \bar{f}) = \mathrm{Re}(f) \text{ et } g_2 = \frac{1}{2i}(f - \bar{f}) = \mathrm{Im}(f).$$

  Alors, (g_1, g_2) est une famille libre de solutions à valeurs réelles de $X' = AX$.
- On procède ainsi pour toutes les couples $(\lambda, \bar{\lambda})$ de valeurs propres complexes et on forme, en regroupant avec les vecteurs f_i associés aux valeurs propres réelles, une famille de n vecteurs réels solutions de $X' = AX$ et ainsi base de $\mathcal{S}_h$ (puisqu'il est de dimension n).

Exercice 3.

Résoudre le système différentiel $X' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X$.

Correction.

La polynôme caractéristique de A est $X^3 - X^2 + X + 1 = (X-1)(X-i)(X+i)$ qui est scindé à racines simples (dans $\mathbb{C}$) donc A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ - mais pas dans $\mathbb{R}$ puisque $X^2 + 1$ est un facteur irréductible dans $\mathbb{R}$ du polynôme caractéristique. De plus, (V_1, V_2, V_3) est une base de vecteurs propres avec V_1 associé à 1, V associé à i et $\bar{V}$ associé à $-i = \bar{i}$ où :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par suite, $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} P^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1-i & 1+i \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, $X' = AX$ est équivalent à $Y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} Y$ avec $Y = P^{-1}X$. On a donc le système diagonal :

$$\begin{cases} y_1' &= y_1 & & \\ y_2' &= & iy_2 & \\ y_3' &= & & -iy_3' \end{cases}$$

D'où :

$$Y_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y_2(t) = e^{it} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y_3(t) = e^{-it} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Ainsi, en utilisant $X = PY$ on obtient la famille $(f_1, f, \bar{f})$ de solutions de l'équation "complexe" $X' = AX$ où

$$f_1 : t \mapsto e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \; ; \quad f : t \mapsto e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on considère :

$$g_1 : t \mapsto \frac{1}{2}(f + \bar{f}) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(t) - \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } g_2 : t \mapsto \frac{1}{2}(f - \bar{f}) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par suite, (f_1, g_1, g_2) est une base de $\mathcal{S}_h$.

3eme cas : A est trigonalisable.

- On trigonalise A sous la forme $A = PTP^{-1}$.
- On résout le système $Y' = TY$ où $X = PY$. Ce système est triangulaire supérieur : on le résout en remontant ligne par ligne les équations.
- On récupère les solutions en utilisant $X = PY$ et on procède de la même façon que dans la méthode précédente si certaines valeurs propres sont complexes.

Exercice 4.

Résoudre le système différentiel $X' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} X$.

Correction.

La polynôme caractéristique de A est $X^3 - X^2 + X + 1 = (X-2)^3$ qui est scindé dans $\mathbb{R}$ donc A est trigonalisable dans $\mathbb{R}$. Elle n'est pas diagonalisable car elle possède 2 pour unique valeur propre et $A \neq 2I_2$.

On montre que $E_2(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ En complétant avec un troisième vecteur qui n'appartient pas à $E_2(A)$ - par exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on obtient la trigonalisation :

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} \text{ où } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, en posant $Y = P^{-1}X$, $X' = AX$ est équivalent à $Y' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} Y$. On a donc le système triangulaire :

$$\begin{cases} y_1' &= 2y_1 \\ y_2' &= \quad\quad 2y_2 + \ y_3 \\ y_3' &= \quad\quad\quad\quad\quad y_3 \end{cases}$$

D'où il existe $C_1, C_3 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$y_1 : t \mapsto C_1 e^{2t} \text{ et } y_3 : t \mapsto C_3 e^{2t}$$

Ainsi, on a $y_2' = 2y_2 + C_3 e^{2t}$. On vérifie par la mêthode habituelle qu'il existe $C_2 \in \mathbb{R}$ tel que $y_2 : t \mapsto (C_2 + tC_3)e^{2t}$.
Par suite,

$$Y : t \mapsto e^{2t} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 + tC_3 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

Il en résulte que :

$$X = PY : t \mapsto e^{2t} \begin{pmatrix} C_2 + C_3(t+1) \\ C_1 - C_2 - tC_3 \\ C_2 + tC_3 \end{pmatrix} \quad \left(= C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (C_2 + tC_3)e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

3. Recherche d'une solution particulière

On considère un système différentiel $(E) : X' = A(t)X + B(t)$. Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la recherche effective d'une solution f_p de cette équation.

Méthode de variation des constantes

- On détermine une base $(f_1, ..., f_n)$ de solutions de l'équation homogène $(E_h) : X' = A(t)X$. On note alors, pour $t \in I$:

$$f_p(t) = C_1(t)f_1(t) + \ldots + C_n(t)f_n(t).$$

  où $C_1, ..., C_n$ sont des fonctions dérivables de I dans $\mathbb{K}$.
- Après avoir calculé f_p', on reporte f_p dans l'équation (E) et, en remarquant que, pour tout i, $f_i \in \mathcal{S}_h$, on obtient :

  f_p est solution de (E) si, et seulement si, $C_1'(t)f_1(t) + \ldots + C_n'(t)f_n(t) = B(t)$.
- On résout alors le système précédent afin de déterminer les C_i' puis les C_i par primitivation.

Exercice 5.

Résoudre les systèmes différentiels :

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad X' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X + e^t \begin{pmatrix} (t+1)^3 \\ t^2 \end{pmatrix}$$

Correction.

1. On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$.
Tout d'abord, on résout l'équation homogène $X' = AX$. L'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de cette équation est :
$$\mathcal{S}_h = \{t \mapsto \exp(tA).C \mid C \in M_{2,1}(\mathbb{R})\}.$$
Calculons $\exp(tA)$ pour $t \in \mathbb{R}$. On remarque que A est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormale et que $\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont vecteurs propres de A associés aux valeurs propres 3 et -1 respectivement. Ainsi, on a :
$$A = PD{}^tP \text{ où } D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
Par suite, on a
$$\exp(tA) = P\exp(tD){}^tP = P\begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}{}^tP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{3t}+e^{-t} & e^{3t}-e^{-t} \\ e^{3t}-e^{-t} & e^{3t}+e^{-t} \end{pmatrix}$$
Il en résulte que :
$$\mathcal{S}_h = \{t \mapsto \ \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Partie C

Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre supérieur

1. Définitions

Définition 5.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ une famille d'applications continues de I dans $\mathbb{K}$ et $b : I \to \mathbb{K}$ une application continue.
On appelle **équation différentielle linéaire scalaire d'ordre** n, une équation de la forme :

$$(E) : \ y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t).$$

On appelle **équation homogène** associée à (E) l'équation :

$$(E_h) : \ y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0.$$

Proposition 7.

Si les a_i et b sont de classe C^k sur I et si $f : I \to \mathbb{K}$ est une solution de (E), alors f est de classe C^{n+k} sur I.

Démonstration.

Par définition de l'équation différentielle (E), une solution de (E) est n fois dérivable sur I.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_k =$"si les a_i et b sont de classe C^k sur I, alors toute solution de (E) est de classe C^{n+k} sur I".
Montrons, par récurrence sur $\mathbb{N}$ que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_k$ est vraie.

- Initialisation : Montrons $\mathcal{P}_0$. On suppose les a_i et b continues sur I. Soit f une solution de (E) sur I. Alors f est n fois dérivable sur I et ainsi, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $f^{(i)}$ est $n-i$ fois dérivable et donc en particulier continue sur I car $n - i \geq 1$. De plus, on a :

$$f^{(n)} = -a_{n-1}.f^{(n-1)} - \ldots - a_1.f' - a_0(t)f + b$$

  donc $f^{(n)}$ est continue sur I comme somme de produits de fonctions continues sur I.
  Par suite, f est de classe C^n sur I car n fois dérivable sur I et de dérivée n-ième continue sur I. Il en résulte que $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}_k$ vraie. Montrons $\mathcal{P}_{k+1}$.
  On suppose les a_i et b sont de classe C^{k+1} sur I et soit f une solution de (E) sur I. Alors en particulier, les a_i et b sont de classe C^k sur I et donc, par hypothèse de récurrence, f est de classe C^{n+k} sur I. Alors pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $f^{(i)}$ est de classe C^{n+k-i} sur I et donc de classe C^{k+1} sur I car $n + k - i \geq k + 1$. De plus, on a :

$$f^{(n)} = -a_{n-1}.f^{(n-1)} - \ldots - a_1.f' - a_0(t)f + b$$

donc $f^{(n)}$ est de classe C^{k+1} sur I comme somme de produits de fonctions C^{k+1} sur I. Par suite, f est de C^{n+k+1} sur I. Il en résulte que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

On a donc montré par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, si les a_i et b sont de classe C^k sur I, alors toute solution de (E) est de classe C^{n+k} sur I. □

Proposition 8. *Traduction matricielle*

Soit $(E) : y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t)$ une équation différentielle scalaire d'ordre n.

On considère les applications $A : I \to M_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to M_{n,1}(\mathbb{K})$ définies par :

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \ldots & \ldots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

Alors, une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ est solution de (E), si, et seulement si, la fonction de I dans $\mathbb{K}$ telle que pour $t \in I$:

$\varphi(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \\ \vdots \\ f^{(n)}(t) \end{pmatrix}$ est solution du système différentiel linéaire d'ordre 1 donné par $X' = A(t)X + B(t)$.

Remarque 3.

La matrice $A(t)$ est exactement la transposée de la matrice compagnon du polynôme $X^n + a_{n-1}(t)X^{n-1} + \ldots + a_1(t)X + a_0(t)$.

2. Structure de l'ensemble des solutions

On considère $(E) : y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t)$ une équation différentielle scalaire d'ordre n.

Proposition 9.

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E) et $\mathcal{S}_h$ l'ensemble des solutions de (E_h). L'ensemble $\mathcal{S}_h$ est un espace vectoriel et pour f_p une solution particulière de (E), on a :

$$\mathcal{S} = f_p + \mathcal{S}_h = \{f_p + f_h \mid f_h \in \mathcal{S}_h\}.$$

Ainsi, $\mathcal{S}$ est une sous-espace affine dirigé par $\mathcal{S}_h$.

Définition 6. *Problème de Cauchy*

Soit $t_0 \in I$ et $(y_0, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$. On appelle **problème de Cauchy** est un système d'inconnue $y : I \to \mathbb{K}$ de la forme :

$$\begin{cases} (E) : & y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t) \\ \text{(C.I.)} & y(t_0) = y_0 \\ & \vdots \\ & y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

Théorème 6.

Soit $t_0 \in I$ et $(y_0, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$. Il existe une unique solution au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} (E) : & y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t) \\ \text{(C.I.)} & y(t_0) = y_0 \\ & \vdots \\ & y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

Lemme 3.

Soit $t_0 \in I$ et $\mathcal{S}_h$ l'ensemble des solutions de (E_h).
L'application

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_h & \to & \mathbb{K}^n \\ f & \mapsto & (f(t_0), \dots, f^{(n-1)}(t_0)) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Théorème 7.

Soit $(E) : y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t)$ une équation différentielle scalaire d'ordre n.
L'espace vectoriel $\mathcal{S}_h$ des solutions de (E_h) est de dimension finie et

$$\dim(\mathcal{S}_h) = n.$$

Partie D

Méthode et exemples de résolution d'une équation différentielle linéaire scalaire

Contexte et notations :

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère une équation de la forme une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n qui n'est pas sous forme normalisée :

$$(E): \ a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(t)y = b(t).$$

où b et a_i, pour $i \in [\![0, n]\!]$, sont des fonctions définies sur un intervalle I ouvert non vide de $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E).

On appelle équation homogène associée à (E) et on note (E_h) l'équation différentielle :

$$(E_h): \ a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(t)y = 0.$$

On note $\mathcal{S}_h$ l'ensemble des solutions de (E_h).

On note $Z = \{t \in \mathbb{R} \mid a_n(t) = 0\}$ l'ensemble des zéros de a_n.

On suppose que Z est un ensemble au plus dénombrable de cardinal $m \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ tel que les $z \in Z$ sont **isolés** dans I i.e.

$$I \setminus Z = \bigsqcup_{k=1}^{m} I_k.$$

où les I_k sont des intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$ dont les bornes finies sont des éléments de Z et que, pour tout k, il existe $\delta > 0$ tel que la longueur de I_k est supérieure ou égale à δ.

En particulier, pour $k \in [\![0, m]\!]$ - ou $\mathbb{N}$ si $m = \infty$, a_n ne s'annule pas sur I_k et note :

$$(E)_k: \ y^{(n)} + \frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)}y^{(n-1)} + \ldots + \frac{a_0(t)}{a_n(t)}y = \frac{b(t)}{a_n(t)}.$$

l'équation différentielle normalisée sur l'intervalle I_k et équivalente à (E) sur I_k ; on note $(E_h)_k$ l'équation homogène associée à $(E)_k$.

On note $\mathcal{S}_k$ l'ensemble des solutions de $(E)_k$ et $\mathcal{S}_{kh}$ l'ensemble des solutions de $(E_h)_k$.

1. Une méthode de résolution

On souhaite résoudre l'équation (E) sur I c'est-à-dire on cherche l'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions n-fois dérivables solutions de (E) sur I.

a. Description de la méthode

Méthode de résolution de (E) sur I :

- On détermine l'ensemble Z des zéros de a_n (qui sont isolés) et on condidère les intervalles I_k tels que $I \setminus Z = \bigsqcup_{k=1}^{m} I_k$.

- **Pour chaque intervalle** I_k, a_n ne s'annulant pas sur I_k, on résout l'équation normalisée :

$$(E)_k\ :\ y^{(n)} + \frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)} y^{(n-1)} + \ldots + \frac{a_0(t)}{a_n(t)} y = \frac{b(t)}{a_n(t)}.$$

  avec la méthode usuelle :

  ⋆ On résout l'équation homogène $(E_h)_k$ (dont l'ensemble des solutions $\mathcal{S}_{kh}$ est un espace vectoriel de dimension n).

  ⋆ On détermine une solution particulière f_p de l'équation $(E)_k$.

