

Chapitre II

Intégrale généralisée

Table des matières

Partie A : Intégrale généralisée sur $[a, +\infty[$	2
1. Généralités	2
2. Intégrale généralisée de fonctions positives	11
3. Intégrabilité	15
Partie B : Intégration sur un intervalle quelconque	17
1. Intégrale généralisée sur $] - \infty, a]$	17
2. Intégrale généralisée sur $]a, b]$ ou $[a, b[$	18
3. Intégration sur un intervalle ouvert	22
Partie C : Propriétés de l'intégrale généralisée	25
1. Propriétés de l'intégrale	25
2. Intégration par parties et changement de variable	26
3. Intégration des relations de comparaison	38
Exercices et problèmes	44

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; les intervalles considérés sont supposés d'intérieur non vide et a désigne un nombre réel.

Partie A

Intégrale généralisée sur $[a, +\infty[$

1. Généralités

a. Définitions et exemples

Définition 1. *Intégrale convergente*

Soit $f \in C_{pm}([a, +\infty[, \mathbb{K})$.

Si la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f$ existe et est finie, on note $\int_a^{+\infty} f$ ou encore $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ cette quantité, i.e. :

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt.$$

Dans ce cas, on dit que $\int_a^{+\infty} f$ **converge**.

Dans le cas contraire, on dit que $\int_a^{+\infty} f$ **diverge**.

Proposition-Notation 1.

Soit $f \in C([a, +\infty[, \mathbb{K})$ et F une primitive de f . L'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge si, et seulement si F admet une limite finie en $+\infty$. Dans ce cas, on a :

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - F(a) = \underbrace{[F(t)]_a^{+\infty}}_{\text{notation}}.$$

Démonstration.

D'après le théorème fondamental de l'analyse, on a, pour tout $x \in [a, +\infty[$:

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$$

Donc l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge si, et seulement si, $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ admet une limite finie en $+\infty$ si, et seulement si, F admet une limite finie en $+\infty$.

Dans ce cas, on a :

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x) - F(a)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - F(a).$$

□

Exemple 1.

- Soit $\alpha > 0$. Alors $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ converge et on a $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}$.
- L'intégrale $\int_0^{+\infty} \cos(t) dt$ diverge.

- Comme $\alpha \neq 0$, $t \mapsto -\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha}$ est une primitive de la fonction $t \mapsto e^{-\alpha t}$ et comme $\alpha > 0$, elle admet pour limite 0 en $+\infty$. Par suite, $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ converge et on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt = \left[-\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha} \right]_0^{+\infty} = 0 - \left(-\frac{e^{-\alpha 0}}{\alpha} \right) = \frac{1}{\alpha}.$$

- Pour $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x \cos(t) dt = \sin(x)$; or $\sin$ ne possède pas de limite quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 1.

Discuter de la convergence des intégrales suivantes et en cas de convergence, déterminer la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt \quad \int_0^{+\infty} e^{it} dt \quad \int_0^{+\infty} te^t dt \quad \int_1^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) dt.$$

Correction.

1. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $I = [0, +\infty[$ et $F = \arctan$ est une primitive de f sur I . De plus, F admet $\frac{\pi}{2}$ comme limite en $+\infty$ donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$ converge et on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan(t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

2. La fonction $f : t \mapsto e^{it}$ est continue sur $I = [0, +\infty[$ et $F : t \mapsto \frac{e^{it}}{i}$ est une primitive de f sur I . De plus, F n'admet pas de limite en $+\infty$ (en effet, il suffit de considérer par exemple la suite $(e^{i\pi n})_{n \in \mathbb{N}}$ et d'utiliser la caractérisation séquentielle de la limite), donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{it} dt$ diverge.
3. La fonction $f : t \mapsto te^t$ est continue sur $I = [0, +\infty[$ et $F : t \mapsto (t-1)e^t$ est une primitive de f sur I (on peut retrouver cette primitive, sans connaissance du résultat a priori, par

une intégration par parties par exemple). De plus, F admet $+\infty$ comme limite en $+\infty$ donc $\int_0^{+\infty} te^t dt$ diverge.

4. La fonction $f : t \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)$ est continue sur $I = [1, +\infty[$. De plus, par une intégration par parties, on trouve :

$$\begin{aligned}\int f(t) dt &= t \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) - \int t \frac{-\frac{2}{t^3}}{1 + \frac{1}{t^2}} dt \\ &= t \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) + 2 \int \frac{1}{1 + t^2} dt \\ \int f(t) dt &= t \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) + 2 \arctan(t).\end{aligned}$$

Par suite, $F : t \mapsto t \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) + 2 \arctan(t)$ est une primitive de f sur I et comme $\ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 0 + 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$$

Ainsi, $\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$ converge et comme $F(1) = \ln(2) + \frac{\pi}{2}$, on a :

$$\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt = [F(t)]_1^{+\infty} = \pi - (\ln(2) + \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - \ln(2).$$

Exercice 2.

- Donner un exemple de fonction $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ continue telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$ et telle que $\int_1^{+\infty} f$ diverge.
- Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue telle que f n'est pas bornée et telle que $\int_1^{+\infty} f$ converge.

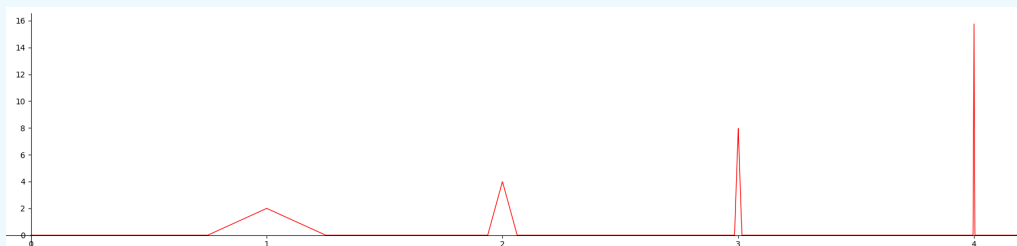
Correction.

1. On peut considérer la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t}$. En effet, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$ et

$$\int_1^x f(t) dt = [\ln(t)]_1^x = \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

2. On peut considérer la fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par :

- pour $n \in \mathbb{N}^*$, f est affine sur :
 - l'intervalle $[n - \frac{1}{4^n}, n]$ avec $f(n - \frac{1}{4^n}) = 0$ et $f(n) = 2^n$;
 - l'intervalle $[n, n + \frac{1}{4^n}]$ avec $f(n) = 2^n$ et $f(n + \frac{1}{4^n}) = 0$;
- $f(t) = 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+ \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [n - \frac{1}{4^n}, n + \frac{1}{4^n}]$.



Alors f est continue et non bornée sur $\mathbb{R}_+$. De plus, on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_{n-\frac{1}{4^n}}^{n+\frac{1}{4^n}} f(t) dt = \frac{1}{2^n}.$$

On a, pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n + \frac{1}{4^n} > x$:

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t) dt &\leq \int_0^{n+\frac{1}{4^n}} f(t) dt = \sum_{k=1}^n \left(\int_{k-\frac{1}{4^k}}^{k+\frac{1}{4^k}} f(t) dt \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1. \end{aligned}$$

Ainsi la fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ est majorée sur $\mathbb{R}_+$ et, de plus, la fonction f étant positive, la fonction F est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Il en résulte que F admet une limite finie en $+\infty$ (on peut montrer simplement que la limite est bien 1) et donc $\int_0^{+\infty} f$ converge.

b. Intégrales de Riemann en $+\infty$

Proposition 2. Intégrale de Riemann en $+\infty$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Démonstration.

Pour $\alpha = 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ diverge. En effet, une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $[1, +\infty[$ est la fonction $\ln$ qui admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

Pour $\alpha \neq 1$, on a :

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \left[\frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}} \right]_1^x = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha} \begin{cases} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty & \text{si } \alpha < 1; \\ \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

Ainsi, si $\alpha > 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ converge et si $\alpha < 1$ $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ diverge.

Conclusion : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$; et dans le cas $\alpha > 1$, on a

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha - 1}$$

□

c. Propriétés de l'intégrale généralisée sur $[a, +\infty[$

Proposition 3. *Relation de Chasles*

Soit $f \in C_{pm}([a, +\infty[, \mathbb{K})$ et $b \in [a, +\infty[$. L'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ est convergente si, et seulement si, $\int_b^{+\infty} f$ est convergente. Dans ce cas, on a :

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^{+\infty} f(t) dt.$$

Démonstration.

Soit $f \in C_{pm}([a, +\infty[, \mathbb{K})$ et $b \in [a, +\infty[$. Comme f est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ et donc $[a, b]$, $\int_a^b f(t) dt$ est bien définie et on a, pour tout $x \in [a, +\infty[$, d'après la relation de Chasles (pour les intégrales sur un segment) :

$$\int_a^x f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^x f(t) dt$$

Ainsi, $\int_a^{+\infty} f$ converge si, et seulement si, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ admet une limite finie en $+\infty$, si et seulement si, $x \mapsto \int_b^x f(t) dt$ admet une limite finie en $+\infty$, si et seulement si, $\int_b^{+\infty} f$ converge.

Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} f(t) dt &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_a^b f(t) dt + \int_b^x f(t) dt \right) \\ &= \int_a^b f(t) dt + \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_b^x f(t) dt \\ &= \int_a^b f(t) dt + \int_b^{+\infty} f(t) dt. \end{aligned}$$

□

Proposition 4. Linéarité de l'intégrale généralisée

Soit $f, g \in C_{pm}([a, +\infty[, \mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Si les intégrales $\int_a^{+\infty} f$ et $\int_a^{+\infty} g$ convergent, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} (\lambda f + \mu g)$ converge et on a :

$$\int_a^{+\infty} (\lambda f + \mu g)(t) dt = \lambda \int_a^{+\infty} f(t) dt + \mu \int_a^{+\infty} g(t) dt.$$

Démonstration.

