ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES 1

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Concours Blanc MP 2026 : E3A-CCinP

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé d'un exercice et d'un problème, tous indépendants.

E3A 2025

EXERCICE 1

Question de cours

1. Rappeler le développement en série entière de la fonction exponentielle et son domaine de validité.

*****

On pose, lorsque cela est possible, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$.

2. Montrer que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

3. Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

4. Démontrer que la fonction f est lipschitzienne sur tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.

5. Prouver que pour tout réel positif x, $f'(x) \leq e^x$.

6. Soient x et y deux réels positifs. On note $z = \max(x,y)$. Prouver que l'on a : $|f(x) - f(y)| \leqslant e^z\,|x-y|$.

7. Prouver que l'on a : $f(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$.

On pose, pour tout $x > 0$, $g(x) = \int_1^x \frac{1}{t[f(t)]^2}\,dt$.

8. Justifier que g est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

9. Étudier le signe de g sur $]0, +\infty[$.

10. Montrer que : $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} \ln(x)$.

11. Prouver que pour tout $t > 0$, on a : $f(t) > 1 + t$.

12. En déduire que g possède une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.

13. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $F(X) = \frac{1}{X(1+X)^2}$.

14. Démontrer que pour tout $x > 1$, on a :

$$g(x) \leqslant \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1} + \ln(2) - \frac{1}{2}$$

15. En déduire que g est majorée par $\ln(2)$ sur $]0, +\infty[$.

IMPRIMERIE NATIONALE – 25 1047 – D'après documents fournis

PROBLÈME

Il existe de nombreuses méthodes pour déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Ce problème propose deux méthodes différentes de recherche de la valeur de cette somme.

Q8. Question préliminaire

Si on admet que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, que vaut la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$?

Partie I

Q9. On note, pour tout entier naturel n, $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n \mathrm{d}x$.

Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto (\sin x)^{n+1}$, puis déterminer une relation entre W_{n+2} et W_n.

En déduire, pour tout entier naturel n, que $W_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Q10. Déterminer sur l'intervalle $]-1, 1[$ le développement en série entière des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $x \mapsto \operatorname{Arcsin} x$.

Q11. En déduire que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin x)^{2n+1}$.

Q12. Justifier que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin x)^{2n+1}\right] \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin x)^{2n+1} \mathrm{d}x$.

Q13. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Partie II

Q14. Donner sur l'intervalle $]-1,1[$ le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$, puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$.

On donnera le résultat sous la forme de la somme d'une série numérique.

Q15. On pose pour $x \in [0,+\infty[$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Démontrer que la fonction *f* est bien définie et est continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

Q16. Établir que cette fonction *f* est de classe C^1 sur l'intervalle $]0,1]$ et exprimer $f'(x)$ comme une intégrale.

Q17. Réduire au même dénominateur l'expression $\dfrac{t}{1+t^2} - \dfrac{x^2 t}{1+t^2x^2}$ et en déduire que pour tout $x \in]0,1[$, $f'(x) = \dfrac{\ln x}{x^2-1}$.

Q18. Calculer $f(1)$, puis en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 24 1089 – D'après documents fournis