  Remarque importante : il est recommandé de commencer par essayer de trouver une solution particulière f_p de l'équation (E) sur I directement ; l'avantage est qu'elle sera solution de tous les $(E)_k$!

  ⋆ On finalise la résolution de $(E)_k$ en écrivant $\mathcal{S}_k = f_p + \mathcal{S}_{hk}$.

- Soit f une fonction n-fois dérivable **sur I**. On remarque alors que f est solution de (E) si, et seulement si, f est solution de $(E)_k$ sur chaque I_k. Les équations (E_k) étant résolues, cela donne une expression explicite de f sur chaque I_k.
  Mais comme f est n-fois dérivable sur I, on doit recoller les "morceaux" en chaque zéro z dans Z :

  ⋆ f étant continue en z, on calcule les limites $\lim\limits_{t\to z^-} f(t)$ et $\lim\limits_{t\to z^+} f(t)$. Ces limites doivent être finies et égales ; puis on en déduit des conditions sur la forme de f (et notamment sur les constantes venant de la résolution des équations homogènes) ;

  ⋆ f étant de classe C^1 en z, on effectue le même principe avec $\lim\limits_{t\to z^-} f'(t)$ et $\lim\limits_{t\to z^+} f'(t)$;

  ⋆ etc ...

  ⋆ Et attention avec la dernière dérivée : f étant n-fois dérivable mais pas supposée C^n, on doit cette fois égaliser les limites, qui doivent de nouveau être finies, $\lim\limits_{t\to z^-} \dfrac{f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(z)}{t-z}$ et $\lim\limits_{t\to z^+} \dfrac{f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(z)}{t-z}$.

- On obtient l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) dont la dimension *en tant qu'espace affine* dépend du nombre de constantes "provenant" des $\mathcal{S}_{hk}$.

Remarque 4.

Comme on l'a vu dans la proposition 7, si les coefficients de l'équation **normalisée** sont de classe C^k, les solutions de (E) sont de classe C^{k+n} ; mais **attention !**, si l'équation n'est pas sous forme normalisée, même si les coefficients ont une bonne régularité, les solutions peuvent n'être que n fois dérivables (condition nécessaire pour être solution) et pas de classe C^n ou plus ! D'où la dernière condition différente des précédentes pour le recollement des dérivées de solutions dans la méthode précédente.

L'exercice suivant donne un exemple d'équation différentielle linéaire d'ordre 2 non normalisée dont les coefficients sont de classe C^∞ et qui possède des solutions qui ne sont pas de classe C^2 !

Exercice 6.

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 homogène non normalisée dont les coefficients sont des fonctions polynomiales.
3. Qu'en conclure quant à la régularité des solutions d'une équation différentielle non normalisée au regard de celle de ses coefficients ?

Correction.

1. Sur $\mathbb{R}^*$, f est de classe C^∞ comme produit et composée de fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^*$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$f'(x) = 4x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right);$$

et

$$f''(x) = (12x^2 - 1)\sin\left(\frac{1}{x}\right) - 6x\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

— *Continuité.* Comme sin est bornée sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème des gendarmes, $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 = f(0)$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

— *Dérivée.* On a f continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et, toujours d'après le théorème des gendarmes, $f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$; donc, d'après le théorème de la limite de la dérivée, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $f'(0) = 0$.

— *Dérivée seconde.* On vérifie que f'' n'admet pas de limite en 0 à cause de son terme $-\sin(\frac{1}{x})$ et que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{x} = \lim_{x\to 0} 4x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Par suite, f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f''(0) = 0$ mais n'est pas de classe C^2 car f'' n'est pas continue en 0.

2. On procède par tatonnement : par exemple, on commence par compenser les termes en $\cos(\frac{1}{x})$ en faisant $xf''(x) - 6f'(x)$ et on continue ce jeu en supprimant les $\sin(\frac{1}{x})$ grâce à $f(x)$ pour, au final, trouver que f est solution de :

$$x^4 y'' - 6x^3 y' + (12x^2 + 1)y = 0.$$

3. Les coefficients de l'équation précédente sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ mais la solution f de cette équation est seulement deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ mais pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}$!
Ainsi, contrairement au cas des équations normalisées, la régularité des coefficients n'influe pas sur la régularité des solutions (en fait si, mais seulement sur les intervalles où le coefficient devant $y^{(n)}$ ne s'annule pas !).

b. Structure de l'ensemble des solutions

Proposition 10.

L'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation (E_h) : $a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(t)y = 0$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $D_n(I, \mathbb{K})$ des fonctions n fois dérivables de I dans $\mathbb{K}$ et on a :

$$\dim(\mathcal{S}_h) \leq mn$$

où on rappelle que m désigne le nombre de zéros de a_n sur I (avec potentiellement $m = +\infty$).

Démonstration.

— L'application $y \mapsto a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(t)y$ est une application linéaire de $D_n(I, \mathbb{K})$ dans $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ comme combinaison linéaire des applications $y \mapsto a_i(t)y^{(i)}$ qui sont linéaires par linéarité de la dérivation et par bilinéarité du produit terme à terme de deux fonctions.
Par suite, $\mathcal{S}_h$ est un sous-espace vectoriel de $D_n(I, \mathbb{K})$ comme noyau de cette application linéaire.

— On considère l'application φ telle que, pour $f \in \mathcal{S}_h$:

$$\varphi(f) = \left(f_{|I_k}\right)_{k \in [\![1,m]\!]} \in \prod_{i=1}^{m} \mathcal{F}(I_k, \mathbb{K}).$$

Alors, φ est linéaire par linéarité de la restriction et on remarque que si f est solution de (E_h) alors, pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, a_n ne s'annulant pas sur I_k, la restriction $f_{|I_k}$ de f sur I_k est solution de l'équation homogène normalisée :

$$(E_h)_k : \ y^{(n)} + \frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)} y^{(n-1)} + \ldots + \frac{a_0(t)}{a_n(t)} y = 0$$

sur I_k.
De plus, pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, d'après le théorème 7, l'ensemble $\mathcal{S}_{hk}$ des solutions de $(E_h)_k$ sur I_k est un espace vectoriel de dimension n.

Donc φ est une application linéaire de $\mathcal{S}_h$ dans le produit cartésien $\displaystyle\prod_{k=1}^{m} \mathcal{S}_{hk}$.

Montrons que φ est injective. Soit $f \in \operatorname{Ker}(\varphi)$. Alors f est continue sur I car n fois dérivable sur I avec $n \geq 1$ et pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, $f_{|I_k} = 0$.
Montrons alors que $f(z) = 0$ pour tout $z \in Z$. Soit $z \in Z$. Par hypothèse, z est une borne d'un certain I_k qui est ouvert non vide. Par suite, on a, par continuité de f en z :

$$f(z) = \lim_{\substack{t \to z \\ t \in I_k}} \underbrace{f(t)}_{= f_{|I_k}(t)} = \lim_{\substack{t \to z \\ t \in I_k}} 0 = 0.$$

Par suite, f est nulle sur $Z \sqcup \bigsqcup_{i=1}^{m} I_k = I$. Ainsi φ est injective.
Comme φ est une application linéaire injective, on a donc :

$$\dim(\mathcal{S}_h) \leq \dim\left(\prod_{k=1}^{m} \mathcal{S}_{hk}\right) = \sum_{k=1}^{m} \dim(\mathcal{S}_{hk}) = mn.$$

$\square$

Remarque 5.

Comme on va le voir avec les exemples et exercices suivants, la dimension de $\mathcal{S}_h$ peut prendre toutes les valeurs entières possibles entre 0 et mn.

Proposition 11.

Soit $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation (E) : $a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(t)y = b(t)$ sur I et $\mathcal{S}_h$ l'ensemble des solution de l'équation homogène sur I. Si f_p est une solution de (E) sur I alors :

$$\mathcal{S} = f_p + \mathcal{S}_h = \{f_p + f_h \mid f_h \in \mathcal{S}_h\}.$$

Ainsi, $\mathcal{S}$ est une sous-espace affine dirigé par $\mathcal{S}_h$.

2. Ordre 1 : Exemples de résolutions complètes

a. Exemple avec $\mathcal{S}_h$ de dimension 2

Exemple 1.

L'ensemble des fonctions dérivables solutions de (E) : $ty' - 2y = 21t^3e^t - 5t$ sur $\mathbb{R}$ est :

$$\mathcal{S} = \left\{ f : t \mapsto 21t^2e^t + 5t + \begin{cases} C_1t^2 & \text{si } t \geq 0 \\ C_2t^2 & \text{si } t < 0 \end{cases} \;\middle|\; C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

La fonction $t \mapsto t$ s'annule sur $\mathbb{R}$ en 0. On considère alors les intervalles de résolution de l'équation normalisée $I_1 =]0, +\infty[$ et $I_2 =]-\infty, 0[$.

— Résolution de l'équation sur I_1 : Sur I_1, l'équation est équivalente à $(E)_1$: $y' - \frac{2}{t}y = 21t^2e^t - 5$.

- Résolution de l'équation homogène $(E_h)_1$: $y' - \frac{2}{t}y = 0$.

  Une primitive de $t \mapsto \frac{2}{t}$ sur I_1 est $t \mapsto 2\ln(t)$. Comme, pour tout $t \in I_1$, $e^{2\ln(t)} = t^2$, l'ensemble $\mathcal{S}_{h1}$ de $(E_h)_1$ sur I_1 est :

  $$\mathcal{S}_{h1} = \left\{t \mapsto C_1t^2 \mid C_1 \in \mathbb{R}\right\}.$$

- Recherche d'une solution particulière de $(E)_1$.
  On remarque que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

  $$21t^2e^t - 5 = 21 \times (t^2e^t) - 5 \times 1$$

  Ainsi si g_p et h_p sont des solutions de respectivement $y' - \frac{2}{t}y = t^2e^t$ et $y' - \frac{2}{t} = 1$, alors d'après le principe de superposition, $f_p = 21g_p - 5h_p$ est solution de $(E)_1$.
  Appliquons la méthode de variation de la constante pour chercher g_p et h_p :

  ⋆ Variation de la constante pour $y' - \frac{2}{t}y = t^2e^t$.
  On pose $g_p : t \mapsto C(t)t^2$ où C est une fonction dérivable sur I_1. Alors g_p est solution de l'équation si, et seulement si, $C'(t)t^2 = t^2e^t$ pour tout $t \in I_1$.
  Par suite, pour tout $t \in I_1$, $C'(t) = e^t$ et donc $C : t \mapsto e^t$ convient *(on peut choisir*

n'importe quelle primitive de C').
Il en résulte que $g_p : t \mapsto t^2 e^t$ est solution de $y' - \frac{2}{t}y = t^2 e^t$ sur I_1.

⋆ Variation de la constante pour $y' - \frac{2}{t}y = 1$.
On pose $h_p : t \mapsto C(t)t^2$ où C est une fonction dérivable sur I_1. Alors h_p est solution de l'équation si, et seulement si, $C'(t)t^2 = 1$ pour tout $t \in I_1$.
Par suite, pour tout $t \in I_1$, $C'(t) = \frac{1}{t^2}$ et donc $C : t \mapsto -\frac{1}{t}$ convient.
Il en résulte que $h_p : t \mapsto -\frac{1}{t}t^2 = -t$ est solution de $y' - \frac{2}{t}y = 1$ sur I_1.

Ainsi, par principe de superposition, $f_p = 21g_p - 5h_p : t \mapsto 21t^2e^t + 5t$ est solution de $(E)_1$ sur I_1.

On remarque que la fonction f_p est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc elle est même solution de (E) sur $\mathbb{R}$!

- Conclusion sur I_1 :
L'ensemble des solution $\mathcal{S}_1$ de $(E)_1$ sur I_1 est :

$$\mathcal{S}_1 = \left\{t \mapsto C_1t^2 + 21t^2e^t + 5t \mid C_1 \in \mathbb{R}\right\}.$$

— Résolution de l'équation sur I_2 : Sur I_2, l'équation est équivalente à $(E)_2 : y' - \frac{2}{t}y = 21t^2e^t - 5$.

- Résolution de l'équation homogène $(E_h)_2 : y' - \frac{2}{t}y = 0$.
Une primitive de $t \mapsto \frac{2}{t}$ sur I_2 est $t \mapsto 2\ln(|t|) = 2\ln(-t)$. Comme, pour tout $t \in I_2$, $e^{2\ln(-t)} = -t^2$, l'ensemble $\mathcal{S}_{h2}$ de $(E_h)_2$ sur I_2 est :

$$\mathcal{S}_{h2} = \left\{t \mapsto -C_2t^2 \mid C_2 \in \mathbb{R}\right\}.$$

Quitte à changer C_2 en $-C_2$ (possible car C_2 parcourt $\mathbb{R}$), on peut écrire :

$$\mathcal{S}_{h2} = \left\{t \mapsto C_2t^2 \mid C_2 \in \mathbb{R}\right\}.$$

- Recherche d'une solution particulière de $(E)_2$.
Comme $f_p : t \mapsto 21t^2e^t + 5t$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, f_p est solution de $(E)_2$ sur I_2.
- Conclusion sur I_2 :
L'ensemble des solution $\mathcal{S}_2$ de $(E)_2$ sur I_2 est :

$$\mathcal{S}_2 = \left\{t \mapsto C_2t^2 + 21t^2e^t + 5t \mid C_2 \in \mathbb{R}\right\}.$$

L'équation (E) étant résolue sur I_1 et I_2, on passe à l'étape de "recollement" des solutions. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors f est solution de (E) si, et seulement si, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est solution de (E) sur I_1 et I_2.
Ainsi, si f est une solution de (E), il existe $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$f(t) = \begin{cases} C_1t^2 + 21t^2e^t + 5t & \text{pour } t \in I_1 =]0, +\infty[\\ C_2t^2 + 21t^2e^t + 5t & \text{pour } t \in I_2 =]-\infty, 0[\end{cases}$$

On peut remarquer avant de commencer le recollement que si on évalue l'équation différentielle (E) en 0, on obtient $f(0) = 0$.