Soit $f, g \in C_{pm}([a, +\infty[, \mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Pour tout $x \in [a, +\infty[$, on a, par linéarité de l'intégrale sur un segment :

$$\int_a^x (\lambda f + \mu g)(t) dt = \lambda \int_a^x f(t) dt + \mu \int_a^x g(t) dt$$

Par suite, si les fonctions $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ et $x \mapsto \int_a^x g(t) dt$ admettent des limites finies en $+\infty$, alors $x \mapsto \int_a^x (\lambda f + \mu g)(t) dt$ admet une limite finie en $+\infty$. Dans ce cas :

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} (\lambda f + \mu g)(t) dt &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x (\lambda f + \mu g)(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\lambda \int_a^x f(t) dt + \mu \int_a^x g(t) dt \right) \\ &= \lambda \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt + \mu \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x g(t) dt \\ &= \lambda \int_a^{+\infty} f(t) dt + \mu \int_a^{+\infty} g(t) dt. \end{aligned}$$

□

Exercice 3.

Déduire de la proposition précédente que l'ensemble des fonctions f continues par morceaux telles que $\int_a^{+\infty} f$ converge est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Que dire de l'application $f \mapsto \int_a^{+\infty} f$?

Correction.

D'après la proposition précédente, l'ensemble $E = \{f \in C_{pm}([a, +\infty[, \mathbb{K}) \mid \int_a^{+\infty} f \text{ converge}\}$ est stable par combinaison linéaire ; de plus, la fonction nulle appartient à E donc E est un sous-espace vectoriel de $C_{pm}([a, +\infty[, \mathbb{K})$: ainsi E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Toujours d'après la proposition précédente, on conclut que $f \mapsto \int_a^{+\infty} f$ est une forme linéaire sur E .

Proposition 5.

Soit $f \in C_{pm}([a, +\infty[, \mathbb{C})$. On a les équivalences suivantes :

- L'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge si, et seulement si, $\int_a^{+\infty} \bar{f}$ converge. Et dans ce cas, on a :

$$\int_a^{+\infty} \overline{f(t)} dt = \overline{\int_a^{+\infty} f(t) dt}.$$

- L'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge si, et seulement si, $\int_a^{+\infty} \operatorname{Re}(f)$ et $\int_a^{+\infty} \operatorname{Im}(f)$ convergent. Et dans ce cas, on a :

$$\operatorname{Re} \left(\int_a^{+\infty} f(t) dt \right) = \int_a^{+\infty} \operatorname{Re}(f(t)) dt ; \quad \operatorname{Im} \left(\int_a^{+\infty} f(t) dt \right) = \int_a^{+\infty} \operatorname{Im}(f(t)) dt ;$$

et

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \int_a^{+\infty} \operatorname{Re}(f(t)) dt + i \int_a^{+\infty} \operatorname{Im}(f(t)) dt.$$

Démonstration.

- L'application $z \mapsto \bar{z}$ est continue de $\mathbb{C}$ dans lui-même, donc la fonction $x \mapsto \int_a^x f$ admet une limite finie en $+\infty$ si, et seulement si, la fonction $x \mapsto \overline{\int_a^x f} = \int_a^x \bar{f}$ admet une limite finie en $+\infty$. D'où l'équivalence annoncée par définition de la convergence d'une intégrale généralisée et on a, dans ce cas :

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} \overline{f(t)} dt &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x \overline{f(t)} dt \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \overline{\int_a^x f(t) dt} \\ &= \overline{\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt} \\ \int_a^{+\infty} \overline{f(t)} dt &= \overline{\int_a^{+\infty} f(t) dt}. \end{aligned}$$

- Pour le sens direct de l'équivalence : si $\int_a^{+\infty} f$ converge, alors, d'après le point précédent, $\int_a^{+\infty} \bar{f}$ converge ; et, de plus, on a $\operatorname{Re}(f) = \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}\bar{f}$ et $\operatorname{Im}(f) = \frac{1}{2i}f - \frac{1}{2i}\bar{f}$; donc, par

combinaison linéaire (Proposition 4), $\int_a^{+\infty} \operatorname{Re}(f)$ et $\int_a^{+\infty} \operatorname{Im}(f)$ convergent et on a :

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} \overline{f(t)} dt &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x \overline{f(t)} dt \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \overline{\int_a^x f(t) dt} \\ &= \overline{\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt} \\ \int_a^{+\infty} \overline{f(t)} dt &= \overline{\int_a^{+\infty} f(t) dt}. \end{aligned}$$

Réciproquement, si $\int_a^{+\infty} \operatorname{Re}(f)$ et $\int_a^{+\infty} \operatorname{Im}(f)$ convergent, comme $f = \operatorname{Re}(f) + i\operatorname{Im}(f)$, par combinaison linéaire (Proposition 4), $\int_a^{+\infty} f$ converge ; et on a :

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \int_a^{+\infty} \operatorname{Re}(f(t)) dt + i \int_a^{+\infty} \operatorname{Im}(f(t)) dt.$$

□

Proposition 6. Positivité et croissance

Soit $f, g \in C_{pm}([a, +\infty[, \mathbb{R})$ telles que $\int_a^{+\infty} f$ et $\int_a^{+\infty} g$ convergent.

- Si f est positive (i.e. pour tout $t \in [a, +\infty[, f(t) \geq 0$), alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt \geq 0$.
- Si $f \leq g$ (i.e. pour tout $t \in [a, +\infty[, f(t) \leq g(t)$), alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt \leq \int_a^{+\infty} g(t) dt$.

Démonstration.

- On suppose f positive. Alors, par positivité de l'intégrale sur un segment, pour tout $x \in [a, +\infty[, \int_a^x f(t) dt \geq 0$. Par passage à la limite, on obtient donc que $\int_a^{+\infty} f(t) dt \geq 0$.
- Si $f \leq g$, alors $h = g - f \geq 0$. De plus, par combinaison linéaire, $\int_a^{+\infty} h$ converge donc $\int_a^{+\infty} \underbrace{h(t)}_{g(t)-f(t)} dt \geq 0$.

Ainsi, $\int_a^{+\infty} f$ et $\int_a^{+\infty} g$ étant convergentes, par linéarité de l'intégrale généralisée, $\int_a^{+\infty} f(t) dt \leq \int_a^{+\infty} g(t) dt$.

□

Théorème 1.

Soit $f \in C([a, +\infty[, \mathbb{R})$ une fonction **continue** et **positive** sur $[a, +\infty[$. On a $\int_a^{+\infty} f(t) dt = 0$ si, et seulement si, $f = 0$.

Démonstration.

Soit $f \in C([a, +\infty[, \mathbb{R})$ une fonction continue, positive sur $[a, +\infty[$.

($\Leftarrow$) Si $f = 0$, alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge car la fonction nulle est une primitive de f et admet une limite finie... nulle en $+\infty$ et on a $\int_a^{+\infty} f(t) dt = [0]_0^{+\infty} = 0$.

($\Rightarrow$) Raisonnons par contraposée. On suppose $f \neq 0$. Comme de plus f est positive, il existe $t_0 \in [a, +\infty[$ tel que $f(t_0) > 0$.

Posons $\varepsilon = \frac{f(t_0)}{2} > 0$. Par continuité de f en t_0 , il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $t \in [a, +\infty[$, si $|t - t_0| \leq \delta$ alors $|f(t) - f(t_0)| \leq \varepsilon$.

En particulier, pour tout $t \in [t_0, t_0 + \delta]$, on a alors :

$$f(t) \geq f(t_0) - \varepsilon = \frac{f(t_0)}{2}.$$

Par suite, par croissance de l'intégrale sur l'intervalle $[t_0, t_0 + \delta]$, on a :

$$\int_{t_0}^{t_0+\delta} f(t) dt \geq \int_{t_0}^{t_0+\delta} \frac{f(t_0)}{2} dt = \delta \frac{f(t_0)}{2}.$$

Comme $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge, d'après la relation de Chasles (Proposition 3), $\int_{t_0+\delta}^{+\infty} f(t) dt$ converge et on a :

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \int_a^{t_0} f(t) dt + \int_{t_0}^{t_0+\delta} f(t) dt + \int_{t_0+\delta}^{+\infty} f(t) dt.$$

De plus, f est positive, donc, par positivité de l'intégrale, $\int_a^{t_0} f(t) dt \geq 0$ et $\int_{t_0+\delta}^{+\infty} f(t) dt \geq 0$. Par suite, on a :

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt \geq \int_{t_0}^{t_0+\delta} f(t) dt \geq \delta \frac{f(t_0)}{2} > 0.$$

Il en résulte que $\int_a^{+\infty} f(t) dt \neq 0$.

Ainsi, par contraposée, on a prouvé que si $\int_a^{+\infty} f(t) dt = 0$ alors $f = 0$. □

Proposition 7. Dérivation

Soit $f \in C([a, +\infty[, \mathbb{R})$ une fonction **continue** sur $[a, +\infty[$ telle que $\int_a^{+\infty} f$ converge. L'application de $\varphi : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi : x \mapsto \int_x^{+\infty} f(t) dt$$

est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ et on a $\varphi' = -f$.

Démonstration.

Comme f est continue sur $[a, +\infty[$, la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ et vérifie $F' = f$. De plus, pour tout $x \in [a, +\infty[$, d'après la relation de Chasles (Proposition 3), l'intégrale $\int_x^{+\infty} f(t) dt$ est convergente car, par hypothèse, $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ l'est et on a :

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{+\infty} f(t) dt.$$

Par suite, la fonction φ est bien définie sur $[a, +\infty[$ et, pour tout $x \in [a, +\infty[$, on a :

$$\varphi(x) = \int_a^{+\infty} f(t) dt - F(x).$$

Ainsi, φ est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ comme combinaison linéaire de fonctions de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ (la fonction constante $x \mapsto \int_a^{+\infty} f(t) dt$ et la fonction F) et on a, pour tout $x \in [a, +\infty[$:

$$\varphi(x) = 0 - F'(x) = -f.$$

□

2. Intégrale généralisée de fonctions positives

Proposition 8.

Soit $f \in C_{pm}([a, +\infty[, \mathbb{R})$ une fonction positive.

— L'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge si, et seulement si, la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est majorée sur $[a, +\infty[$. Dans ce cas, on a :

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \sup_{x \in [a, +\infty[} \int_a^x f(t) dt.$$

— L'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ diverge si, et seulement si, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt = +\infty$.

Démonstration.

Soit $f \in C_{pm}([a, +\infty[, \mathbb{R})$ une fonction positive. Alors l'application $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est croissante car, pour tous $x, y \in [a, +\infty[$ avec $x \leq y$, par positivité de l'intégrale, $\int_x^y f(t) dt \geq 0$ et on

a, d'après la relation de Chasles (la classique cette fois-ci) :

$$F(y) = \int_a^y f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \underbrace{\int_x^y f(t) dt}_{\geq 0} \geq \int_a^x f(t) dt = F(x).$$

De plus, d'après le théorème de la limite monotone, une fonction croissante g sur $[a, +\infty[$:

- i) admet une limite finie en $+\infty$ si, et seulement si, elle est majorée sur $[a, +\infty[$ et dans ce cas, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \sup_{x \in [a, +\infty[} g(x)$;
- ii) tend vers $+\infty$ si, et seulement si, elle n'est pas majorée.

Par suite,

- D'après la proposition-notation 1, $\int_a^{+\infty} f$ converge si, et seulement si, la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ admet une limite finie en $+\infty$ et donc, d'après i), si, et seulement si, F est majorée sur $[a, +\infty[$ et dans ce cas :

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \sup_{x \in [a, +\infty[} F(x) = \sup_{x \in [a, +\infty[} \int_a^x f(t) dt.$$

- Par négation de ce qui précède, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ diverge si, et seulement si, F n'est pas majorée et donc, d'après ii), si et seulement si, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$.

□

Théorème 2. Comparaison

Soit $f, g \in C_{pm}([a, +\infty[, \mathbb{R})$ des fonctions positives.

- i) On suppose qu'il existe $A \geq a$ tel que, pour tout $t \geq A$, $f(t) \leq g(t)$.
 - Si $\int_a^{+\infty} g$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge.
 - Si $\int_a^{+\infty} f$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} g$ diverge.
- ii) On suppose $f = o(g)$ (ou $f = O(g)$) en $+\infty$. Si $\int_a^{+\infty} g$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge.
- iii) On suppose $f \sim_{x \rightarrow +\infty} g$. Alors $\int_a^{+\infty} f$ et $\int_a^{+\infty} g$ sont de même nature.

Démonstration.

Soit $f, g \in C_{pm}([a, +\infty[, \mathbb{R})$ des fonctions positives.

- i) On suppose qu'il existe $A \geq a$ tel que, pour tout $t \geq A$, $f(t) \leq g(t)$. On note $F : x \mapsto \int_A^x f(t) dt$ et $G : x \mapsto \int_A^x g(t) dt$.
 - Supposons que $\int_a^{+\infty} g$ converge. D'après la relation de Chasles (Proposition 3), l'inté-

grale $\int_A^{+\infty} g$ converge. Par positivité de g , d'après la proposition 8, G est majorée sur $[A, +\infty[$. Or, par croissance de l'intégrale, $F \leq G$ donc F est majorée sur $[A, +\infty[$.

Par suite, toujours d'après la proposition 8, $\int_A^{+\infty} g$ converge. Ainsi, d'après la relation de Chasles (Proposition 3), $\int_a^{+\infty} f$ converge.

— Il s'agit de la contraposée du point précédent.

- ii) Si $f = 0(g)$, alors il existe $A \geq a$ et $M > 0$ tel que, pour tout $t \geq A$, $f(t) \leq Mg(t)$. Or $\int_a^{+\infty} Mg$ converge si, et seulement si, $\int_a^{+\infty} g$ converge, donc, si $\int_a^{+\infty} g$ converge, alors $\int_a^{+\infty} Mg$ et donc, d'après i), $\int_a^{+\infty} f$ converge.

Si $f = o(g)$ alors $f = 0(g)$, donc, d'après ce qui précède, si $\int_a^{+\infty} g$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge.

- iii) Si $f \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g$, alors $f = 0(g)$ et $g = 0(f)$; ainsi, d'après ii), $\int_a^{+\infty} f$ converge si, et seulement si, $\int_a^{+\infty} g$ converge.

□

Exercice 4.

Étudier la convergence des intégrales suivantes :

1. $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha + 1}{3t^\beta + 5} dt$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$.
2. $\int_1^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln(t))^\beta} dt$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Correction.

1. Soit $f : t \mapsto \frac{t^\alpha + 1}{3t^\beta + 5}$. Alors f est définie (car $3t^\beta + 5 > 0$ pour tout $t \geq 0$), continue et positive sur $\mathbb{R}_+$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$ et on a :

$$\frac{t^\alpha + 1}{3t^\beta + 5} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t^\alpha}{3t^\beta} = \frac{1}{3t^{\beta-\alpha}}$$

Or, d'après le critère de Riemann en $+\infty$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\beta-\alpha}} dt$ converge si, et seulement si, $\beta - \alpha > 1$.

Par suite, $\int_1^{+\infty} \frac{t^\alpha + 1}{3t^\beta + 5} dt$ converge si, et seulement si, $\beta - \alpha > 1$.

De plus, f étant continue sur $[0, 1]$, $\int_0^1 \frac{t^\alpha + 1}{3t^\beta + 5} dt$ converge et donc :

$\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha + 1}{3t^\beta + 5} dt$ converge si, et seulement si, $\int_1^{+\infty} \frac{t^\alpha + 1}{3t^\beta + 5} dt$ converge si, et seulement si, $\beta - \alpha > 1$.

2. Soit $f : t \mapsto t^\alpha e^{-t}$. Alors f est définie, continue et positive sur $[1, +\infty[$ et on a, par croissances comparées :

$$t^2 f(t) = t^{2+\alpha} e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

donc $f(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$; or, d'après le critère de Riemann en $+\infty$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge, donc, par comparaison :

$$\text{pour tout } \alpha > 0, \quad \int_1^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt \text{ converge.}$$

3. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On pose $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha (\ln(t))^\beta}$. Alors f est définie, continue et positive sur $[2, +\infty[$.

— 1er cas : $\alpha > 1$.

On pose $a = \frac{\alpha+1}{2}$ et ainsi $\alpha > a > 1$. Alors $\alpha - a > 0$ et donc, par croissances comparées lorsque $\beta < 0$ et par produit de limites lorsque $\beta \geq 0$:

$$t^a f(t) = \frac{1}{t^{\alpha-a}} \ln(t)^{-\beta} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

donc $f(t) = o\left(\frac{1}{t^a}\right)$ en $+\infty$.

Or, d'après le critère de Riemann en $+\infty$, comme $a > 1$, $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^a} dt$ converge, donc, par comparaison, $\int_2^{+\infty} f(t) dt$ converge.

— 2eme cas : $\alpha < 1$.

Si $\beta \leq 0$, pour tout $t \geq e$, on a $\ln(t)^{-\beta} \geq 1$ donc, pour tout $t \geq e$:

$$f(t) \geq \frac{1}{t^\alpha}.$$

Or, d'après le critère de Riemann en $+\infty$, comme $\alpha < 1$, $\int_e^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ diverge, donc, par comparaison, $\int_e^{+\infty} f(t) dt$ diverge et ainsi, $\int_2^{+\infty} f(t) dt$ diverge.

On suppose $\beta > 0$. Comme pour tout $a > 0$, par croissances comparées, $\frac{\ln(t)^\beta}{t^a} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, il existe $t_0 > 1$ tel que, pour tout $t \geq t_0$, $\frac{\ln(t)^\beta}{t^a} \leq 1$ et donc, pour tout $t \geq t_0$:

$$\frac{1}{\ln(t)^\beta} \geq \frac{1}{t^a}.$$

On pose $a = \frac{1-\alpha}{2}$. Alors $\alpha + a = \frac{1+\alpha}{2} < 1$ et $a > 0$, donc il existe $t_0 > 1$ tel que, pour tout $t \geq t_0$:

$$f(t) = \frac{1}{t^\alpha \ln(t)^\beta} \geq \frac{1}{t^{\alpha+a}}$$

Or, d'après le critère de Riemann en $+\infty$, comme $\alpha + a < 1$, $\int_{t_0}^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha+a}} dt$ diverge, et donc, par comparaison, $\int_{t_0}^{+\infty} f(t) dt$ diverge et ainsi, $\int_2^{+\infty} f(t) dt$ diverge.

— 3eme cas : $\alpha = 1$.

Pour tout $t \geq 2$,

$$f(t) = \frac{1}{t \ln(t)^\beta} = \begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{1}{(1-\beta) \ln(t)^{\beta-1}} & \text{si } \beta \neq 1 \\ \frac{d}{dt} \ln(\ln(t)) & \text{si } \beta = 1 \end{cases}$$

Par suite, pour $x \geq 2$:

$$\int_2^x f(t) dt = \begin{cases} \frac{1}{(1-\beta)} (\ln(x)^{1-\beta} - \ln(2)^{1-\beta}) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty & \text{si } \beta < 1 \\ \ln(\ln(x)) - \ln(\ln(2)) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty & \text{si } \beta = 1 \\ \frac{1}{(\beta-1)} \left(\frac{1}{\ln(2)^{\beta-1}} - \frac{1}{\ln(x)^{\beta-1}} \right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\beta-1) \ln(2)^{\beta-1}} & \text{si } \beta > 1 \end{cases}$$

Donc, par définition, $\int_2^{+\infty} f(t) dt$ converge si, et seulement si, $\beta > 1$.