⋆ Comme f est continue en 0 et $f(0) = 0$, on a $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 = \lim_{t\to 0^+} f(x)$.
Or on a $\lim_{t\to 0^+} f(x) = \lim_{t\to 0^+}(C_1t^2 + 21t^2e^t + 5t) = 0$ et
$\lim_{t\to 0^-} f(x) = \lim_{t\to 0^-}(C_2t^2 + 21t^2e^t + 5t) = 0$.
À ce stade, aucune condition sur C_1, C_2 supplémentaires ne sont imposées.

⋆ Comme f est dérivable sur 0, on a :

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{f(t)-f(0)}{t} = f'(0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)-f(0)}{t}.$$

Or on a $\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)-f(0)}{t} = \lim_{t\to 0^+}(C_1 t + 21te^t + 5) = 5$ et $\lim_{t\to 0^-} \frac{f(t)-f(0)}{t} = \lim_{t\to 0^-}(C_2 t + 21te^t + 5) = 5$;
D'où $f'(0) = 5$ et toujours aucune condition supplémentaire sur C_1, C_2.

Ainsi, si f est solution de (E), on a $f : t \mapsto 21t^2e^t + 5t + \begin{cases} C_1 t^2 & \text{si } t \geq 0 \\ C_2 t^2 & \text{si } t < 0 \end{cases}$; et réciproquement si f est de cette forme, f est bien dérivable et solution de (E).
Il en résulte que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est :

$$\mathcal{S} = \left\{ f : t \mapsto 21t^2e^t + 5t + \begin{cases} C_1 t^2 & \text{si } t \geq 0 \\ C_2 t^2 & \text{si } t < 0 \end{cases} \middle| \; C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

et on peut remarquer que $\mathcal{S}_h = \left\{ f : t \mapsto \begin{cases} C_1 t^2 & \text{si } t \geq 0 \\ C_2 t^2 & \text{si } t < 0 \end{cases} \middle| \; C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}$ est un espace vectoriel de dimension 2.

Remarque : on aurait trouver pu une solution f_p de (E) en premier lieu puis déterminer $\mathcal{S}_h$ et enfin conclure que $\mathcal{S} = f_p + \mathcal{S}_h$ (comme nous le verrons dans l'exemple 3).

Exemple 2.

L'équation $(E) : \; t^2y' - 2ty = 1$ sur $\mathbb{R}$ n'admet aucune solution et l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène sur $\mathbb{R}$ est :

$$\mathcal{S}_h = \left\{ f : t \mapsto \begin{cases} C_1 t^2 & \text{si } t \geq 0 \\ C_2 t^2 & \text{si } t < 0 \end{cases} \middle| \; C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

La fonction $t \mapsto t^2$ s'annule sur $\mathbb{R}$ en 0. On considère alors les intervalles de résolution de l'équation normalisée $I_1 =]0, +\infty[$ et $I_2 =]-\infty, 0[$.

— Résolution de l'équation sur I_1 : Sur I_1, l'équation est équivalente à $(E)_1 : y' - \frac{2}{t}y = \frac{1}{t^2}$.
  - comme pour l'exemple précédent, l'ensemble $\mathcal{S}_{h1}$ des solutions de l'équation homogène sur I_1 est :
  $$\mathcal{S}_{h1} = \left\{ t \mapsto C_1 t^2 \mid C_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$
  - Recherche d'une solution particulière de $(E)_1$.
  Variation de la constante pour $y' - \frac{2}{t}y = \frac{1}{t^2}$.
  On pose $f_p : t \mapsto C(t)t^2$ où C est une fonction dérivable sur I_1. Alors f_p est solution de l'équation si, et seulement si, $C'(t)t^2 = \frac{1}{t^2}$ pour tout $t \in I_1$.
  Par suite, pour tout $t \in I_1$, $C'(t) = \frac{1}{t^4}$ et donc $C : t \mapsto -\frac{1}{4t^3}$ convient.
  Il en résulte que $f_p : t \mapsto -\frac{1}{4t}$ est solution de $y' - \frac{2}{t}y = \frac{1}{t^2}$ sur I_1.
  - Conclusion sur I_1 :

L'ensemble des solution $\mathcal{S}_1$ de $(E)_1$ sur I_1 est :

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ t \mapsto C_1 t^2 - \frac{1}{4t} \mid C_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

— Résolution de l'équation sur I_2 : Sur I_2, l'équation est équivalente à $(E)_2 : y' - \frac{2}{t} y = \frac{1}{t^2}$. La résolution est en tout point similaire à celle sur I_1 et on obtient que l'ensemble des solution $\mathcal{S}_2$ de $(E)_2$ sur I_2 est :

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ t \mapsto C_2 t^2 - \frac{1}{4t} \mid C_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

L'équation (E) étant résolue sur I_1 et I_2, on passe à l'étape de "recollement" des solutions. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors f est solution de (E) si, et seulement si, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est solution de (E) sur I_1 et I_2.
Ainsi, si f est une solution de (E), il existe $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$f(t) = \begin{cases} C_1 t^2 - \frac{1}{4t} & \text{pour } t \in I_1 =]0, +\infty[\\ C_2 t^2 - \frac{1}{4t} & \text{pour } t \in I_2 =]-\infty, 0[\end{cases}$$

⋆ Comme f est continue en 0, on a $\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{t \to 0^+} f(x)$.
Or on a $\lim_{t \to 0^+} f(x) = \lim_{t \to 0^+} (C_1 t^2 - \frac{1}{4t}) = -\infty$ et $\lim_{t \to 0^-} f(x) = \lim_{t \to 0^-} (C_2 t^2 - \frac{1}{4t}) = +\infty$.
Donc aucune valeur de C_1 et C_2 ne conviennent pour assurer la continuité de f en 0 ; on peut donc s'arrêter ici !

Ainsi, l'équation (E) n'admet aucune solution sur $\mathbb{R}$. On peut tout de même prouver que l'espace $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène est $\mathcal{S}_h = \left\{ f : t \mapsto \begin{cases} C_1 t^2 & \text{si } t \geq 0 \\ C_2 t^2 & \text{si } t < 0 \end{cases} \middle| \, C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}$ et c'est un espace vectoriel de dimension 2.

Remarque : on aurait pu éviter toute cette résolution qui conduit à l'absence de solution. En effet, supposons par l'absurde que (E) possède une solution f sur $\mathbb{R}$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $t^2 f'(t) - 2t f(t) = 1$ et donc, en particulier, pour $t = 0$, on a

$$0 = 0^2 \times f'(t) - 2 \times 0 \times f(t) = 1$$

Contradiction ! Donc (E) ne possède pas de solution sur $\mathbb{R}$.

b. Exemple avec $\mathcal{S}_h$ de dimension 1

Exemple 3.

L'ensemble des fonctions dérivables solutions de $(E) :\ t^2 y' - y = t(t-1)$ sur $\mathbb{R}$ est :

$$\mathcal{S} = \left\{ f : t \mapsto t + \begin{cases} C_1 e^{-\frac{1}{t}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases} \middle| \, C_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Changeons de méthode pour cet exemple : déterminons tout de suite une solution de (E) sur $\mathbb{R}$: les coefficients de (E) sont polynomiaux, cherchons une solution polynomiale.
Soit p une fonction polynomiale de degré $n \geq 0$ solution de (E). Alors $t^2p' - p$ est de degré $n+1$ car $\deg(t^2p') = 2 + (n-1) = n+1$ et $\deg(-p) = n$. Ainsi, $n+1 = \deg(t(t-1)) = 2$ d'où $n = 1$.
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $p : t \mapsto at + b$. Alors p solution de (E) si, et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$at^2 - at - b = t^2 - t.$$

Or deux fonctions poynomiales sont égales si, et seulement si, leurs coefficients sont égaux ; d'où : p solution de (E) si, et seulement si, $a = 1$ et $b = 0$ i.e. $p : t \mapsto t$.

Ainsi, la fonction $f_p : t \mapsto t$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Maintenant, il nous reste à déterminer l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène.
La fonction $t \mapsto t^2$ s'annule sur $\mathbb{R}$ en 0. On considère alors les intervalles de résolution de l'équation normalisée $I_1 =]0, +\infty[$ et $I_2 =]-\infty, 0[$.

— Résolution de l'équation homogène sur I_1 : Sur I_1, l'équation homogène est équivalente à $(E_h)_1 : y' - \frac{1}{t^2}y = 0$.
Une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ sur I_1 est $t \mapsto -\frac{1}{t}$. Ainsi, l'ensemble $\mathcal{S}_{h1}$ de $(E_h)_1$ sur I_1 est :

$$\mathcal{S}_{h1} = \left\{ t \mapsto C_1 e^{-\frac{1}{t}} \mid C_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

— Résolution de l'équation homogène sur I_2 : Sur I_2, l'équation homogène est équivalente à $(E_h)_2 : y' - \frac{1}{t^2}y = 0$.
Une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ sur I_2 est $t \mapsto -\frac{1}{t}$. Ainsi, l'ensemble $\mathcal{S}_{h2}$ de $(E_h)_2$ sur I_2 est :

$$\mathcal{S}_{h2} = \left\{ t \mapsto C_2 e^{-\frac{1}{t}} \mid C_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

L'équation (E_h) étant résolue sur I_1 et I_2, on passe à l'étape de "recollement" des solutions. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors f est solution de (E_h) si, et seulement si, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est solution de (E_h) sur I_1 et I_2.
Ainsi, si f est une solution de (E_h), il existe $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$f(t) = \begin{cases} C_1 e^{-\frac{1}{t}} & \text{pour } t \in I_1 =]0, +\infty[\\ C_2 e^{-\frac{1}{t}} & \text{pour } t \in I_2 =]-\infty, 0[. \end{cases}$$

On peut remarquer avant de commencer le recollement que si on évalue l'équation différentielle (E_h) en 0, on obtient $f(0) = 0$.

⋆ Comme f est continue en 0 et $f(0) = 0$, on a $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 = \lim_{t\to 0^+} f(x)$.
Or on a $\lim_{t\to 0^+} f(x) = \lim_{t\to 0^+} C_1 e^{-\frac{1}{t}} = 0$ et
$\lim_{t\to 0^-} f(x) = \lim_{t\to 0^-} C_2 e^{-\frac{1}{t}} = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } C_2 \neq 0 \\ 0 & \text{si } C_2 = 0 \end{cases}.$
Par suite, $C_2 = 0$ mais pas de condition sur C_1.

⋆ Comme f est dérivable sur 0, on a :

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{f(t) - f(0)}{t} = f'(0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{t}.$$

Or on a $\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)-f(0)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{C_1}{t} e^{-\frac{1}{t}} = 0$ par croissances comparées et $\lim_{t\to 0^-} \frac{f(t)-f(0)}{t} = \lim_{t\to 0^-} 0 = 0$;
D'où $f'(0) = 0$ et toujours aucune condition supplémentaire sur C_1.

Ainsi, si f est solution de (E_h), on a $f : t \mapsto \begin{cases} C_1 e^{-\frac{1}{t}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$; et réciproquement si f est de cette forme, f est bien dérivable et solution de (E_h).
Il en résulte que l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de (E_h) sur $\mathbb{R}$ est :

$$\mathcal{S}_h = \left\{ f : t \mapsto \begin{cases} C_1 e^{-\frac{1}{t}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases} \;\middle|\; C_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

qui est un espace de dimension 1.

On obtient ainsi l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ car $\mathcal{S} = f_p + \mathcal{S}_h$:

$$\mathcal{S} = \left\{ f : t \mapsto t + \begin{cases} C_1 e^{-\frac{1}{t}} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \;\middle|\; C_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Remarque : on aurait pu utiliser la même méthode que dans l'exemple 1.

c. Exemple avec $\mathcal{S}_h$ de dimension 0

Exemple 4.

L'ensemble des fonctions dérivables solutions de (E) : $ty' + y = 1$ sur $\mathbb{R}$ est :

$$\mathcal{S} = \{t \mapsto 1\}.$$

Déterminons une solution de (E) sur $\mathbb{R}$: les coefficients de (E) sont polynomiaux, cherchons une solution polynomiale.
Soit p une fonction polynomiale de degré $n \geq 0$ solution de (E) et notons $a_n \neq 0$ son coeffcient dominant. Alors le monôme de plus haut degré de $tp' + p$ est égal à $(n+1)a_n t^n$. Or $(n+1)a_n \neq 0$ donc $\deg(tp' + p) = n$. Ainsi, $n = \deg(1) = 0$.
Soit $c \in \mathbb{R}$ et $p : t \mapsto c$. Alors p solution de (E) si, et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$t \times 0 + c = 1$$

d'où p solution de (E) si, et seulement si, $c = 1$ i.e. $p : t \mapsto 1$.
Ainsi, la fonction $f_p : t \mapsto 1$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Maintenant, il nous reste à déterminer l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène.
La fonction $t \mapsto t$ s'annule sur $\mathbb{R}$ en 0. On considère alors les intervalles de résolution de l'équation normalisée $I_1 =]0, +\infty[$ et $I_2 =]-\infty, 0[$.

— Résolution de l'équation homogène sur I_1 : Sur I_1, l'équation homogène est équivalente à $(E_h)_1 : y' + \frac{1}{t} y = 0$.

  Une primitive de $t \mapsto -\frac{1}{t}$ sur I_1 est $t \mapsto -\ln(t)$. Comme, pour tout $t \in I_1$, $e^{-\ln(t)} = \frac{1}{t}$, l'ensemble $\mathcal{S}_{h1}$ de $(E_h)_1$ sur I_1 est :

$$\mathcal{S}_{h1} = \left\{ t \mapsto C_1 \frac{1}{t} \mid C_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

— <u>Résolution de l'équation homogène sur I_2 :</u> Sur I_2, l'équation homogène est équivalente à $(E_h)_2 : y' + \frac{1}{t}y = 0$.

Une primitive de $t \mapsto -\frac{1}{t}$ sur I_2 est $t \mapsto -\ln(-t)$. Ainsi, l'ensemble $\mathcal{S}_{h2}$ de $(E_h)_2$ sur I_2 est :

$$\mathcal{S}_{h2} = \left\{ t \mapsto -C_2 \frac{1}{t} \mid C_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

L'équation (E_h) étant résolue sur I_1 et I_2, on passe à l'étape de "recollement" des solutions. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors f est solution de (E_h) si, et seulement si, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est solution de (E_h) sur I_1 et I_2.