Conclusion : on a donc : $\int_2^{+\infty} f(t) dt$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

3. Intégrabilité

Définition 2. Intégrabilité

Soit $f \in C_{pm}([a, +\infty[, \mathbb{K})$. On dit que f est **intégrable** sur $[a, +\infty[$ ou que $\int_a^{+\infty} f$ est **absolument convergente** si l'intégrale $\int_a^{+\infty} |f|$ est convergente.

Théorème 3.

Soit $f \in C_{pm}([a, +\infty[, \mathbb{K})$. Si f est intégrable sur $[a, +\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge.

Démonstration.

On suppose que $f \in C_{pm}([a, +\infty[, \mathbb{K})$ est intégrable sur $[a, +\infty[$

— Traitons tout d'abord le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On note $f_+ = \max(f, 0)$ qui est continue par morceaux et positive sur $[a, +\infty[$ et $f_- = \min(f, 0)$ qui est continue par morceaux et négative sur $[a, +\infty[$. Alors $f = f_+ + f_-$, $|f| = f_+ - f_-$ et de plus :

$$0 \leq f_+ \leq |f| \text{ et } 0 \leq -f_- \leq |f|$$

Par suite, comme $\int_a^{+\infty} |f|$ converge et $f_+, -f_-$ sont positives, par comparaison, $\int_a^{+\infty} f_+$ et $\int_a^{+\infty} -f_-$ convergent. Ainsi, comme $f = f_+ + (-1)(-f_-)$, par combinaison linéaire, $\int_a^{+\infty} f$ converge.

- Ensuite, le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On a $f = \operatorname{Re}(f) + i\operatorname{Im}(f)$ avec $\operatorname{Re}(f), \operatorname{Im}(f) \in C_{pm}([a, +\infty[, \mathbb{R})$; et les inégalités :

$$|\operatorname{Re}(f)| \leq |f| \text{ et } |\operatorname{Im}(f)| \leq |f|.$$

Ainsi, comme f est intégrable sur $[a, +\infty[$, par comparaison, $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont intégrables sur $[a, +\infty[$ et sont à valeurs réelles, donc, d'après le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ précédent, $\int_a^{+\infty} \operatorname{Re}(f)$ et $\int_a^{+\infty} \operatorname{Im}(f)$ convergent.

Il en résulte que, d'après la proposition 5, $\int_a^{+\infty} f$ converge.

□

Exercice 5.

Déterminer la nature de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 + i} dt$ et de $\int_1^{+\infty} \frac{t \sin(t)}{\sqrt{\operatorname{sh}(t)}} dt$.

Correction.

1. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^2 + i}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et on a, pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$|f(t)| = \frac{1}{|t^2 + i|} = \frac{1}{\sqrt{t^4 + 1}} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}.$$

Or, d'après le critère de Riemann en $+\infty$ ($2 > 1$), $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge, donc par comparaison, $\int_1^{+\infty} |f(t)| dt$ converge i.e. f est intégrable sur $[1, +\infty[$. Par suite, $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge. De plus, f est continue sur le segment $[0, 1]$, donc $\int_0^1 f(t) dt$ converge; et ainsi, d'après la relation de Chasles, $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge.

2. La fonction $f : t \mapsto \frac{t \sin(t)}{\sqrt{\operatorname{sh}(t)}}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et on a, pour tout $t \in [1, +\infty[$:

$$\left| \frac{t \sin(t)}{\sqrt{\operatorname{sh}(t)}} \right| = \frac{t |\sin(t)|}{\sqrt{\operatorname{sh}(t)}} \leq \frac{t}{\sqrt{\operatorname{sh}(t)}} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2} t e^{-\frac{t}{2}} = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{t^2} \right).$$

Or, d'après le critère de Riemann en $+\infty$ ($2 > 1$), $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge, donc par comparaison, $\int_1^{+\infty} |f(t)| dt$ converge i.e. f est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Il en résulte que $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge.

Partie B

Intégration sur un intervalle quelconque

Dans cette partie, a, b désignent des réels tels que $a < b$.

1. Intégrale généralisée sur $] - \infty, a]$

Définition 3. *Intégrale convergente sur $] - \infty, a]$*

Soit $f \in C_{pm}(] - \infty, a], \mathbb{K})$.

Si la limite $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^a f$ existe et est finie, on note $\int_{-\infty}^a f$ ou encore $\int_{-\infty}^a f(t) dt$ cette quantité, i.e. :

$$\int_{-\infty}^a f(t) dt = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^a f(t) dt.$$

Dans ce cas, on dit que $\int_{-\infty}^a f$ **converge**.

Dans le cas contraire, on dit que $\int_{-\infty}^a f$ **diverge**.

Remarque 1.

Les propriétés de l'intégrale $\int_{-\infty}^a$ sont analogues à celle de l'intégrale $\int_a^{+\infty}$ et on les démontre sans difficulté en remarquant qu'en posant $\tilde{f} : t \mapsto f(-t)$, on obtient les propriétés suivantes :

- si $f \in C_{pm}(] - \infty, a], \mathbb{K})$ alors $\tilde{f} \in C_{pm}([-a, +\infty], \mathbb{K})$;
- les intégrales $\int_{-\infty}^a f$ et $\int_{-a}^{+\infty} \tilde{f}$ sont de même nature ;
- en cas de convergence, $\int_{-\infty}^a f(t) dt = \int_{-a}^{+\infty} \tilde{f}(t) dt$.

Exercice 6.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^0 e^{\alpha t} dt$ en fonction de α .

Correction.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Considérons $f : t \mapsto e^{\alpha t}$. Alors

$$F : t \mapsto \begin{cases} \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} & \text{si } \alpha \neq 0 \\ t & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$$

est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ et donc sur $] -\infty, 0]$. Or F admet une limite finie en $-\infty$ si, et seulement si, $\alpha > 0$. Donc $\int_{-\infty}^0 e^{\alpha t} dt$ converge si, et seulement si, $\alpha > 0$. Et dans ce cas,

$$\int_{-\infty}^0 e^{\alpha t} dt = \left[\frac{e^{\alpha t}}{\alpha} \right]_{-\infty}^0 = \frac{e^{\alpha \cdot 0}}{\alpha} - \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}.$$

Remarque : on aurait également pu utiliser la remarque précédente en remarquant que $g : t \mapsto e^{-\alpha t} = f(-t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ si, et seulement si, $\alpha > 0$.

2. Intégrale généralisée sur $]a, b]$ ou $[a, b[$

Définition 4. Intégrale convergente sur $[a, b[$

Soit $f \in C_{pm}([a, b[, \mathbb{K})$.

Si la limite $\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f$ existe et est finie, on note $\int_a^b f$ ou encore $\int_a^b f(t) dt$ cette quantité, i.e. :

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt.$$

Dans ce cas, on dit que $\int_a^b f$ **converge**.

Dans le cas contraire, on dit que $\int_a^b f$ **diverge**.

Définition 5. Intégrabilité

Soit $f \in C_{pm}([a, b], \mathbb{R})$. On dit que f est **intégrable** sur $]a, b]$ ou que $\int_a^b f$ est **absolument convergente** si l'intégrale $\int_a^b |f|$ est convergente.

Remarque 2.

On définit de manière analogue l'intégrale sur un intervalle du type $]a, b]$.

Tous les résultats de la partie concernant l'intégrale sur $[?, +\infty[$ sont transposables aux cas des intégrales sur $]a, b]$ et sur $[a, b[$; citons notamment **les propriétés de comparaison** et le théorème "intégrabilité d'une fonction implique convergence de l'intégrale de cette fonction" reproduit ci-après.

Théorème 4.

Soit $f \in C_{pm}([a, b[, \mathbb{R})$. Si f est intégrable sur $[a, b[$, alors $\int_a^b f$ converge.

Démonstration.

La démonstration est analogue au cas $[a, +\infty[$ en remplaçant simplement $+\infty$ par b . $\square$

Exemple 2.

- L'intégrale $\int_0^1 \ln(t) dt$ converge et $\int_0^1 \ln(t) dt = -1$.
- L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t} dt$ diverge.

- La fonction $\ln$ est continue sur $]0, 1]$. De plus, la fonction $F : t \mapsto t \ln(t) - t$ est une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $\ln$. Or, par croissances comparées, $t \ln(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 0^-$, donc F tend vers 0 en 0^+ . Ainsi, une primitive de $\ln$ admet une limite finie en 0 (0 étant la borne "posant problème"), donc, d'après la proposition-notation 1 adaptée à l'intervalle $]0, 1]$, l'intégrale $\int_0^1 \ln(t) dt$ converge et on a :

$$\int_0^1 \ln(t) dt = [t \ln(t) - t]_0^1 = 1 \times \ln(1) - 1 - \left(\lim_{t \rightarrow 0} (t \ln(t) - t) \right) = -1.$$

- La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue sur $]0, 1]$ et la fonction $\ln$ est une primitive de f sur cette intervalle ; de plus, $\ln$ a pour limite $-\infty$ en 0^+ et donc n'admet pas de limite finie en 0. Par suite, $\int_0^1 \frac{1}{t} dt$ diverge.

Proposition 9. Intégrales de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Les intégrales $\int_a^b \frac{1}{(b-t)^\alpha} dt$ et $\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha} dt$ convergent si, et seulement si, $\alpha < 1$.

Démonstration.

On traite la nature de $\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha} dt$:

- Si $\alpha = 1$, pour $a < x \leq b$, on a :

$$\int_x^b \frac{1}{t-a} dt = [\ln(t-a)]_x^b = \ln(b-a) - \ln(x-a) \xrightarrow[x \rightarrow a^+]{} +\infty$$

donc $\int_a^b \frac{1}{t-a} dt$ diverge.

- Si $\alpha \neq 1$, on a, pour $a < x \leq b$:

$$\begin{aligned} \int_x^b \frac{1}{(t-a)^\alpha} dt &= \left[\frac{1}{(1-\alpha)(t-a)^{\alpha-1}} \right]_x^b \\ &= \frac{1}{(1-\alpha)(b-a)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1-\alpha)(x-a)^{\alpha-1}} \\ \int_x^b \frac{1}{(t-a)^\alpha} dt &\begin{cases} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(1-\alpha)(b-a)^{\alpha-1}} & \text{si } \alpha < 1; \\ \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty & \text{si } \alpha > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Il en résulte que $\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha} dt$ converge si, et seulement si, $\alpha < 1$. □

Corollaire 1. Intégrale de Riemann en 0

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si, et seulement si, $\alpha < 1$.