Ainsi, si f est une solution de (E_h), il existe $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$f(t) = \begin{cases} C_1 \frac{1}{t} & \text{pour } t \in I_1 =]0, +\infty[\\ -C_2 \frac{1}{t} & \text{pour } t \in I_2 =]-\infty, 0[. \end{cases}$$

On peut remarquer avant de commencer le recollement que si on évalue l'équation différentielle (E_h) en 0, on obtient $f(0) = 0$.

⋆ Comme f est continue en 0 et $f(0) = 0$, on a $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 = \lim_{t \to 0^+} f(x)$.

Or on a $\lim_{t \to 0^+} f(x) = \lim_{t \to 0^+} C_1 \frac{1}{t} = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } C_1 \neq 0 \\ 0 & \text{si } C_1 = 0 \end{cases}$ et

$\lim_{t \to 0^-} f(x) = \lim_{t \to 0^-} C_2 e^{-\frac{1}{t}} = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } C_2 \neq 0 \\ 0 & \text{si } C_2 = 0 \end{cases}$.

Par suite, $C_1 = 0$ et $C_2 = 0$; donc f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ (qui est bien dérivable donc pas besoin d'aller plus loin).

Ainsi, si f est solution de (E_h), on a $f : t \mapsto 0$; et réciproquement la fonction nulle est bien dérivable et solution de (E_h).

Il en résulte que l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de (E_h) sur $\mathbb{R}$ est :

$$\mathcal{S}_h = \{t \mapsto 0\}$$

qui est un espace de dimension 0.

On obtient ainsi l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ car $\mathcal{S} = f_p + \mathcal{S}_h$:

$$\mathcal{S} = \{t \mapsto 1\}.$$

d. Exemple avec $\mathcal{S}_h$ de dimension infinie

Exemple 5.

L'ensemble des fonctions dérivables solutions de (E) : $\cos(t)y' + 2\sin(t)y = \sin(t)$ sur $\mathbb{R}$ est :

$$\mathcal{S} = \left\{ f : t \mapsto \frac{1}{2} + C_k \cos^2(t) \text{ si } t \in \left[\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right[\text{ avec } k \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \forall\, k \in \mathbb{Z},\ C_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

Déterminons tout d'abord l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène.
La fonction cos : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'annule sur $\mathbb{R}$ en $\frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. On considère alors les intervalles de résolution de l'équation normalisée $I_k =]\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi[$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

— Soit $k \in \mathbb{Z}$. Résolution de l'équation homogène sur I_k : Sur I_k, l'équation homogène est équivalente à $(E_h)_k : \ y' + 2\tan(t)y = 0$.

  Une primitive de $t \mapsto -2\tan(t) = 2\frac{\cos'}{\cos}$ sur I_k est $t \mapsto 2\ln(|\cos(t)|)$. Comme, pour tout $t \in I_k$, $e^{2\ln(|\cos(t)|)} = \cos^2(t)$, l'ensemble $\mathcal{S}_{hk}$ de $(E_h)_k$ sur I_k est :

$$\mathcal{S}_{hk} = \left\{t \mapsto C_k \cos^2(t) \mid C_k \in \mathbb{R}\right\}.$$

L'équation (E_h) étant résolue sur chaque I_k, on passe à l'étape de "recollement" des solutions.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors f est solution de (E_h) si, et seulement si, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est solution de (E_h) sur chaque I_k.
Ainsi, si f est une solution de (E_h), pour tout $k \in \mathbb{Z}$, il existe $C_k \in \mathbb{R}$ tels que :

$$f(t) = C_k \cos^2(t) \text{ si } t \in I_k =]\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi[.$$

On peut remarquer avant de commencer le recollement que si on évalue l'équation différentielle (E_h) en $\frac{\pi}{2} + k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$, on obtient $f(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 0$. Soit $k \in \mathbb{Z}$. On note $z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

⋆ Comme f est continue en z_k et $f(z_k) = 0$, on a $\lim_{x \to z_k^-} f(x) = 0 = \lim_{t \to z_k^+} f(x)$.

  Or on a $\lim_{t \to z_k^+} f(x) = \lim_{t \to z_k^+} C_1 \cos^2(t) = 0$ et

  $\lim_{t \to 0^-} f(x) = \lim_{t \to 0^-} C_2 \cos^2(t) = 0$.
  À ce stade, aucune condition sur C_1, C_2 supplémentaires ne sont imposées.

⋆ Comme f est dérivable sur 0, on a :

$$\lim_{t \to z_k^-} \frac{f(t) - f(z_k)}{t} = f'(z_k) = \lim_{t \to z_k^+} \frac{f(t) - f(z_k)}{t}.$$

  Or on a $\lim_{t \to z_k^+} \frac{f(t)-f(z_k)}{t} = \lim_{t \to z_k^+} C_1 \frac{\cos^2(t)}{t} = 0$ et

  $\lim_{t \to z_k^-} \frac{f(t)-f(z_k)}{t} = \lim_{t \to z_k^-} C_2 \frac{\cos^2(t)}{t} = 0$;
  D'où $f'(z_k) = 0$ et toujours aucune condition supplémentaire sur C_1, C_2.

Ainsi, si f est solution de (E_h), on a $f : t \mapsto C_k \cos^2(t)$ si $t \in [\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi[$ pour $k \in \mathbb{Z}$; et réciproquement si f est de cette forme, f est bien dérivable et solution de (E).
Il en résulte que l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de (E_h) sur $\mathbb{R}$ est :

$$\mathcal{S} = \left\{ f : t \mapsto C_k \cos^2(t) \text{ si } t \in \left[\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right[\text{ avec } k \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \forall\, k \in \mathbb{Z},\ C_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

Il nous reste à déterminer une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ (s'il en existe !). Pour cela, on peut essayer des fonctions sinusoïdales car les coefficients le sont... mais malheureusement, cela ne fonctionne pas.

Essayons alors la méthode de variation de la constante sur un I_k fixé, en espérant en déduire une solution particulière sur $\mathbb{R}$ tout entier. Ici, prenons $I_{-1} =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

⋆ Variation de la constante pour $y' + 2\tan(t)y = \tan(t)$.

  On pose $f_p : t \mapsto C(t)\cos^2(t)$ où C est une fonction dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Alors f_p est solution de l'équation si, et seulement si, $C'(t)\cos^2(t) = \tan(t)$ pour tout $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
  Par suite, pour tout $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

$$C'(t) = \frac{\tan(t)}{\cos^2(t)} = -\frac{\cos'(t)}{\cos^3(t)}$$

et donc $C : t \mapsto \frac{1}{2\cos^2(t)}$ convient.

Il en résulte que $f_p : t \mapsto \frac{1}{2}$ est solution de $y' + 2\tan(t)y = \tan(t)$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Comme espéré, $f_p : t \mapsto \frac{1}{2}$ est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ et solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
On obtient ainsi l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ car $\mathcal{S} = f_p + \mathcal{S}_h$:

$$\mathcal{S} = \left\{ f : t \mapsto \frac{1}{2} + C_k \cos^2(t) \text{ si } t \in \left[\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right[\text{ avec } k \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \forall\, k \in \mathbb{Z},\ C_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

e. Exercices

Exercice 7.

Résoudre l'ensemble des fonctions dérivables solutions des équations suivantes sur l'intervalle I :

1. $t^3 y' + 2y = t(2t^2 + 1)$
2. $t(t-1)y' - y = 1$ sur $\mathbb{R}$
3. $t^2(t-1)y' - ty = 1 - 2t$ sur $\mathbb{R}$

Partie E

Résolution d'un équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2

Dans cette partie, on adapte et développe la méthode de résolution d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n dans le particulier $n = 2$.

On considère alors dans cette partie une équation définie sur un intervalle I de la forme :

$$(E) : \; a_2(t)y'' + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y = b(t).$$

1. Précision sur la méthode de résolution

Pour résoudre l'équation (E), on utilise la méthode décrite dans la partie précédente. Il reste tout de même deux points qui ne sont pas developpés dans cette méthode : la résolution de l'équation homogène sur chaque intervalle (I_k) et l'obtention d'une solution particulière de l'équation non homogène.
Pour l'ordre 2, des techniques existent pour cela et nous allons les étudier dans la suite ; mais tout d'abord, resumons la méthode dans le cas de l'ordre 2 :

Précisions et résumé de la méthode pour l'ordre 2 :

— On trouve l'ensemble Z des zéros de a_n et on considère les intervalles ouverts I_k qui forment $I \setminus Z$.

— On resout $(E)_k$ sur chaque I_k.
Précisions pour l'équation homogène : L'ensemble $\mathcal{S}_{hk}$ des solutions de l'équation homogène sur I_k est de la forme $\mathcal{S}_{hk} = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$ (Théorème 7).
Ainsi, pour déterminer $\mathcal{S}_{hk}$, il suffit de **trouver deux solutions f_1 et f_2 non colinéaires** de l'équation homogène $(E_h)_k$.

— On "recolle" les solutions des $(E)_k$ pour former les solutions de (E).

‘

2. Recherche d'une première solution d'une équation homogène

Dans ce paragraphe, on considère une équation différentielle homogène (pas forcément normalisée !) :

$$(E_h) : \; a_2(t)y'' + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y = 0.$$

et on recherche une première solution f_1 de cette équation.

Pour cela, malheureusement, il n'y a pas de méthode systématique permettant d'obtenir cette première solution à tous les coups !

Il existe tout de même de nombreuses techniques empiriques. En voici quelques-unes présentées sur des exemples dans les paragraphes suivants.
Dans les faits, on testera, à la suite et dans l'ordre, ces différentes techniques jusqu'à, espérons-le, trouver enfin cette première solution !

a. À l'oeil nu

Recherche d'une solution au petit bonheur la chance

L'idée est simple et facile à mettre en oeuvre : on choisit quelques fonctions usuelles, par exemple, fonctions polynomiales de petit degré, exponentielle, fonctions sinusoïdales ; et on les teste dans l'équation (E_h).
Avec un peu de tatonnement et de chance, on peut tomber sur une solution !

Même si elle peut paraître pour le moins hasardeuse, cette technique simple permet de se familiariser avec l'équation différentielle et en cas de succès, permet d'éviter les calculs parfois fastidieux que demandent les autres techniques décrites ci-après.

Exemple 6.

Considérons l'équation :

$$(E_h) : \ (t+1)y'' - y' - ty = 0.$$

On voit assez vite qu'aucune fonction polynomiale ne fait l'affaire (le terme de plus haut degré de ty dans ce cas ne peut être compensé par les autres termes). On essaye ensuite avec un exponentielle toute simple (ses dérivées successives étant très très simples à calculer) et là... Bingo ! On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$(t+1)e^t - e^t - te^t = 0$$

donc $f_1 : t \mapsto e^t$ est solution de (E_h).

Exercice 8.

Déterminer une solution "simple" pour chacune des équations homogènes suivantes :

1. $(E_h) : \ t^2y'' + ty' - y = 0$ sur $\mathbb{R}$.
2. $(E_h) : \ (1+t)y'' - 2y' + (1-t)y = 0$ sur $]-1, +\infty[$.

b. À l'aide de la "forme" des coefficients

Recherche d'une solution du même type que les coefficients

Lorsque les coefficients sont tous de la même "forme" (**y compris celui devant y'' !**) : polynômes, fonctions trigonométriques, exponentielles ; il peut être pertinent de rechercher une solution de (E_h) du même type.

Exemple 7.

Considérons l'équation :

$$(E_h) : \ (t^2 + 2t - 1)y'' + (t^2 - 3)y' - (2t + 2)y = 0.$$

Si $t \mapsto P(t)$ une fonction polynomiale solution de (E_h) alors $\deg(P) = 2$ et par identification polynomiale des coefficients, on trouve que

$$f_1 : t \mapsto t^2 - 1$$

est solution de (E_h).

— Soit P un polynôme à coefficients réels de degré $n \geq 0$ et on note $a_n \neq 0$ sont coefficient dominant. Si la fonction polynomiale $P : t \mapsto P(t)$ associée à P est solution de (E_h), alors :

$$Q = (X^2 + 2X - 1)P'' + (X^2 - 3)P' - (2X + 2)P = 0$$

Or un polynôme est nul si, et seulement si, ses coefficients sont nuls, donc, en particulier, le coefficient c de Q associé au monôme X^{n+1} est nul. De plus, le coefficients associés à X^n sont : 0 dans $(X^2 + 2X - 1)P''$ car il est de degré $n - 2 + 2 = n$; na_n dans $(X^2 - 3)P'$ et $-2a_n$ dans $-(2X + 2)P$. Ainsi, on a :

$$0 = c = 0 + na_n - 2a_n = (n - 2)a_n$$

Or $a_n \neq 0$ donc $n - 2 = 0$ i.e. $n = 2$. Par suite, si $P : t \mapsto P(t)$, alors $\deg(P) = 2$.

— Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $P =\mapsto aX^2 + bX + c$. On a :

$$(X^2 + 2X - 1)P'' + (X^2 - 3)P' - (2X + 2)P = -bX^2 - 2(a + b + c)X + -(2a + 3b + 2c)$$

Or, un polynôme est nul si, et seulement si, tous ses coefficients sont nuls donc $(X^2 + 2X - 1)P'' + (X^2 - 3)P' - (2X + 2)P = 0$ si, et seulement si, $\begin{cases} b & = 0 \\ a + b + c & = 0 \\ 2a + 3b + c & = 0 \end{cases}$ i.e. $c = -a$ et $b = 0$.

Il en résulte que, pour $P \in \mathbb{R}[X]$, la fonction polynomiale $t \mapsto P(t)$ est solution de (E_h) si, et seulement si, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P = a(X^2 - 1)$.

On en déduit une première solution f_1 "simple" de (E_h) :

$$f_1 : t \mapsto t^2 - 1.$$

Exercice 9.

Déterminer une solution de l'équation homogène suivante :

$$(E_h) : \; y'' + \frac{1}{t}y' - \frac{1}{t^2}y = 0.$$

Correction Indications et résultat :.

On dénormalise l'équation qui est équivalente à $t^2y'' + ty' - y = 0$ et on cherche une solution polynomiale pour trouver la solution :

$$f_1 : t \mapsto t.$$

c. À l'aide d'une série entière

Recherche d'une solution grâce à un Développement en Série Entière

Lorsque les coefficients de l'équation (sous forme non normalisée en général) sont polynomiaux, une technique usuelle est de chercher une solution développable en série entière de la façon suivante :

On considère une série entière $\sum a_n t^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et on suppose que sa somme f est solution de (E_h).

On obtient alors, en reportant f dans (E_h), une relation entre les coefficients a_n qui permettent de déterminer explicitement la fonction f.

Exemple 8.

Considérons l'équation :

$$(E_h) : \ ty'' + 2y' + ty = 0.$$

Si $\sum a_n t^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$, alors sa somme f est solution de (E_h) sur $]-R, R[$ si, et seulement si :

$$a_1 = 0 \text{ et } (n+1)(n+2)a_{n+1} + a_{n-1} = 0 \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Et on en déduit que $R = +\infty$, puis que

$$f_1 : t \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

est solution de (E_h) sur $\mathbb{R}$.

— On remarque que $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et on a :

$$\begin{aligned} tf''(t) + 2f'(t) + tf(t) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2na_n t^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^{n+1} + 2a_1 + \sum_{n=0}^{+\infty} 2(n+2)a_{n+2}t^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{n+1} \\ &= 2a_1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+2)(n+3)a_{n+2} + a_n\right) t^{n+1} \\ tf''(t) + 2f'(t) + tf(t) &= 2a_1 t^0 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1)(n+2)a_{n+1} + a_{n-1})t^n. \end{aligned}$$

Alors f est solution de (E_h) sur $]-R, R[$ si, et seulement si, pour tout $t \in]-R, R[$:

$$2a_1 t^0 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1)(n+2)a_{n+1} + a_{n-1})a_n t^n = 0 \quad (*)$$

Or, une somme de série entière est nulle sur un intervalle ouvert si, et seulement si, ses coefficients sont nuls ; d'où f est solution de (E_h) sur $]-R, R[$ si, et seulement si,

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ (n+1)(n+2)a_{n+1} + a_{n-1} = 0 \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} a_{n-1} \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Par récurrence, comme $a_1 = 0$, $a_{2k+1} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

De même, si on suppose $a_0 = 0$, alors $a_{2k} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et donc $f = \mathbf{0}$ - qui est bien solution de (E_h) mais on le savait déjà !

Plus intéressant : supposons $a_0 \neq 0$. Alors, par récurrence, $a_{2k} \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et donc :

$$\begin{cases} a_0 \neq 0 \\ \dfrac{a_{2k+2}}{a_{2k}} = -\dfrac{1}{(2k+2)(2k+3)} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Par suite, pour $z \in \mathbb{C}^*$:

$$\left| \frac{a_{2k+2} z^{2k+2}}{a_{2k} z^{2k}} \right| = \frac{|z|^2}{(2k+2)(2k+3)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0.$$

Donc le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n t^n$ est $R = +\infty$ et on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par télescopage :

$$\begin{aligned} a_{2n} &= a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2k+2}}{a_{2k}} \\ &= a_0 (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+2)(2k+3)} \\ a_{2n} &= a_0 \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{m=0}^{+\infty} a_m t^m \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} t^{2n} \\ f(t) &= a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n} \end{aligned}$$

Cela rappelle le développement en série entière sur $\mathbb{R}$ de sinus i.e. pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\sin(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1} = t \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n};$$

ce qui permet d'écrire :

$$f(t) = \begin{cases} a_0 \dfrac{\sin(t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ a_0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

On choisit donc un a_0 "simple", $a_0 = 1$ (ou 33 si on en a envie) et on pose :

$$f_1 : t \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

Alors f_1 vérifie $(*)$ et donc f_1 est une solution de (E_h) sur $\mathbb{R}$ (car $R=+\infty$). On a donc trouvé une première solution de l'équation homogène.

Exercice 10.

Déterminer une solution de l'équation homogène suivante :

$$(E_h): \ 4ty''+2y'-y=0.$$

Correction.

— Soit $\sum a_n t^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$. Alors $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et on a :

$$\begin{aligned}
4tf''(t)+2f'(t)-f(t) &= \sum_{n=2}^{+\infty} 4n(n-1)a_n t^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2na_n t^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} 4(n+1)na_{n+1}t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2(n+1)a_{n+1}t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \\
4tf''(t)+2f'(t)-f(t) &= -a_0+2a_1+\sum_{n=1}^{+\infty} \left((n+1)(4n+2)a_{n+1}-a_n\right)t^n.
\end{aligned}$$

Alors f est solution de (E_h) sur $]-R,R[$ si, et seulement si, pour tout $t\in\,]-R,R[$:

$$(2a_1-a_0)t^0+\sum_{n=1}^{+\infty}\left((n+1)(n+2)a_{n+1}-a_n\right)t^n=0 \quad (*)$$

Or, une somme de série entière est nulle sur un intervalle ouvert si, et seulement si, ses coefficients sont nuls ; d'où f est solution de (E_h) sur $]-R,R[$ si, et seulement si,

$$\begin{cases} 2a_1-a_0=0 \\ (n+1)(4n+2)a_{n+1}-a_n=0 \ \ \forall\, n\in\mathbb{N}^*. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=\frac{1}{2}a_0 \\ a_{n+1}=\frac{1}{2(n+1)(2n+1)}a_n \ \ \forall\, n\in\mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Si on suppose $a_0=0$, alors $a_k=0$ pour tout $k\in\mathbb{N}$ et donc $f=\mathbf{0}$ - qui est bien solution de (E_h).

Supposons $a_0\neq 0$. Alors $a_1\neq 0$ et par récurrence, $a_k\neq 0$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ et donc :

$$\begin{cases} a_0\neq 0 \\ a_1=\frac{1}{2}a_0 \\ \dfrac{a_{k+1}}{a_k}=\dfrac{1}{2(k+1)(2k+1)} \text{ pour tout } k\in\mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Par suite, pour $z\in\mathbb{C}^*$:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\frac{1}{2(k+1)(2k+1)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

Donc le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n t^n$ est $R = +\infty$ et on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par télescopage :

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} \\ &= a_1 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2(k+1)(2k+1)} \\ &= a_0 \frac{1}{2^n (n!)(3 \times 5 \times ... \times (2n-1))} \\ &= a_0 \frac{1}{(2n)!} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} t^n;$$

et donc, en écrivant, pour $t \geq 0$, $t^n = (\sqrt{t})^{2n}$ et pour $t < 0$, $t^n = (-1)^n (-t)^n = (-1)^n (\sqrt{-t})^{2n}$:

$$f(t) = \begin{cases} a_0 \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} \left(\sqrt{t}\right)^{2n} & \text{si } t \geq 0 \\ a_0 \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\sqrt{-t}\right)^{2n} & \text{si } t < 0; \end{cases}$$

ce qui permet d'écrire :

$$f(t) = \begin{cases} a_0 \mathrm{ch}(\sqrt{t}) & \text{si } t \geq 0 \\ a_0 \cos(\sqrt{-t}) & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

On choisit donc un a_0 "simple", par exemple $a_0 = 1$ et on pose :

$$f_1 : t \mapsto \begin{cases} \mathrm{ch}(\sqrt{t}) & \text{si } t \geq 0 \\ \cos(\sqrt{-t}) & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Alors f_1 vérifie $(*)$ et donc f_1 est une solution de (E_h) sur $\mathbb{R}$ (car $R = +\infty$). On a donc trouvé une première solution de l'équation homogène.

3. Recherche d'une seconde solution d'un équation homogène normalisée

Dans ce paragraphe, on considère une équation différentielle homogène (pas forcément normalisée !) :

$$(E_h) : \; a_2(t) y'' + a_1(t) y'(t) + a_0(t) y = 0.$$

Une fois une première solution f_1 de cette équation obtenue, on peut en "fabriquer" une deuxième f_2 à partir de f_1 et telle que (f_1, f_2) soit libre. De ce fait, (f_1, f_2) sera une base des solutions de l'équation homogène sur I_k **(attention, pas forcément sur I tout entier par contre !)** ce qui finalisera les résolutions des équations $(E_h)_k$.

a. À l'aide de la méthode de Lagrange

La méthode dite **de Lagrange** utilise la même astuce que la méthode de variation de la constante pour l'ordre 1 :

Proposition 12.

Soit f_1 une solution de (E_h) : $a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0$ sur I et z une fonction deux fois dérivable sur I. La fonction $f = f_1 z$ est solution de (E_h) si, et seulement si, z' vérifie l'équation différentielle :

$$a_2(t)f_1(t)x' + (2a_2(t)f_1'(t) + a_1(t)f_1(t))x = 0.$$

Démonstration.

Comme f_1 et z sont deux fois dérivables sur I, $f = f_1 z$ l'est aussi comme produit de fonctions deux fois dérivables et on a :

$$f' = f_1'z + f_1 z' \text{ et } f'' = f_1''z + 2f_1'z' + f_1 z''.$$

Par suite, f est solution de (E_h) si, et seulement si :

$$\begin{aligned}
& a_2(t)f'' + a_1 f' + a_0(t)f = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & a_2(t)(f_1''z + 2f_1'z' + f_1 z'') + a_1(t)(f_1'z + f_1 z') + a_0(t)f_1 z = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \underbrace{(a_2(t)f_1'' + a_1(t)f_1 + a_0(t)f_1)}_{=0 \text{ car } f_1 \in \mathcal{S}_h} z + a_2(t)f_1 z'' + (2a_2(t)f_1' + a_1(t)f_1)z' = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & a_2(t)f_1 z'' + (2a_2(t)f_1 + a_1(t)f_1)z' = 0.
\end{aligned}$$

D'où f est solution de (E_h) si, et seulement si, z' est solution l'équation différentielle :

$$a_2(t)f_1(t)x' + (2a_2(t)f_1'(t) + a_1(t)f_1(t))x = 0.$$

□

Remarque 6.

Dans les faits, il est inutile de connaître par coeur l'équation différentielle vérifiée par z' : on la retrouve directement par le calcul dans chaque cas étudié.

Méthode de Lagrange : On suppose connue une solution f_1 de (E_h).

- On pose $f = f_1 z$ où z est une fonction deux fois dérivable sur I. Alors f est solution de (E_h) si, et seulement si, z' est solution d'une équation différentielle d'ordre 1 :
  - ⋆ que l'on obtient en exprimant $f = f_1 z$ comme solution de (E_h) ;

- $\star$ que l'on résout pour trouver z' puis z en primitivant.

- On choisit les constantes qui apparaissent dans les résolutions précédentes et on écrit $f_2 = f_1 z$ qui est donc solution de (E_h) et on vérifie que f_1 et f_2 ne sont pas colinéaires (ce qui sera le cas si z n'est pas constant !).

Exercice 11.

Résoudre les équations homogènes :

1. $(E_h) :\ (t^2+1)y'' - 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$;
2. $(E_h) :\ (t+1)y'' - y' - ty = 0$ sur $]-1,+\infty[$

Correction.

1. L'équation (E_h) : $(t^2+1)y'' - 2y = 0$ est définie sur $\mathbb{R}$ et est équivalente à l'équation normalisée (E_h) : $y'' - \frac{2}{1+t^2}y = 0$ car $t \mapsto 1+t^2$ ne s'annulle pas sur $\mathbb{R}$. Par suite, l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de (E_h) sur $\mathbb{R}$ est de dimension 2. On va donc rechercher deux fonctions f_1 et f_2 non colinéaires telles que $\mathcal{S}_h = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$.
   - — Tout d'abord, cherchons une première solution $f_1 \in \mathcal{S}_h$. Les coefficients étant polynomiaux, on peut commencer par tester une solution polynomiale.
     Soit P un polynôme à coefficients réels de degré $n \geq 0$ et on note $a_n \neq 0$ sont coefficient dominant. Si la fonction polynomiale $P : t \mapsto P(t)$ associée à P est solution de (E_h), alors :
     $$Q = (X^2+1)P'' - 2P = 0$$
     Or un polynôme est nul si, et seulement si, ses coefficients sont nuls, donc, en particulier, le coefficient c de Q associé au monôme X^n est nul. De plus, les coefficients associés à X^n sont : $n(n-1)a_n$ dans $(X^2+1)P''$ et $-2a_n$ dans $-2P$. Ainsi, on a :
     $$0 = c = n(n-1)a_n - 2a_n = (n+1)(n-2)a_n$$
     Or $a_n \neq 0$ et $n+1) \neq 0$ donc $n-2=0$ i.e. $n=2$. Par suite, si $P : t \mapsto P(t)$, alors $\deg(P) = 2$.
     Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $P = \mapsto aX^2 + bX + c$. On a :
     $$(X^2+1)P'' - 2P = -2bX + (2a - 2c)$$
     Or, un polynôme est nul si, et seulement si, tous ses coefficients sont nuls donc $(X^2+1)P'' - 2P = 0$ si, et seulement si, $\begin{cases} b & = 0 \\ a - c & = 0 \end{cases}$ i.e. $c = a$ et $b = 0$.
     Il en résulte que, pour $P \in \mathbb{R}[X]$, la fonction polynomiale $t \mapsto P(t)$ est solution de (E_h) si, et seulement si, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P = a(X^2+1)$.
     On en déduit une première solution f_1 "simple" de (E_h) :
     $$f_1 : t \mapsto t^2 + 1.$$
   - — Déterminons une deuxième solution f_2 grâce à la méthode de Lagrange.
     Soit $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on pose $f = f_1 z : t \mapsto$

$(t^2+1)z(t)$. Alors f est solution de (E_h) si, et seulement si :

$$
\begin{aligned}
& (t^2+1)f'' - 2f = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \\
& (t^2+1)(2z + 4tz' + (t^2+1)z'') - 2(t^2+1)z = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \\
& \underbrace{\big(2(t^2+1) - 2(t^2+1)\big)}_{=0} z + (t^2+1)^2 z'' + 4t(t^2+1)z' = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \\
& (t^2+1)z'' + 4tz' = 0.
\end{aligned}
$$