Démonstration.

On applique la proposition précédente (deuxième intégrale) pour $a = 0$ et $b = 1$.

Voici tout de même la démonstration directe pour une potentielle question de colle :) :

- Si $\alpha = 1$, pour $0 < x \leq 1$, on a :

$$\int_x^1 \frac{1}{t} dt = [\ln(t)]_x^1 = -\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$$

donc $\int_0^1 \frac{1}{t} dt$ diverge.

- Si $\alpha \neq 1$, on a, pour $0 < x \leq 1$:

$$\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha} dt = \left[\frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}} \right]_x^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}} \begin{cases} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1; \\ \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

Il en résulte que $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si, et seulement si, $\alpha < 1$. □

Proposition 10.

Soit $f \in C_{pm}([a, b[, \mathbb{K})$.

- Si f est bornée sur $[a, b[$, alors f est intégrable sur $[a, b[$.
- Si f est prolongeable par continuité en b i.e. si f admet une limite finie en b , alors f est

intégrable sur $[a, b[$.

Démonstration.

Soit $f \in C_{pm}([a, b[, \mathbb{K})$.

- On suppose f bornée sur $[a, b[$. Alors il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $t \in [a, b[$, $|f(t)| \leq M$. Or, la fonction constante en M sur $[a, b[$ est d'intégrale convergente, donc par comparaison (d'intégrales de fonctions positives!), $\int_a^b |f(t)| dt$ converge i.e. f est intégrable sur $[a, b[$.
- On remarque qu'une fonction f continue par morceaux sur $[a, b[$ et prolongeable par continuité en b est la restriction d'une fonction g continue par morceaux sur $[a, b]$. Or, toute fonction continue par morceaux sur un **segment** est bornée sur ce segment (*Exercice : prouver cette affirmation ; puis trouver un exemple de fonction continue par morceaux sur $[0, 1[$ qui n'est pas bornée*), donc f est bornée sur $[a, b[$ comme restriction d'une fonction bornée. Ainsi, d'après le cas précédent, f est intégrable sur $[a, b[$.

□

Exercice 7.

Étudier la nature des intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{t^3}{t^{\frac{7}{2}} + 1} dt \quad \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t\sqrt{t}} dt \quad \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt \quad \int_0^1 \frac{1}{e^{1-t} - 1} dt.$$

Correction.

1. Aucun souci : la fonction $t \mapsto \frac{t^3}{t^{\frac{7}{2}} + 1}$ est continue sur le segment $[0, 1]$ donc intégrable sur ce segment ! Ainsi, l'intégrale converge.
2. La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t\sqrt{t}}$ est continue sur $]0, 1]$. Étudions f au voisinage de 0. On a :

$$|f(t)| = \frac{\ln(1+t)}{t\sqrt{t}} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t}{t\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Or, d'après le critère de Riemann en 0, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ converge car $\frac{1}{2} < 1$; donc par comparaison $\int_0^1 |f(t)| dt = \int_0^1 |f(t)| dt$ converge.

3. Comme la fonction $|\sin|$ est bornée par 1 sur $\mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto |\sin(\frac{1}{t})|$ est bornée sur 1 sur $]0, 1]$. Or la fonction constante en 1 est d'intégrale convergente sur $]0, 1]$ d'où $\int_0^1 |\sin(\frac{1}{t})| dt$ converge et donc $\int_0^1 \sin(\frac{1}{t}) dt$ converge. (*On pouvait bien-sûr faire directement appel à la proposition précédente, mais ça ne coûte pas très cher de refaire ce raisonnement à chaque fois !*).
4. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{e^{1-t}-1}$ est positive et continue sur $[0, 1[$. Étudions f pour t au voisinage de 1^- . On a le développement limité à l'ordre 1 de la fonction

exp suivant :

$e^u = 1 + u + o_{u \rightarrow 0}(u^2)$. Ainsi, en prenant $u = 1 - t \xrightarrow[t \rightarrow 1^-]{} 0$, on obtient :

$$e^{1-t} = 1 + (1-t) + o_{t \rightarrow 1}((1-t)^2)$$

Ainsi,

$$f(t) = \frac{1}{e^{1-t} - 1} = \frac{1}{(1-t) + o_{t \rightarrow 1}((1-t)^2)} \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{1}{1-t}$$

Or, d'après le critère de Riemann en 1, $\int_0^1 \frac{1}{1-t} dt$ diverge car $1 \geq 1$; donc par comparaison $\int_0^1 f(t) dt$ diverge.

3. Intégration sur un intervalle ouvert

Dans ce paragraphe a, b peuvent être égaux à $-\infty$ et $+\infty$ respectivement et on s'intéresse aux intégrales sur l'intervalle ouvert $]a, b[$.

Définition 6. *Intégrale convergente sur $]a, b[$*

Soit $f \in C_{pm}(]a, b[, \mathbb{K})$.

S'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ convergent, alors on note $\int_a^b f$ ou encore $\int_a^b f(t) dt$ la quantité :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

Dans ce cas, on dit que l'intégrale $\int_a^b f$ **converge**.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_a^b f$ **diverge**.

Proposition 11.

Soit $f \in C_{pm}(]a, b[, \mathbb{K})$. Si $\int_a^b f$ converge, alors, pour tout $c \in]a, b[$, $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ convergent et on a :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

Notation 1.

Soit $F \in C([a, b], \mathbb{K})$. On note

$$[F(t)]_a^b = \lim_{t \rightarrow b} F(t) - \lim_{t \rightarrow a} F(t)$$

lorsque ces deux limites existent et sont finies.

Proposition 12.

Soit $f \in C(]a, b[, \mathbb{K})$ et F une primitive de f sur $]a, b[$. L'intégrale $\int_a^b f$ converge si, et seulement si, la fonction F admet des limites finies en a et b . Dans ce cas, on a :

$$\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b.$$

Exercice 8.

Étudier la convergence des intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt \quad \int_1^{+\infty} \sin(t) \ln \left(\frac{t^2 + 1}{t^2 - 1} \right) dt \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos(t)\sqrt{e^t - 1}} dt.$$

Correction.

1. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$ est positive et continue sur $]0, 1[$. On étudie donc f au voisinage de 0 puis de 1 :
- en 0 : on a

$$f(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Or $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ converge d'après le critère de Riemann en 0 ($\frac{1}{2} < 1$), donc, par comparaison, $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt$ converge.

- en 1 : on a

$$f(t) \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1-t}}$$

Or $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt$ converge d'après le critère de Riemann en 0 ($\frac{1}{2} < 1$), donc, par comparaison, $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt$ converge.

Comme $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt$ et $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt$ convergent, par définition, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt$ converge.

2. La fonction $f : t \mapsto \sin(t) \ln \left(\frac{t^2 + 1}{t^2 - 1} \right)$ est continue sur $]1, +\infty[$. On étudie donc f au voisinage de 1 puis de $+\infty$:
- en 1 : on remarque que $\ln \left(\frac{t^2 + 1}{t^2 - 1} \right) = \ln(t^2 + 1) - \ln(t + 1) - \ln(t - 1)$ donc :

$$|f(t)| \underset{t \rightarrow 1^+}{\sim} -\sin(1) \ln(t - 1) = \underset{t \rightarrow 1^+}{o} \left(\frac{1}{\sqrt{t - 1}} \right)$$

Or $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}} dt$ converge d'après le critère de Riemann en 1 ($\frac{1}{2} < 1$), donc, par comparaison, $\int_1^2 |f(t)| dt$ converge.

— en $+\infty$: on remarque que $\ln\left(\frac{t^2+1}{t^2-1}\right) = \ln\left(1 + \frac{2}{t^2-1}\right)$ donc, comme $\frac{2}{t^2-1} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$:

$$|f(t)| \leq \ln\left(\frac{t^2+1}{t^2-1}\right) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{t^2}$$

Or $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge d'après le critère de Riemann en $+\infty$ ($2 > 1$), donc, par comparaison, $\int_2^{+\infty} |f(t)| dt$ converge.

Comme $\int_1^2 \frac{1}{t} f(t) dt$ et $\int_2^{+\infty} |f(t)| dt$ convergent, par définition, $\int_0^{+\infty} |f(t)| dt$ converge. Ainsi, f est intégrable sur $]1, +\infty[$ et donc $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge.

3. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\cos(t)\sqrt{e^t-1}}$ est continue et positive sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. On étudie donc f au voisinage de 0 puis de $\frac{\pi}{2}$.

— en 0 : comme $e^t - 1 \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t$, on a :

$$f(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Or $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ converge d'après le critère de Riemann en 0 ($\frac{1}{2} < 1$), donc, par comparaison, $\int_0^1 f(t) dt$ converge.

— en $\frac{\pi}{2}$: on remarque que $\cos(t) = \sin(\frac{\pi}{2} - t) \underset{t \rightarrow \frac{\pi}{2}}{\sim} \frac{\pi}{2} - t$ donc :

$$f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\frac{\pi}{2} - t)\sqrt{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}}$$

Or $\int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\frac{\pi}{2} - t} dt$ diverge d'après le critère de Riemann en $\frac{\pi}{2}$ ($1 \geq 1$), donc, par comparaison, $\int_1^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt$ diverge.

Une des deux intégrales (au moins) $\int_0^1 f(t) dt$ et $\int_1^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt$ diverge, donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt$ diverge.

Remarque : si on avait commencé par faire l'étude en $\frac{\pi}{2}$, on aurait pu conclure directement à la divergence de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt$ sans faire l'étude en 0.