On résout alors l'équation différentielle d'ordre 1 homogène $(t^2+1)x' + 4tx = 0 \Leftrightarrow x' + 2\frac{2t}{t^2+1}x = 0$; ses solutions sont :

$$x(t) = Ce^{-\int 2\frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t} = Ce^{-2\ln(t^2+1)} = \frac{C}{(t^2+1)^2}.$$

Résolvons alors $z' = \frac{C}{(t^2+1)^2}$.
On a :

$$
\begin{aligned}
\int \frac{C}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t &= C\int \frac{t^2+1-t^2}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= C\int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t + \frac{C}{2}\int t\frac{-2t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= C\arctan(t) + \frac{C}{2}\int t\frac{-2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\
&= C\arctan(t) + \frac{C}{2}\left(\frac{t}{t^2+1} - \int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t\right) \quad \text{par IPP} \\
\int \frac{C}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t &= \frac{C}{2}\left(\arctan(t) + \frac{t}{t^2+1}\right)
\end{aligned}
$$

Par suite, $z : t \mapsto \frac{C}{2}\left(\arctan(t) + \frac{t}{t^2+1}\right) + D$ avec $C, D \in \mathbb{R}$ et donc :

$$f = f_1 z : t \mapsto \frac{C}{2}\big((t^2+1)\arctan(t) + t\big) + D(t^2+1).$$

Il nous suffit d'une solution f_2 non colinéaire à f_1 pour fabriquer notre base de $\mathcal{S}_h$; on choisit donc des constantes C et D pour notre f_2 (en remarquant que si $C \neq 0$, z est non constant et donc f n'est pas colinéaire à f_1) : on prend $C = 2$ et $D = 0$ pour obtenir :

$$f_2 : t \mapsto (t^2+1)\arctan(t) + t.$$

Il en résulte que l'ensemble des solutions de (E_h) sur $\mathbb{R}$ est :

$$\mathcal{S}_h = \mathrm{Vect}(f_1, f_2) = \{t \mapsto A(t^2+1) + B((t^2+1)\arctan(t) + t) \mid A, B \in \mathbb{R}\}.$$

2. Sur $]-1,+\infty[$, l'équation (E_h) : $(t+1)y'' - y' - ty = 0$ est équivalente à l'équation normalisée (E_h) : $y'' - \frac{1}{t+1}y' - \frac{t}{t+1}y = 0$. Par suite, l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de (E_h) sur $]-1,+\infty[$ est de dimension 2. On va donc rechercher deux fonctions f_1 et f_2 non colinéaires telles que $\mathcal{S}_h = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$.

— En recherchant une solution "simple" (voire exemple 6), on trouve que $f_1 : t \mapsto e^t$ est solution de (E_h) sur $\mathbb{R}$ et donc sur $]-1,+\infty[$.

— Déterminons une deuxième solution f_2 grâce à la méthode de Lagrange.
Soit $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on pose $f = f_1 z : t \mapsto e^t z(t)$.
Alors f est solution de (E_h) si, et seulement si :

$$\begin{aligned} & (t+1)f'' - f' - tf = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \\ & (t+1)e^t(z + 2z' + z'') - e^t(z+z') - te^t z = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \\ & \underbrace{\left((t+1)e^t - e^t - te^t\right)}_{=0} z + e^t\left((t+1)z'' + (2t+1)z'\right)) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \\ & (t+1)z'' + (2t+1)z' = 0. \end{aligned}$$

On résout alors l'équation différentielle d'ordre 1 homogène $(t+1)x' + (2t+1)x = 0 \Leftrightarrow x' + \frac{2t+1}{t+1}x = 0$; ses solutions sont :

$$x(t) = Ce^{-\int \frac{2t+1}{t+1}\,\mathrm{d}t} = Ce^{-\int \left(2 - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t} = Ce^{-2t + \ln(t+1)} = C(t+1)e^{-2t}.$$

Résolvons alors $z' = C(t+1)e^{-2t}$.
On a :

$$\begin{aligned} \int C(t+1)e^{-2t}\,\mathrm{d}t &= -\frac{C}{2}(t+1)e^{-2t} + \frac{C}{2}\int e^{-2t}\,\mathrm{d}t \text{ par IPP} \\ &= -\frac{C}{4}\,(2t+3)\,e^{-2t}. \end{aligned}$$

Par suite, $z : t \mapsto -\frac{C}{4}\,(2t+3)\,e^{-2t} + D$ avec $C, D \in \mathbb{R}$ et donc :

$$f = f_1 z : t \mapsto -\frac{C}{4}\,(2t+3)\,e^{-t} + De^t.$$

Il nous suffit d'une solution f_2 non colinéaire à f_1 pour fabriquer notre base de $\mathcal{S}_h$; on choisit donc des constantes C et D pour notre f_2 (en remarquant que si $C \neq 0$, z est non constant et donc f n'est pas colinéaire à f_1) : on prend $C = -4$ et $D = 0$ pour obtenir :

$$f_2 : t \mapsto (2t+3)\,e^{-t}.$$

Il en résulte que l'ensemble des solutions de (E_h) sur $]-1,+\infty[$ est :

$$\mathcal{S}_h = \mathrm{Vect}(f_1, f_2) = \{t \mapsto Ae^t + B\,(2t+3)\,e^{-t} \mid A, B \in \mathbb{R}\}.$$

b. À l'aide du Wronskien

Pour l'utilisation de ce qu'on appellera dans la suite le wronskien, on doit supposer que l'équation est *normalisée*; ainsi, dans ce paragraphe, par (E_h), on entendra :

$$(E_h): \; y'' + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y = 0.$$

Définition 7. *Wronskien*

Soit f, g des solutions de l'équation homogène (E_h).
On appelle **wronskien** du couple (f, g) l'application de I dans $\mathbb{K}$ définie, pour tout $t \in I$ par :

$$W_{f,g}(t) = \begin{vmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{vmatrix} = f(t)g'(t) - f'(t)g(t).$$

Proposition 13.

Soit f, g des solutions de l'équation homogène (E_h). Le wronskien $W_{f,g}$ est de classe C^1 sur I et, pour tout $t \in I$,

$$W'_{f,g}(t) = f(t)g''(t) - f''(t)g(t).$$

Démonstration.

Soit f, g des solutions de l'équation homogène (E_h). Comme a_0, a_1 sont des fonctions continues sur I, f, g sont de classe C^2 sur I (Proposition 7). Par suite, $W_{f,g} = f'g - fg'$ est de classe C^1 sur I comme différence de produits de fonctions C^1 sur I. De plus, on a :

$$\begin{array}{rcl} W'_{f,g} & = & (fg' - f'g)' \\ & = & (fg')' - (f'g)' \\ & = & f'g' + fg'' - (f''g + f'g') \\ W'_{f,g} & = & fg'' - f''g. \end{array}$$

□

Proposition 14.

Soit f, g des solutions de l'équation homogène (E_h).
Le wronskien $W_{f,g}$ du couple (f, g) est solution de l'équation différentielle :

$$x' + a_1(t)x = 0.$$

Démonstration.

Soit f, g des solutions de l'équation homogène (E_h). Ainsi, pour tout $t \in I$, on a :

$$f''(t) = -a_1(t)f'(t) - a_0(t)f(t) \text{ et } g''(t) = -a_1(t)g'(t) - a_0(t)g(t).$$

D'après l'exercice précédent, $W_{f,g}$ est dérivable sur I et $W'_{f,g} = f''g - fg''$. Par suite, pour tout $t \in I$, on a :

$$\begin{array}{rcl} W'_{f,g}(t) & = & f(t)g''(t) - f''(t)g(t) \\ & = & f(t)(-a_1(t)g'(t) - a_0(t)g(t)) - (-a_1(t)f'(t) - a_0(t)f(t))g(t) \\ & = & -a_1(t)f(t)g'(t) - a_0(t)f(t)g(t) + a_1(t)f'(t)g(t) + a_0(t)f(t)g(t) \\ & = & -a_1(t)(f(t)g'(t) - f'(t)g(t)) \\ W'_{f,g}(t) & = & -a_1(t)W_{f,g}(t). \end{array}$$

Ainsi, $W_{f,g}$ est solution sur I de l'équation différentielle $x' + a_1(t)x = 0$. □

Corollaire 2.

Soit f, g des solutions de l'équation homogène (E_h).
Il existe $C \in \mathbb{K}$ tel que, pour tout $t \in I$, $W_{f,g}(t) = Ce^{-A_1(t)}$ où A_1 est une primitive de a_1.

Correction.

L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions sur I de l'équation différentielle scalaire d'ordre 1 homogène $x' + a_1(t)x = 0$ est donné par, étant donné une primitive A_1 de a_1 sur I :

$$\mathcal{S} = \{t \mapsto Ce^{-A_1(t)} \mid C \in \mathbb{R}\}$$

Or, d'après la proposition précédente, pour f, g des solutions sur I de l'équation homogène (E_h) : $y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0$, $W_{f,g}$ appartient à $\mathcal{S}$, donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $W_{f,g} : t \mapsto Ce^{-A_1(t)}$.

Proposition 15.

Soit f, g des solutions de l'équation homogène (E_h). Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) le couple (f, g) est une base de $\mathcal{S}_h$;
ii) il existe $t \in I$ tel que $W_{f,g}(t) \neq 0$;
iii) pour tout $t \in I$ tel que $W_{f,g}(t) \neq 0$.

Démonstration.

i) ⇔ iii) D'après la proposition 8, le couple (f, g) est une base de $\mathcal{S}_h$ si, et seulement si, $\left(\begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix}\right)$ est une base de l'ensemble des solutions de $X' = A(t)X$ où $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) \end{pmatrix}$ sur I. Ce qui est équivalent à : pour tout $t \in I$,

$$W_{f,g}(t) = \begin{vmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{vmatrix} \neq 0.$$

ii) $\Leftrightarrow$ iii) Supposons qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $W_{f,g}(t_0) \neq 0$. D'après le corollaire 2, pour tout $t \in I$, $W_{f,g}(t) = Ce^{-A_1(t)}$ où A_1 est une primitive de a_1. Par suite, $C = W_{f,g}(t_0)e^{A_1(t_0)} \neq 0$. Il en résulte que pour tout $t \in I$, $W_{f,g}(t) = Ce^{-A_1(t)} \neq 0$.

Réciproquement, comme I est un intervalle non vide, on a bien iii) implique ii).

□

On utilise le wronskien lorsque l'on dispose déjà d'une solution f_1 de $(E_h) : y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0$ afin de déterminer une seconde solution non colinéaire à la première.

Méthode du Wronskien : On suppose connue une solution f_1 de (E_h).

- Soit $f \in \mathcal{S}_h$. Alors $W_{f_1,f}$ est solution de l'équation différentielle $x' + a_1(t)x = 0$. On obtient alors $W_{f_1,f}$ à une constante multiplicative près.
- Sur un intervalle où f_1 ne s'annule pas, on considère la fonction $\dfrac{f}{f_1}$. Alors sa dérivée vérifie :

$$\left(\frac{f}{f_1}\right)' = \frac{W_{f_1,f}}{f_1^2}.$$

  On en déduit alors f puis on détermine une fonction $f_2 \in \mathcal{S}_h$ plus "simple" que f en supprimant ses composantes selon f_1.
- On vérifie que W_{f_1,f_2} ne s'annule pas et qu'ainsi (f_1, f_2) est une base de $\mathcal{S}_h$.

Exemple 9.

On considère, sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation homogène (E_h) : $y'' + \dfrac{1}{t}y' - \dfrac{1}{t^2}y = 0$ dont on peut vérifier que $f_1 : t \mapsto t$ est solution et on note $\mathcal{S}_h$ l'ensemble des solutions de (E_h).

Alors, pour $f \in \mathcal{S}_h$, $W_{f_1,f} : t \mapsto \frac{C}{t}$ où $C \in \mathbb{R}$ et ainsi, en primitivant $\dfrac{W_{f_1,f}}{f_1^2} : t \mapsto \dfrac{C}{t^3}$, on obtient $f : t \mapsto -\dfrac{C}{2t} + Dt$ où $D \in \mathbb{R}$.

En choisissant $C = -2$ et $D = 0$, on obtient $f_2 : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ et $W_{f_1,f_2} \neq 0$, d'où :

$$\mathcal{S}_h = \text{Vect}(f_1, f_2) = \{t \mapsto At + \frac{B}{t^2} \mid A, B \in \mathbb{R}\}.$$

Soit $f \in \mathcal{S}_h$. On considère le wronskien de $W_{f_1,f} : t \mapsto = \begin{vmatrix} f_1(t) & f(t) \\ f_1'(t) & f'(t) \end{vmatrix}$. Alors $W_{f_1,f}$ est solution de l'équation différentielle $x' + \frac{1}{t}x = 0$ d'où :

$$W_{f_1,f} : t \mapsto Ce^{-\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t} = \frac{C}{t}.$$

De plus, on a :

$$\frac{W_{f_1,f}}{f_1^2} = \frac{f_1 f' - f_1' f}{f_1^2} = \left(\frac{f}{f_1}\right)'.$$

D'où, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\left(\frac{f}{f_1}\right)'(t) = \frac{\frac{C}{t}}{t^2} = \frac{C}{t^3},$$

et ainsi, on a $\frac{f}{f_1}(t) = -\frac{C}{2t^2} + D$ et donc :

$$f(t) = -\frac{C}{2t} + Dt.$$

On choisit alors $C = -2$ et $D = 0$ pour obtenir $f_2 : t \mapsto \dfrac{1}{t}$. On a bien $W_{f_1,f_2} : t \mapsto \frac{-2}{t} =\neq 0$ d'où

$$\mathcal{S}_h = \mathrm{Vect}(f_1, f_2) = \{t \mapsto At + \frac{B}{t^2} \mid A, B \in \mathbb{R}\}.$$

Remarque 7.

La méthode du wronskien pour rechercher une deuxième solution n'est pas "meilleure" que la méthode de Lagrange et cette dernière à l'avantage d'être plus proche de ce qu'on sait déjà faire (méthode de variation de la constante) et on commencera souvent par celle-ci.
Mais les propriétés du wronskien sont souvent utiles dans les exercices plus théorique - voire par exemple l'exercice 17.

Exercice 12.

Résoudre les équations homogènes suivantes :

1. $(E_h) :\ y'' + \dfrac{t^2-3}{t^2+2t-1}y' - \dfrac{2t+2}{t^2+2t-1}y = 0$ sur $]\sqrt{2}-1, +\infty[$.
2. $(E_h) :\ y'' + \dfrac{2}{t}y' + y = 0$ sur $]0, +\infty[$.
3. $(E_h) :\ y'' + \dfrac{1}{2t}y' - \dfrac{1}{4t}y = 0$ sur $]0, +\infty[$.

Correction.

1. On considère $(E_h) :\ y'' + \dfrac{t^2-3}{t^2+2t-1}y' - \dfrac{2t+2}{t^2+2t-1}y = 0$ sur $I =]\sqrt{2}-1, +\infty[$ et on note $\mathcal{S}_h$ l'ensemble des solutions de (E_h) sur I qui est un espace vectoriel de dimension 2 car (E_h) est une équation normalisée. On cherche donc $f_1, f_2 \in \mathcal{S}_h$ non colinéaires.
   — *Recherche d'une première solution.* D'après l'exemple 7, $f_1 : t \mapsto t^2 - 1$ est solution sur I de (E_h).
   — *Recherche d'une seconde solution à l'aide du Wronskien.*
   Soit $f \in \mathcal{S}_h$. On considère le wronskien de $W_{f_1,f} : t \mapsto= \begin{vmatrix} f_1(t) & f(t) \\ f_1'(t) & f'(t) \end{vmatrix}$. Alors $W_{f_1,f}$ est solution de l'équation différentielle $x' + \frac{t^2-3}{t^2+2t-1}x = 0$ d'où :
   $$W_{f_1,f} : t \mapsto Ce^{-\int \frac{t^2-3}{t^2+2t-1}\,\mathrm{d}t} = Ce^{-t}(t^2+2t-1).$$

De plus, on a :
$$\frac{W_{f_1,f}}{f_1^2} = \frac{f_1 f' - f_1' f}{f_1^2} = \left(\frac{f}{f_1}\right)'.$$
D'où, pour tout $t \in I$:
$$\left(\frac{f}{f_1}\right)'(t) = \frac{Ce^{-t}(t^2+2t-1)}{(t^2-1)^2},$$
et ainsi, on a $\frac{f}{f_1}(t) = -\frac{Ce^{-t}}{t^2-1} + D$ et donc :
$$f(t) = -Ce^{-t} + D(t^2-1).$$
On choisit alors $C = -1$ et $D = 0$ pour obtenir $f_2 : t \mapsto e^{-t}$. On a bien $W_{f_1,f_2} : t \mapsto -e^{-t}(t^2+2t-1) =\neq 0$ d'où (f_1, f_2) est une base de $\mathcal{S}_h$.

Il en résulte que :
$$\mathcal{S}_h = \text{Vect}(f_1, f_2) = \{t \mapsto A(t^2-1) + Be^{-t} \mid A, B \in \mathbb{R}\}.$$

2. On considère (E_h) : $y'' + \dfrac{2}{t}y' + y = 0$ sur $I =]0, +\infty[$ et on note $\mathcal{S}_h$ l'ensemble des solutions de (E_h) sur I qui est un espace vectoriel de dimension 2 car (E_h) est une équation normalisée. On cherche donc $f_1, f_2 \in \mathcal{S}_h$ non colinéaires.
   — *Recherche d'une première solution.* D'après l'exemple 8, $f_1 : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est solution sur I de (E_h).
   — *Recherche d'une seconde solution à l'aide du Wronskien.*
   Soit $f \in \mathcal{S}_h$. On considère le wronskien de $W_{f_1,f} : t \mapsto = \begin{vmatrix} f_1(t) & f(t) \\ f_1'(t) & f'(t) \end{vmatrix}$. Alors $W_{f_1,f}$ est solution de l'équation différentielle $x' + \frac{2}{t}x = 0$ d'où :
$$W_{f_1,f} : t \mapsto Ce^{-\int \frac{2}{t}\,\mathrm{d}t} = \frac{C}{t^2}.$$
   De plus, on a :
$$\frac{W_{f_1,f}}{f_1^2} = \frac{f_1 f' - f_1' f}{f_1^2} = \left(\frac{f}{f_1}\right)'.$$
   D'où, pour tout $t \in I \setminus \pi\mathbb{N}^*$ (car f_1 s'annule sur $\pi\mathbb{N}^*$) :
$$\left(\frac{f}{f_1}\right)'(t) = \frac{\frac{C}{t^2}}{\frac{\sin(t)^2}{t^2}} = \frac{C}{\sin^2(t)},$$
   et ainsi, en écrivant par exemple $\frac{1}{\sin^2} = \frac{1+\tan^2}{\tan^2}$, on a $\frac{f}{f_1}(t) = -\frac{C}{\tan(t)} + D$ et donc :
$$f(t) = -C\frac{\cos(t)}{t} + D\frac{\sin(t)}{t}.$$
   On choisit alors $C = -1$ et $D = 0$ pour obtenir $f_2 : t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{t}$ qui est bien définie sur I tout entier !
   On a $W_{f_1,f_2} : t \mapsto -\frac{1}{t^2} =\neq 0$ d'où (f_1, f_2) est une base de $\mathcal{S}_h$.

   Il en résulte que :
$$\mathcal{S}_h = \text{Vect}(f_1, f_2) = \{t \mapsto A\frac{\sin(t)}{t} + B\frac{\cos(t)}{t} \mid A, B \in \mathbb{R}\}.$$

3. On considère (E_h) : $y'' + \dfrac{1}{2t}y' - \dfrac{1}{4t}y = 0$ sur $I =]0, +\infty[$ et on note $\mathcal{S}_h$ l'ensemble des solutions de (E_h) sur I qui est un espace vectoriel de dimension 2 car (E_h) est une équation normalisée. On cherche donc $f_1, f_2 \in \mathcal{S}_h$ non colinéaires.
   - *Recherche d'une première solution.* D'après l'exercice 10, $f_1 : t \mapsto \mathrm{ch}(\sqrt{t})$ est solution sur I de (E_h).
   - *Recherche d'une seconde solution à l'aide du Wronskien.*

     Soit $f \in \mathcal{S}_h$. On considère le wronskien de $W_{f_1,f} : t \mapsto= \begin{vmatrix} f_1(t) & f(t) \\ f_1'(t) & f'(t) \end{vmatrix}$. Alors $W_{f_1,f}$ est solution de l'équation différentielle $x' + \frac{1}{2t}x = 0$ d'où :

     $$W_{f_1,f} : t \mapsto Ce^{-\int \frac{1}{2t}\,\mathrm{d}t} = \frac{C}{\sqrt{t}}.$$

     De plus, on a :

     $$\frac{W_{f_1,f}}{f_1^2} = \frac{f_1 f' - f_1' f}{f_1^2} = \left(\frac{f}{f_1}\right)'.$$

     D'où, pour tout $t \in I$:

     $$\left(\frac{f}{f_1}\right)'(t) = \frac{\frac{C}{\sqrt{t}}}{\mathrm{ch}^2(\sqrt{t})} = \frac{C}{\sqrt{t}\mathrm{ch}^2(\sqrt{t})},$$

     et ainsi, on a $\frac{f}{f_1}(t) = 2C\mathrm{th}(\sqrt{t}) + D$ et donc :

     $$f(t) = -2C\mathrm{sh}(\sqrt{t}) + D\mathrm{ch}(\sqrt{t}).$$

     On choisit alors $C = -\frac{1}{2}$ et $D = 0$ pour obtenir $f_2 : t \mapsto \mathrm{sh}(\sqrt{t})$.
     On a $W_{f_1,f_2} : t \mapsto -\frac{1}{4t} =\neq 0$ d'où (f_1, f_2) est une base de $\mathcal{S}_h$.

   Il en résulte que :

   $$\mathcal{S}_h = \mathrm{Vect}(f_1, f_2) = \{t \mapsto A\mathrm{ch}(\sqrt{t}) + B\mathrm{sh}(\sqrt{t}) \mid A, B \in \mathbb{R}\}.$$

4. Recherche d'une solution particulière de l'équation normalisée

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la recherche d'une solution particulière f_p de

$$(E) : y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t)$$

afin de finaliser la résolution une fois les solutions de l'équation homogène obtenues.

La méthode de variations des constantes présentées ci-après est une méthode systématique pour trouver une solution de l'équation complète, étant données les solutions de l'équation homogène. Malheureusement, le système obtenu par cette méthode n'est pas toujours aisé à résoudre ; on commencera donc par chercher une solution "au flair" dans un premier temps, ce qui, si cela s'avère fructueux, évite bien des calculs !

a. À l'oeil nu ou avec la forme des coefficients

Recherche d'une solution au petit bonheur la chance

L'idée est est la même que pour la recherche "à l'oeil nu" d'une première solution de l'équation homogène : on choisit quelques fonctions usuelles, par exemple, fonctions polynomiales, exponentielle, fonctions sinusoïdales ; et on les teste dans l'équation (E). On pourra également, si les coefficients sont polynomiaux, essayer, une nouvelle fois comme dans la recherche d'une première solution de l'équation homogène, tester avec une somme de série entière

Exemple 10.

Considérons l'équation :

$$(E):\ t^2y'' + ty' - y = 1.$$

On voit rapidement que la fonction constante en -1 est solution de cette équation !

Exercice 13.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $(E):\ (t^2+1)y'' - 2y = (t^2-1)e^t$ sur $\mathbb{R}$;
2. $(E):\ y'' + \dfrac{2}{t}y' + y = \dfrac{1}{t}$ sur $]0,+\infty[$.

Correction.

1. Au vu du second membre, on est tenté d'essayer une exponentielle toute simple (ou, si ça ne fonctionne pas, une fonction polynomiale fois une exponentielle). Et ça marche ! En effet, pour tout $t \in]0,+\infty[$:

$$(t^2+1)e^t - 2e^t = (t^2+1-2)e^t = (t^2-1)e^t.$$

Or, on a montré dans l'exercice 11 que l'ensemble des solutions de l'équation homogène est :

$$\mathcal{S}_h = \left\{t \mapsto A(t^2+1) + B((t^2+1)\arctan(t)+t) \mid A, B \in \mathbb{R}\right\}.$$

Il en résulte que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est :

$$\mathcal{S} = f_p + \mathcal{S}_h = \left\{t \mapsto e^t + A(t^2+1) + B((t^2+1)\arctan(t)+t) \mid A, B \in \mathbb{R}\right\}.$$

2. On tente, on tente et on voit que $t \mapsto \frac{1}{t}$ fonctionne ! Or, on a montré dans l'exercice 12 que l'ensemble des solutions de l'équation homogène est :

$$\mathcal{S}_h = \left\{t \mapsto A\frac{\sin(t)}{t} + B\frac{\cos(t)}{t} \mid A, B \in \mathbb{R}\right\}.$$

Il en résulte que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est :

$$\mathcal{S} = f_p + \mathcal{S}_h = \left\{t \mapsto \frac{1}{t} + A\frac{\sin(t)}{t} + B\frac{\cos(t)}{t} \mid A, B \in \mathbb{R}\right\}.$$

b. À l'aide de la méthode de variation des constantes

Proposition 16.

Soit (f_1, f_2) une base de l'équation homogène (E_h).
On pose $f_p : t \mapsto C_1(t)f_1(t)+C_2(t)f_2(t)$ où C_1, C_2 sont des fonctions deus fois dérivables. Alors :

La fonction f_p est solution de (E) si, et seulement si,

$$\begin{cases} C_1'(t)f_1(t) + C_2'(t)f_2(t) = 0 \\ C_1'(t)f_1'(t) + C_2'(t)f_2'(t) = b(t) \end{cases}.$$

Correction.

D'aprés la proposition 8, f solution de (E_h) si, et seulement si, $\begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix}$ est solution du système différentiel (S_{E_h}) : $X' = A(t)X$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) \end{pmatrix}$.
Par suite, comme l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de (E_h) est $\mathcal{S}_h = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$, l'ensemble des solutions de (S_{E_h}) est $\mathrm{Vect}\,(X_1, X_2)$ où, pour $i = 1, 2$, $X_i = \begin{pmatrix} f_i \\ f_i' \end{pmatrix}$.
On pose $f_p : t \mapsto C_1(t)f_1(t)+C_2(t)f_2(t)$ où C_1, C_2 sont des fonctions dérivables ; $X_p = C_1(t)X_1 + C_2(t)X_2$ et $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$.

Comme, pour $i = 1, 2$, $X_i = \begin{pmatrix} f_i \\ f_i' \end{pmatrix}$ est solution de du système homogène (S_{E_h}), on a :

$$X_i' = A(t)X_i.$$

On a alors :

$$\begin{array}{rcl} X_p' & = & C_1'(t)X_1 + C_2'(t)X_2 + C_1(t)X_1' + C_2(t)X_2' \\ & = & C_1'(t)X_1 + C_2'(t)X_2 + A(t)\left(C_1(t)X_1 + C_2(t)X_2\right) \\ X_p' & = & C_1'(t)X_1 + C_2'(t)X_2 + A(t)X_p. \end{array}$$

Ainsi :

f_p est solution de (E)
si, et seulement si,

X_p est solution de (S_E) : $X' = A(t)X + B(t)$
si, et seulement si,

$X_p' = A(t)X_p + B(t)$
si, et seulement si,

$C_1'(t)X_1 + C_2'(t)X_2 + A(t)X_p = A(t)X_p + B(t)$
si, et seulement si,

$C_1'(t)X_1 + C_2'(t)X_2 = B(t)$
si, et seulement si,

$$\begin{cases} C_1'(t)f_1(t) + C_2'(t)f_2(t) = 0 \\ C_1'(t)f_1'(t) + C_2'(t)f_2'(t) = b(t) \end{cases}.$$

Méthode de variations des constantes :
Une fois déterminée une base (f_1, f_2) de l'équation homogène (E_h), on pose

$$f_p : t \mapsto C_1(t)f_1(t) + C_2(t)f_2(t)$$

où C_1, C_2 sont des fonctions deux fois dérivables de I dans $\mathbb{R}$. Alors :

La fonction f_p est solution de (E) si, et seulement si, pour tout $t \in I$

$$\begin{cases} C_1'(t)f_1(t) + C_2'(t)f_2(t) = 0 \\ C_1'(t)f_1'(t) + C_2'(t)f_2'(t) = b(t) \end{cases}$$

On résout alors ce système pour trouver C_1', C_2' puis C_1, C_2 en primitivant.