Partie C

Propriétés de l'intégrale généralisée

Dans cette partie, I désigne un intervalle quelconque (ouvert, semi-ouvert ou fermé, de longueur finie ou infinie) de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et on note a et b ses extrémités (possiblement infinies).

1. Propriétés de l'intégrale

Dans ce paragraphe, on résume et généralise les propriétés de l'intégrale généralisée; les démonstrations sont laissées à titre d'exercices au lecteur.

a. Espace de fonctions continues par morceaux intégrables

Proposition 13.

L'ensemble $E = \{f \in C_{pm}(I, \mathbb{K}) \mid f \text{ est intégrable}\}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et l'application $f \mapsto \int_I f$ est une forme linéaire sur E .
De plus, cette application est positive et croissante.

b. Inégalités

Proposition 14. *Inégalité triangulaire*

Soit $f, g \in C_{pm}(I, \mathbb{K})$ des fonctions intégrables. Alors

$$\int_I |f(t) + g(t)| \, dt \leq \int_I |f(t)| \, dt + \int_I |g(t)| \, dt.$$

Proposition 15.

Soit $f \in C_{pm}(I, \mathbb{K})$ une fonction intégrable. Alors

$$\left| \int_I f(t) \, dt \right| \leq \int_I |f(t)| \, dt.$$

c. Séparation

Proposition 16. Séparation

Si f est une fonction continue, positive et intégrable sur I , alors

$$\int_I f(t) dt = 0 \text{ si, et seulement si, } f = 0.$$

d. Relation de Chasles**Proposition 17.**

Soit $f \in C_{pm}(I, \mathbb{K})$ une fonction intégrable. Alors pour tout $a, b, c \in I$ on a :

$$\int_a^c f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt.$$

2. Intégration par parties et changement de variable

Les outils que sont l'intégration par parties et le changement de variables sont des outils performants pour déterminer la valeur d'intégrales qui semblent de prime abord difficiles à calculer. Dans le cadre de l'intégrale généralisée, ces deux techniques gardent la même utilité mais s'avèrent également utiles pour déterminer la nature d'une intégrale, notamment dans le cas où l'intégrale considérée n'est pas absolument convergente, comme on le verra en exercice avec l'exemple classique de l'intégrale de Dirichlet.

a. Intégration par parties**Théorème 5.** Intégration par parties

Soit $f, g \in C^1(I, \mathbb{K})$. Si la fonction produit fg admet des **limites finies** aux bornes a et b de I , alors les intégrales $\int_I f'g'$ et $\int_I f'g$ sont de même nature. De plus, en cas de convergence, on a :

$$\int_a^b f'(t)g(t) dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t) dt.$$

Démonstration.

Quitte à scinder l'intervalle I en deux et utiliser la définition 6, on peut supposer "qu'il n'y a de problème potentiel qu'en b " i.e. $I = [a, b[$.

Soit $x \in I$. Comme f et g sont de classe C^1 sur le segment $[a, x]$, alors d'après le théorème d'intégration par parties sur un segment (vu en Sup' - on rappelle que sa démonstration repose sur la formule de la dérivée du produit de fonctions!), on a :

$$\int_a^x f'(t)g(t) dt = [f(t)g(t)]_a^x - \int_a^x f(t)g'(t) dt. \quad (*)$$

On suppose que le produit fg admet une limite finie en b (d'après notre réduction initiale, c'est déjà le cas en a car f et g sont en particulier continues en a). Alors $[f(t)g(t)]_a^x$ tend vers la

quantité finie $[f(t)g(t)]_a^b$ lorsque x tend vers b . Ainsi, d'après l'égalité (*), $\int_a^x f'(t)g(t) dt$ admet une limite finie quand x tend vers b si, et seulement si, $\int_a^x f(t)g'(t) dt$ admet une limite finie quand x tend vers b d'où par définition, $\int_I fg'$ et $\int_I f'g$ sont de même nature.

De plus, en cas de convergence de $\int_I fg'$ ou $\int_I f'g$, toujours d'après (*), on a :

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(t)g(t) dt &= \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f'(t)g(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow b} \left([f(t)g(t)]_a^x - \int_a^x f(t)g'(t) dt \right) \\ \int_a^b f'(t)g(t) dt &= [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t) dt.\end{aligned}$$

□

Exemple 3.

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$, connue sous le nom d'*intégrale de Dirichlet*, est convergente mais elle n'est pas absolument convergente.

On va montrer dans un premier temps la convergence de cette intégrale en utilisant une intégration par parties. Et dans un second temps, on va montrer qu'elle n'est pas absolument convergente à l'aide d'une comparaison avec les sommes partielles d'une série divergente.

- L'intégrale est convergente. On pose $f : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$. Alors f est continue sur $]0, +\infty[$ et comme $|f(t)| \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} 1$, f est intégrable sur $]0, 1]$ (elle est même prolongeable par continuité en 0 par $f(0) = 1$). Par suite $\int_0^1 f(t) dt$ converge.

On effectue une intégration par parties pour prouver la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$. On pose $u : t \mapsto \frac{1}{t}$ et $v : t \mapsto -\cos(t)$. Alors u, v sont C^1 sur $[1, +\infty[$; le produit uv est défini en 1, vaut $u(1)v(1) = -\cos(1)$ en ce point et $u(t)v(t) = \frac{-\cos(t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.

Ainsi, par intégration par parties, $\int_1^{+\infty} u(t)v'(t) dt = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ et $\int_1^{+\infty} u'(t)v(t) dt = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$ sont de même nature.

Étudions cette seconde intégrale : la fonction $g : t \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et en $+\infty$, on a :

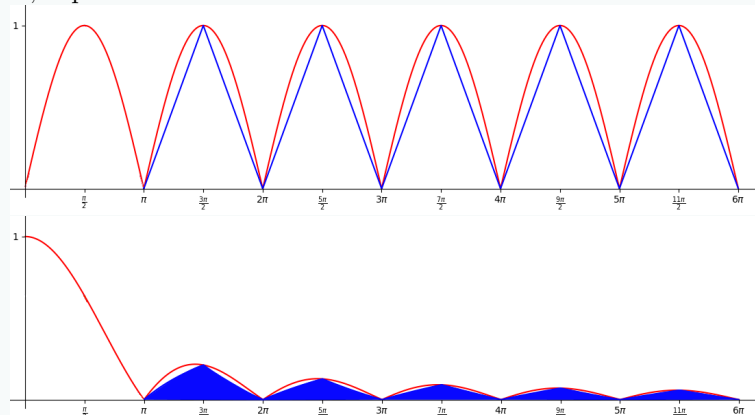
$$|g(t)| = \frac{|\cos(t)|}{t^2} \leq \frac{1}{t^2} \text{ intégrable sur } [1, +\infty[\text{ d'après le critère de Riemann en } +\infty$$

Ainsi, par comparaison, g est intégrable sur $[1, +\infty[$ et donc les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ convergent.

Comme $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge, il en résulte, par la relation de Chasles, que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge.

- L'intégrale n'est pas absolument convergente. Voici une démonstration de la non-intégrabilité de $f : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ sur $[0, +\infty[$. Une preuve plus rapide est proposée en exercice dans le problème 1 (mais basée sur la même technique).

Tout d'abord, exposons l'idée de cette démonstration :



On va minorer la fonction $|\sin|$ sur $[\pi, +\infty[$ par la fonction g "triangulaire" π -périodique dont le graphe est représenté en bleu dans le premier graphique. Ainsi, l'intégrale. Ainsi, $\int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\sin(x)|}{x} dx \geq \int_{\pi}^{n\pi} \frac{g(x)}{x} dx$ et cette dernière intégrale représentée par l'aire bleu sur le deuxième graphique se minore aisément par la somme partielle d'une série divergente. On pourra ainsi conclure la divergence de l'intégrale $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x} dx$.

Voyons cela rigoureusement :

La fonction $|\sin|$ est π -périodique sur $\mathbb{R}$ et sur $[0, \pi]$ elle est égale à la fonction $\sin$. Comme, pour tout $x \in [0, \pi]$, $\sin''(x) = -\sin(x) \leq 0$, $\sin$ est concave sur $[0, \pi]$. Ainsi, sa courbe est au dessus de la corde entre les abscisses 0 et $\frac{\pi}{2}$ et de la corde entre les abscisses $\frac{\pi}{2}$ et π .

Ces dernières ont pour équations respectives $y = \frac{2}{\pi}x$ et $y = -\frac{2}{\pi}(x - \pi)$.

On considère alors une fonction g définie sur $[0, \pi]$, ayant pour image l'union de ces deux cordes, par exemple :

$$g : x \mapsto \begin{cases} \frac{2}{\pi}x & \text{si } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ -\frac{2}{\pi}(x - \pi) & \text{si } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

Alors g est continue sur $[0, \pi]$, et pour tout $x \in [0, \pi]$, $g(x) \leq \sin(x)$.

On pose, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $x_k = (2k + 1)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Par π -périodicité de $|\sin|$, on a, pour tout $x \in [x_k - \frac{\pi}{2}, x_k + \frac{\pi}{2}] (= [0, \pi] + k\pi)$:

$$|\sin(x)| \geq g(x - k\pi).$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, en utilisant un changement de variable $t = x - k\pi$, on a :

$$\int_{x_k - \frac{\pi}{2}}^{x_k + \frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(x)|}{x} dx \geq \int_{x_k - \frac{\pi}{2}}^{x_k + \frac{\pi}{2}} \frac{g(x - k\pi)}{x} dx = \int_0^{\pi} \frac{g(t)}{t + k\pi} dt \geq \frac{1}{(k + 1)\pi} \int_0^{\pi} g(t) dt$$

Par suite, par symétrie du graphe de g par rapport à la droite $t = \frac{\pi}{2}$, on a :

$$\int_{x_k - \frac{\pi}{2}}^{x_k + \frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(x)|}{x} dx \geq \frac{2}{(k + 1)\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} t dt = \frac{4}{(k + 1)\pi^2} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2(k + 1)}.$$

Alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$, comme $x_1 - \frac{\pi}{2} = \pi$ et $x_n + \frac{\pi}{2} = (n+1)\pi$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $x_k + \frac{\pi}{2} = (k+1)\pi = x_{k+1} - \frac{\pi}{2}$, on a :

$$\int_{\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x} dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_k - \frac{\pi}{2}}^{x_k + \frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(x)|}{x} dx \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2(k+1)}$$

Pour $x \geq \pi$, on pose $n(=n_x) = E(\frac{x}{\pi} - 1)$; alors $x \geq (n+1)\pi$ et $n \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et donc, $\frac{1}{2(k+1)}$ étant le terme général d'une série à termes positifs divergente :

$$\int_{\pi}^x \frac{|\sin(x)|}{x} dx \geq \int_{\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x} dx \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2(k+1)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

Il en résulte que $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x} dx$ diverge et donc $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x} dx$ également. Ainsi, f n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$ mais son intégrale sur $[0, +\infty[$ converge.