Exemple 11.

On considère l'équation $(E) :\ y'' + \dfrac{1}{t}y' - \dfrac{1}{t^2}y = \dfrac{4\ln(t)}{t}$ sur $I =]0, +\infty[$ et on note $\mathcal{S}$ l'ensemble de ses solutions et $\mathcal{S}_h$ l'ensemble de ses solutions homogènes.
On a $\mathcal{S}_h = \{t \mapsto At + \frac{B}{t^2} \mid A, B \in \mathbb{R}\}$.
On applique le méthode de variations des constantes, en posant

$$f_p : t \mapsto A(t)t + \frac{B(t)}{t^2}$$

où A, B sont des fonctions deux fois dérivables de I dans $\mathbb{R}$.
Alors f_p est solution de (E) sur I si, et seulement si, pour tout $t \in I$:

$$\begin{cases} A'(t)t + \frac{B'(t)}{t^2} = 0 \\ A'(t) - 2\frac{B'(t)}{t^3} = \frac{4\ln(t)}{t}. \end{cases}$$

En résolvant le système et en primitivant les fonctions solutions A' et B', on obtient, pour $t \in I$:

$$A(t) = \frac{2}{3}\ln(t)^2 \text{ et } B(t) = \frac{4}{9}t^3\left(\frac{1}{3} - \ln(t)\right).$$

Ainsi $f_p : t \mapsto \frac{2}{3}t\left(\frac{2}{9} - \frac{2}{3}\ln(t) + \ln(t)^2\right)$ est solution de (E) et au final :

$$\mathcal{S} = f_p + \mathcal{S}_h = \left\{t \mapsto \frac{2}{3}t\left(\frac{2}{9} - \frac{2}{3}\ln(t) + \ln(t)^2\right) + At + \frac{B}{t^2} \mid A, B \in \mathbb{R}\right\}.$$

Exercice 14.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $(E) :\ y'' - \dfrac{1}{t+1}y' - \dfrac{t}{t+1}y = 4(t+1)e^{-t}$ sur $]-1, +\infty[$.
2. $(E) :\ y'' + \dfrac{2}{t}y' + y = t$ sur $]0, +\infty[$.

Correction.

1. On considère l'équation (E) : $y'' - \dfrac{1}{t+1}y' - \dfrac{t}{t+1}y = 4(t+1)e^{-t}$ sur $I =]-1, +\infty[$, on note $\mathcal{S}$ l'ensemble de ses solutions et $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène.
D'après l'exercice 11, on a :
$$\mathcal{S}_h = \{t \mapsto Ae^t + B\,(2t+3)\,e^{-t} \mid A, B \in \mathbb{R}\}.$$
On applique le méthode de variations des constantes, en posant
$$f_p : t \mapsto A(t)e^t + B(t)\,(2t+3)\,e^{-t}$$
où A, B sont des fonctions deux fois dérivables de I dans $\mathbb{R}$.
Alors f_p est solution de (E) sur I si, et seulement si, pour tout $t \in I$:
$$\begin{cases} A'(t)e^t + B'(t)\,(2t+3)\,e^{-t} = 0 \\ A'(t)e^t - B'(t)\,(2t+1))\,e^{-t} = 4(t+1)e^{-t} \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} A'(t)e^t + B'(t)\,(2t+3)\,e^{-t} = 0 \\ -B'(t)\,(4t+4))\,e^{-t} = 4(t+1)e^{-t} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} A'(t)e^t + B'(t)\,(2t+3)\,e^{-t} = 0 \\ B'(t) = -1. \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} A'(t) = (2t+3)\,e^{-2t} \\ B'(t) = -1. \end{cases}$$
Déterminons des primitives de A' et B'. Ici, seule A' nous oblige à effectuer des calculs, puisque $B : t \mapsto -t$ est une primitive de B'. On effectue une IPP :
$$\int (2t+3)\,e^{-2t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\,(2t+3)\,e^{-2t} + \int e^{-2t}\,\mathrm{d}t = -(t+2)e^{-2t},$$
d'où, pour $t \in I$:
$$A(t) = -(t+2)e^{-2t} \text{ et } B(t) = -t.$$
Ainsi la fonction
$$\begin{aligned} f_p : t \mapsto A(t)e^t + B(t)\,(2t+3)\,e^{-t} &= -(t+2)e^{-2t}e^t - t\,(2t+3)\,e^{-t} \\ &= -2\,(t+1)^2\,e^{-t} \end{aligned}$$
est solution de (E) et au final :
$$\mathcal{S} = f_p + \mathcal{S}_h = \{t \mapsto -2\,(t+1)^2\,e^{-t} + Ae^t + B\,(2t+3)\,e^{-t} \mid A, B \in \mathbb{R}\}.$$

2. On considère l'équation (E) : $y'' + \dfrac{2}{t}y' + y = t$ sur $I =]0, +\infty[$, on note $\mathcal{S}$ l'ensemble de ses solutions et $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène.

D'après l'exercice 12, on a :

$$\mathcal{S}_h = \{t \mapsto A\frac{\sin(t)}{t} + B\frac{\cos(t)}{t} \mid A, B \in \mathbb{R}\}.$$

On applique le méthode de variations des constantes, en posant

$$f_p : t \mapsto A(t)\frac{\sin(t)}{t} + B(t)\frac{\cos(t)}{t}$$

où A, B sont des fonctions deux fois dérivables de I dans $\mathbb{R}$.
Alors f_p est solution de (E) sur I si, et seulement si, pour tout $t \in I$:

$$\begin{cases} A'(t)\frac{\sin(t)}{t} + B'(t)\frac{\cos(t)}{t} = 0 \\ A'(t)\frac{t\cos(t)-\sin(t)}{t^2} - B'(t)\frac{t\sin(t)+\cos(t)}{t^2} = t \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} A'(t)\sin(t) + B'(t)\cos(t) = 0 \\ A'(t)(t\cos(t) - \sin(t)) - B'(t)(t\sin(t) + \cos(t)) = t^3 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} A'(t)\sin(t) + B'(t)\cos(t) = 0 \\ A'(t)\cos(t) - B'(t)\sin(t) = t^2 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow \sin(t)L_1 + \cos(t)L_2$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} A'(t)\sin(t) + B'(t)\cos(t) = 0 \\ A'(t) = t^2\cos(t) \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} B'(t) = -t^2\sin(t) \\ A'(t) = t^2\cos(t) \end{cases}$$

En effectuant deux IPP à la suite pour $\int A'(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int B'(t)\,\mathrm{d}t$ également, on obtient, pour $t \in I$:

$$A(t) = (t^2-2)\sin(t) + 2t\cos(t) \text{ et } B(t) = (t^2-2)\cos(t) - 2t\sin(t).$$

Ainsi la fonction

$$\begin{aligned} f_p : t \mapsto & A(t)\frac{\sin(t)}{t} + B(t)\frac{\cos(t)}{t} \\ &= (t^2-2)\frac{\sin^2(t)}{t} + 2\sin(t)\cos(t) + (t^2-2)\frac{\cos^2(t)}{t} - 2\cos(t)\sin(t) \\ &= t - \frac{2}{t}. \end{aligned}$$

est solution de (E) et au final :

$$\mathcal{S} = f_p + \mathcal{S}_h = \{t \mapsto t - \frac{2}{t} + A\frac{\sin(t)}{t} + B\frac{\cos(t)}{t} \mid A, B \in \mathbb{R}\}.$$

5. Ordre 2 : Exemples et exercices de résolutions complètes

Exemple 12.

On considère l'équation (E) : $t^2y'' - 2ty' + 2y = t^3\cos(t)$ sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathcal{S}$ l'ensemble de ses solutions et $\mathcal{S}_h$ l'ensemble de ses solutions homogènes.

En recherchant une première solution de l'équation homogène on s'aperçoit aisément que $f_1 : t \mapsto t$ fait l'affaire sur $\mathbb{R}$.
Avec, par exemple, la méthode de Lagrange ou en cherchant des solutions polynomiales, on obtient ensuite $f_2 : t \mapsto t^2$ comme seconde solution sur $\mathbb{R}$. Par suite, si on note $\mathcal{S}_{h1}$ et $\mathcal{S}_{h2}$ les solutions de l'équation homogène sur $I_1 =]-\infty, 0[$ et $I_2 =]0, +\infty[$ respectivement, on obtient :

$$\mathcal{S}_{h1} = \{t \mapsto At + Bt^2 \mid A, B \in \mathbb{R}\} \text{ et } \mathcal{S}_{h2} = \{t \mapsto Ct + Dt^2 \mid C, D \in \mathbb{R}\}.$$

En raccordant les solutions homogènes, on obtient :

$$\mathcal{S}_h = \{t \mapsto At + Bt^2 \mid A, B \in \mathbb{R}\}.$$

Avec, par exemple, la méthode de variations de constantes, on obtient que $f_p : t \mapsto t\cos(t)$ est solution de (E) sur I_1 et I_2 ; puis on vérifie qu'il en est de même sur $\mathbb{R}$.
On obtient donc :

$$\mathcal{S} = \{t \mapsto t\cos(t) + At + Bt^2 \mid A, B \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 15.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. (E) : $t^2y'' - ty' + y = t^2(t-1)e^{-t}$.
2. (E) : $ty'' + 3y' - 4t^3y = -8te^{-t^2}$.

E&P

Exercices et problèmes

Exercice 16.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On considère l'équation $(E) : X' = AX$ sur $\mathbb{R}$ et on munit $M_{n,1}(\mathbb{R})$ de sa norme canonique.

Montrer que si f est une solution de (E), alors la fonction $t \mapsto \|f(t)\|$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Correction.

Comme $t \mapsto \|f(t)\|$ est à valeurs positives, $t \mapsto \|f(t)\|$ est croissante sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $\varphi : t \mapsto \|f(t)\|^2$ est croissante sur $\mathbb{R}$. Étudions donc la fonction φ.
Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que solution de l'équation (E) et $B = (\cdot|\cdot)$ est différentiable sur $M_{n,1}(\mathbb{R})^2$ car bilinéaire sur $M_{n,1}(\mathbb{R})^2$, φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\varphi'(t) = \mathrm{d}B_{f(t)}(f'(t)) = (f(t)|f'(t)) + (f'(t)|f(t)) = 2(f(t)|f'(t))$$

et donc, comme f est solution de (E) :

$$\varphi'(t) = 2(f(t)|Af(t)) = 2{}^tX(t)AX(t) \geq 0,$$

car $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
Il en résulte que φ est croissante sur $\mathbb{R}$ et donc $t \mapsto \|f(t)\|$ l'est aussi.

Exercice 17. *Zéros entrelacés*

Soit a_0, a_1 des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle $(E) : y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0$.

1. Soit f une solution non nulle de (E). Montrer que les zéros de f sont isolés i.e. pour $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(t_0) = 0$, il existe un voisinage de t sur lequel f ne s'annule pas sauf en t_0.
2. Soit f, g des solutions de E non colinéaires.
   (a) Montrer que f et g ne s'annulent pas simultanément.
   (b) Soit $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ tel que $f(t_0) = 0 = f(t_1)$ et, pour tout $t \in]t_0, t_1[$, $f(t) \neq 0$ (ainsi t_0 et t_1 sont deux zéros consécutifs de f).
   Montrer qu'il existe un unique $c \in]t_0, t_1[$ tel que $g(c) = 0$.

Correction.

Comme a et b sont continues sur I, les solutions de (E) sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et l'ensemble des solutions de (E) est un espace vectoriel de dimension 2.

1. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que $f(t_0) = 0$. Montrons que $f'(t_0) \neq 0$.

Supposons par l'absurde que $f'(t_0) = 0$. Alors f est solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0 \\ y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = 0 \end{cases}$ dont la fonction nulle est l'unique solution. Contradiction !
Ainsi, $f'(t_0) \neq 0$ et donc il existe un voisinage de t_0 sur lequel f ne s'annule pas sauf en t_0.

2. Comme f, g sont des solutions de E non colinéaires, (f, g) est une base des solutions de (E).
   On note $W_{f,g}$ le wronskien de f et g. Alors, (f, g) étant une base des solutions de (E), $W_{f,g}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
   (a) On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t)g'(t) - f'(t)g(t) = W_{f,g}(t) \neq 0$ donc f et g ne s'annulent pas simultanément sur $\mathbb{R}$.
   (b) La fonction $W_{f,g} = fg' - f'g$ est continue sur $\mathbb{R}$ car f, g sont de classe C^1. Or, celui-ci ne s'annulle pas sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $W_{f,g}$ est de signe constant sur $\mathbb{R}$.
   De plus, la fonction :
   $$\left(\frac{g}{f}\right)^2 = \frac{W_{f,g}}{f^2}$$
   est non nulle et de signe constant sur $]t_0, t_1[$.
   Par suite, $\frac{g}{f}$ est strictement monotone sur $]t_0, t_1[$. Or, comme, d'après la question précédente, g est ne s'annule pas en t_0 ni t_1, $\frac{g}{f}$ admet pour limites $\pm\infty$ en t_0 et t_1.
   Ainsi, ces limites sont de signes opposés car $\frac{g}{f}$ est monotone et donc, $\frac{g}{f}$ étant continue sur $]t_0, t_1[$ comme quotient de fonctions continues, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $c \in]t_0, t_1[$ tel que $\frac{g}{f}(c) = 0$ et donc tel que $g(c) = 0$.