Remarque 3.

L'exemple précédent montre que la réciproque du théorème 3 est fausse !

Une intégrale qui converge et qui ne converge pas absolument est communément appelée *intégrale semi-convergente*.

Exercice 9.

- Justifier la convergence de l'intégrale de $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} dt$.
- Justifier la convergence puis calculer $\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt$.
- On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$.
 - Justifier l'existence de I_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une relation entre I_{n+1} et I_n . En déduire I_n .

Correction.

- On pose $f : t \mapsto \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}$. Alors f est continue sur $[1, +\infty[$.

On effectue une intégration par parties pour prouver la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} dt$. On pose $u : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ et $v : t \mapsto \sin(t)$. Alors u, v sont C^1 sur $[1, +\infty[$; le produit uv est défini en 1, vaut $u(1)v(1) = \sin(1)$ en ce point et $u(t)v(t) = \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.

Ainsi, par intégration par parties, $\int_1^{+\infty} u(t)v'(t) dt = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} dt$ et $\int_1^{+\infty} u'(t)v(t) dt =$

$\int_1^{+\infty} -\frac{\sin(t)}{2t^{\frac{3}{2}}} dt$ sont de même nature.

Étudions cette seconde intégrale : la fonction $g : t \mapsto -\frac{\sin(t)}{2t^{\frac{3}{2}}}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et en $+\infty$, on a :

$$|g(t)| = \frac{|\sin(t)|}{2t^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}} \text{ intégrable sur } [1, +\infty[\text{ d'après le critère de Riemann en } +\infty$$

Ainsi, par comparaison, g est intégrable sur $[1, +\infty[$ et donc les intégrales $\int_1^{+\infty} -\frac{\sin(t)}{2t^{\frac{3}{2}}} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} dt$ convergent.

2. Ici, on peut étudier directement la nature de cette intégrale avec les techniques vues précédemment. On pose $f : t \mapsto \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}$. Alors f est continue sur $]0, 1[$. On étudie donc f au voisinage de 0 et de 1 :

- en 0 : on a $\ln(1-t^2) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^2$ donc $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1$. Ainsi f est prolongeable par continuité en 0 (par 1) et donc intégrable au voisinage de 0. Ainsi, $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(t) dt$ converge.
- en 1 : on remarque que $\ln(1-t^2) = \ln(1-t) + \ln(1+t)$ donc :

$$|f(t)| \underset{t \rightarrow 1}{\sim} -\ln(1-t) = \underset{t \rightarrow 0}{o} \left(\frac{1}{\sqrt{1-t}} \right)$$

Or, d'après le critère de Riemann en 1, $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ converge, donc par comparaison, f est intégrable au voisinage de 1. Ainsi, $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(t) dt$ converge.

Par suite, $\int_0^1 f(t) dt$ converge.

Passons au calcul de $\int_0^1 f(t) dt$: utilisons une intégration par partie. On va se rendre compte qu'il faut parfois être subtil dans nos primitives :

- *Premier essai, sans subtilité* : on considère les deux fonctions u, v de classe C^1 sur $]0, 1[$ telles que, pour $t \in]0, 1[$:

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{1}{t^2} & u(t) &= -\frac{1}{t} \\ v(t) &= \ln(1-t^2) & v'(t) &= -\frac{2t}{1-t^2}. \end{aligned}$$

Pour appliquer le théorème d'intégration par parties, il faut vérifier que uv admet des limites en 0 et 1. Or ici, on a $\lim_{t \rightarrow 1} u(t)v(t) = +\infty$ "à cause" du $\ln(1-t^2)$... oups! On ne peut donc pas faire notre IPP!

Mais on se rend compte qu'on peut faire en sorte de compenser le fait que $\ln(1-t^2)$ tende vers $-\infty$ en choisissant plus intelligemment notre primitive de $\frac{1}{t^2}$: en effet, ici, $-\frac{1}{t}$ tend vers -1 alors qu'on voudrait "au minimum" que la primitive choisie tende vers 0 pour potentiellement compenser le ∞ ! Ce qui nous amène au :

- *Deuxième essai, avec subtilité* : on considère les deux fonctions u, v de classe C^1 sur $]0, 1[$ telles que, pour $t \in]0, 1[$:

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{1}{t^2} & u(t) &= 1 - \frac{1}{t} = -\frac{1-t}{t} \\ v(t) &= \ln(1-t^2) & v'(t) &= -\frac{2t}{1-t^2}. \end{aligned}$$

Cette fois-ci, on a bien une limite finie en 1 :

$$u(t)v(t) = -\frac{(1-t)\ln(1-t^2)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 1} 0$$

et en 0 :

$$u(t)v(t) = -\frac{(1-t)\ln(1-t^2)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0.$$

Ainsi, uv admet des limites finies en 0 et 1, donc d'après le théorème d'intégration par parties, $\int_0^1 u'v$ et $\int_0^1 uv'$ sont de même nature. Or on a prouvé que $\int_0^1 u'v$ converge, donc $\int_0^1 uv'$ converge et toujours d'après le théorème d'intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t) dt &= \int_0^1 u'(t)v(t) dt \\ &= [u(t)v(t)]_0^1 - \int_0^1 u(t)v'(t) dt \\ &= -\int_0^1 \frac{1-t}{t} \times \frac{2t}{1-t^2} dt \\ &= -2 \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt \\ \int_0^1 f(t) dt &= -2 \ln(2). \end{aligned}$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$.

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est continue, positive sur $[0, +\infty[$. On étudie alors f_n au voisinage de $+\infty$:
en $+\infty$. On a :

$$f_n(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2n}}.$$

Donc, par comparaison à l'intégrale de Riemann convergente $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2n}} dt$ (car, comme

$n \in \mathbb{N}^*$, $2n \geq 2 > 1$), $\int_1^{+\infty} f_n(t) dt$ converge.

De plus, f_n est continue sur le segment $[0, 1]$, donc, d'après la relation de Chasles, I_n converge.

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt$ converge en utilisant des arguments similaires à la question précédente et le fait que $\frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2n}}$; donc, par combinaison linéaire d'intégrales convergentes, on a :

$$I_{n+1} = \int_0^{+\infty} \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt = I_n - \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt.$$

On considère les deux fonctions u, v de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ telles que, pour $t \in [0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{t}{(1+t^2)^{n+1}} & u(t) &= -\frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{(1+t^2)^n} \\ v(t) &= t & v'(t) &= 1. \end{aligned}$$

Le produit uv est défini en 0, vaut $u(0)v(0) = 0$ en ce point et $u(t)v(t) = -\frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{(1+t^2)^n} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.

Ainsi, par intégration par parties, $\int_1^{+\infty} u(t)v'(t) dt = \int_0^{+\infty} -\frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$ et $\int_1^{+\infty} u'(t)v(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt$ sont de même nature, et donc convergentes puisque la seconde l'est, et on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt = 0 - \int_0^{+\infty} -\frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{(1+t^2)^n} dt = \frac{1}{2n} I_n.$$

Par suite, on a :

$$I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2n} I_n = \frac{2n-1}{2n} I_n.$$

De plus, on a $I_1 = [\arctan(t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$, donc, de proche en proche, on obtient :

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} \\ &= \frac{2n-3}{2n-2} \frac{2n-5}{2n-4} I_{n-2} \\ &\vdots \\ &= \frac{2n-3}{2n-2} \frac{2n-5}{2n-4} \dots \frac{1}{2} I_1 \\ I_n &= \frac{(2n-3)(2n-5) \times \dots \times 1}{(2n-2)(2n-4) \times \dots \times 2} \cdot \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} \frac{(2n-3)(2n-5) \times \dots \times 1}{(2n-2)(2n-4) \times \dots \times 2} &= \frac{(2n-2)(2n-3)(2n-4)(2n-5) \times \dots \times 2 \times 1}{((2n-2)(2n-4) \times \dots \times 2)^2} \\ &= \frac{(2n-2)!}{(2^{n-1}(n-1)!)^2} \\ &= \frac{1}{2^{2n-2}} \binom{2n-2}{n-1}, \end{aligned}$$

d'où, au final :

$$I_n = \frac{1}{2^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1} \pi.$$

Exercice 10.

Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt$ est convergente puis qu'elle n'est pas absolument convergente.

Correction.

La fonction $t \mapsto \cos(t^2)$ est continue sur $[0, +\infty[$. Ainsi, elle est continue sur le segment $[0, 1]$ donc l'intégrale $\int_0^1 \cos(t^2) dt$ converge. Considérons l'intégrale sur $[1, +\infty[$.

On effectue une intégration par parties pour prouver la convergence de $\int_1^{+\infty} \underbrace{\cos(t^2)}_{= \frac{1}{2t}(2t \cos(t^2))} dt$. On pose :

$$\begin{aligned} u'(t) &= 2t \cos(t^2) & u(t) &= \sin(t^2) \\ v(t) &= \frac{1}{2t} & v'(t) &= -\frac{1}{2t^2}. \end{aligned}$$

Alors u, v sont C^1 sur $[1, +\infty[$; le produit uv est défini en 1, vaut $u(1)v(1) = \frac{1}{2} \sin(1)$ en ce point et $u(t)v(t) = \frac{\sin(t^2)}{2t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$.

Ainsi, par intégration par parties, $\int_1^{+\infty} u'(t)v(t) dt = \int_1^{+\infty} \cos(t^2) dt$ et $\int_1^{+\infty} u(t)v'(t) dt = \int_1^{+\infty} -\frac{\sin(t^2)}{2t^2} dt$ sont de même nature.

Étudions cette seconde intégrale : la fonction $g : t \mapsto -\frac{\sin(t^2)}{2t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et en $+\infty$, on a :

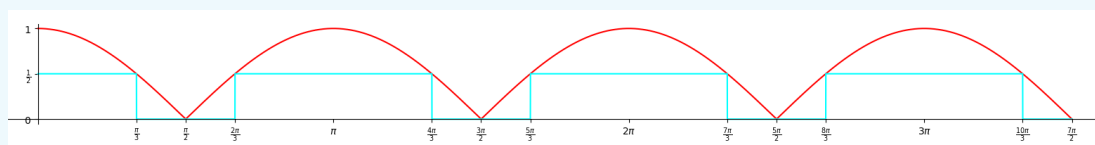
$$|g(t)| = \frac{|\sin(t^2)|}{2t^2} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^2} \text{ intégrable sur } [1, +\infty[\text{ d'après le critère de Riemann en } +\infty$$

Ainsi, par comparaison, g est intégrable sur $[1, +\infty[$ et donc les intégrales $\int_1^{+\infty} -\frac{\sin(t^2)}{2t^2} dt$ et $\int_1^{+\infty} \cos(t^2) dt$ sont convergentes.

Il en résulte, par la relation de Chasles, que $\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt$ converge.

Montrons que $\int_0^{+\infty} |\cos(t^2)| dt$ diverge.

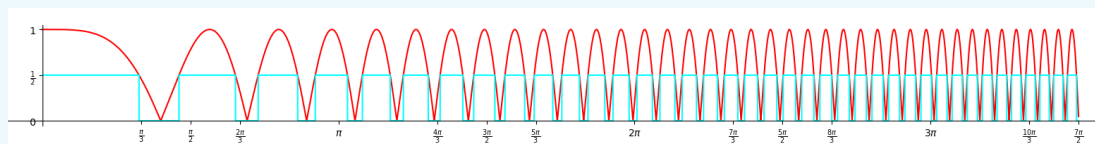
Pour $k \in \mathbb{Z}$, on a, pour tout $x \in [-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi]$, $|\cos(x)| \geq \frac{1}{2}$.



Alors, en considérant la fonction $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$, définie, pour $t \in \mathbb{R}_+$:

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } t \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [\sqrt{-\frac{\pi}{3} + k\pi}, \sqrt{\frac{\pi}{3} + k\pi}] \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

on a, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $|\cos(t^2)| \geq g(t)$.



Montrons que la fonction g est d'intégrale divergente sur $[0, +\infty[$ ce qui nous permettra de conclure par comparaison.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_k = \int_{\sqrt{-\frac{\pi}{3}+k\pi}}^{\sqrt{\frac{\pi}{3}+k\pi}} g(t) dt$, on a alors :

$$u_k = \int_{\sqrt{-\frac{\pi}{3}+k\pi}}^{\sqrt{\frac{\pi}{3}+k\pi}} \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\pi}{3} + k\pi} - \sqrt{-\frac{\pi}{3} + k\pi} \right).$$

De plus, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la relation de Chasles :

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{3}+n\pi}} g(t) dt = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} g(t) dt + \sum_{k=1}^n \int_{\sqrt{-\frac{\pi}{3}+k\pi}}^{\sqrt{\frac{\pi}{3}+k\pi}} g(t) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{3}} + \sum_{k=1}^n u_k.$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} u_k &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\pi}{3} + k\pi} - \sqrt{-\frac{\pi}{3} + k\pi} \right) \\ &= \frac{\sqrt{k\pi}}{2} \left(\left(1 + \frac{1}{3k} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{1}{3k} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{k\pi}}{2} \left(\left(1 + \frac{2}{3k} + o_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{k} \right) \right) - \left(1 - \frac{2}{3k} + o_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{k} \right) \right) \right) \\ &= \frac{\sqrt{k\pi}}{2} \left(\frac{4}{3k} + o_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{k} \right) \right) \\ u_k &\underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{k}}. \end{aligned}$$

Par suite, d'après le critère de Riemann $\frac{1}{2} \leq 1$, la série $\sum_{k \geq 1} u_k$ diverge et, comme elle est à termes positifs, elle tend vers $+\infty$, et donc :

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{3}+n\pi}} g(t) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{3}} + \sum_{k=1}^n u_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t) dt$ diverge. En effet, on a, pour $x \in \mathbb{R}_+$ avec $x \geq \sqrt{\frac{\pi}{3}}$ et $n = \lfloor \frac{x^2 - \frac{\pi}{3}}{\pi} \rfloor$, comme $x \rightarrow +\infty$ implique $n \rightarrow +\infty$:

$$\int_0^x g(t) dt \geq \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{3}+n\pi}} g(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Par comparaison de fonctions positives, il en résulte que l'intégrale $\int_0^{+\infty} |\cos(t^2)| dt$ diverge.

b. Changement de variable

Dans ce paragraphe, on considère $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$.

Théorème 6. *Changement de variable*

Soit $f \in C([a, b], \mathbb{K})$ et $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$ une fonction de classe C^1 , bijective et strictement monotone. Les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(u) \cdot \varphi'(u) du$ sont de même nature. En cas de convergence, on a :

- si φ est croissante : $\int_a^b f(t) dt = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(u) \cdot \varphi'(u) du$;
- si φ est décroissante : $\int_a^b f(t) dt = \int_\beta^\alpha (f \circ \varphi)(u) \cdot \varphi'(u) du$.

Démonstration.

On rappelle que la démonstration du théorème de changement de variable pour l'intégrale sur un segment repose sur la formule de dérivation d'une composée de fonctions et le théorème fondamental de l'analyse et que l'hypothèse φ de classe C^1 seule suffit.

Pour l'énoncé dans le cadre d'une intégrale généralisée que nous devons prouver, nous aurons toutefois besoin des hypothèses supplémentaires de bijectivité et de stricte monotonie de la fonction φ . Allons-y :

On se place ici dans le cas où l'intégrale n'a de "problème" qu'en b . On traite le cas général en coupant l'intégrale en deux et en utilisant ensuite la relation de Chasles.

De plus, on traite dans la suite le cas φ strictement croissante, celui où φ est strictement décroissante se prouve en appliquant le cas "strictement croissant" à $-\varphi$.

Soit $f \in C([a, b], \mathbb{K})$ et $\varphi : [\alpha, \beta[\rightarrow [a, b[$ une fonction de classe C^1 , bijective et strictement croissante.

Soit $x \in [a, b[$. La fonction φ étant de classe C^1 sur le segment $[a, x]$, on effectue le changement de variable **sur un segment** $t = \varphi(u)$ sur l'intégrale $\int_a^x f(t) dt$, pour obtenir :

$$\int_a^x f(t) dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(x)} f(\varphi(u)) \varphi'(u) du.$$

Les nombres $\varphi^{-1}(a)$ et $\varphi^{-1}(x)$ étant bien définis car φ est bijective de $[\alpha, \beta[$ dans $[a, b[$. On pose $x' = \varphi^{-1}(x) \in [\alpha, \beta[$.

Comme φ est strictement croissante et bijective de $[\alpha, \beta[$ dans $[a, b[$, φ^{-1} est l'est aussi de $[a, b[$ dans $[\alpha, \beta[$; on a $\varphi^{-1}(a) = \alpha$ et :

$$\lim_{x \rightarrow b} x' = \lim_{x \rightarrow b} \varphi^{-1}(x) = \beta \quad \text{et} \quad \lim_{x' \rightarrow \beta} x = \lim_{x' \rightarrow \beta} \varphi(x') = b.$$

Par suite, par définition, les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$ sont de même nature, et,

si l'une de des deux converge, on a :

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(t) \, dt &= \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) \, dt \\
 &= \lim_{x \rightarrow b} \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(x)} f(\varphi(u)) \varphi'(u) \, du \\
 &= \lim_{x' \rightarrow \beta} \int_{\alpha}^{x'} f(\varphi(u)) \varphi'(u) \, du \\
 \int_a^b f(t) \, dt &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u)) \varphi'(u) \, du.
 \end{aligned}$$

□

Exemple 4.

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(e^t) \, dt$ converge.

On effectue le changement de variable C^1 bijectif et strictement croissant $u = e^t$ (ici, la fonction est $\varphi : u \mapsto \ln(u)$). On a :

- $u = 1$ quand $t = 0$ et $u \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$;
- $dt = \frac{1}{u} du$.

Ainsi, par changement de variable, les intégrales $\int_0^{+\infty} \sin(e^t) \, dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} \, du$ sont de même natures.

Or, d'après l'exemple 3, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} \, du$ converge, donc $\int_0^{+\infty} \sin(e^t) \, dt$ converge.

Remarque : on pouvait également montrer la convergence de cette intégrale grâce à une intégration par parties bien sentie ! (Exercice : le faire !)

Exercice 11.

1. Montrer, en utilisant un changement de variable, que $\int_1^2 \frac{1}{\ln(t)} \, dt$ diverge.
2. Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} \, dt$ puis la calculer grâce au changement de variable $u = \frac{1}{t}$.

Correction.

1. On effectue le changement de variable licite $u = \ln(t) \Leftrightarrow t = e^u$, car ici, on a $\varphi : u \mapsto t = \varphi(u) = e^u$ qui est bien de classe C^1 , bijective et strictement croissante de $]0, \ln(2)]$ dans $]1, 2]$. On a :

- $u \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 1$ et $u = \ln(2)$ quand $t = 2$;
- $dt = e^u du$.

Et donc, les intégrales $\int_1^2 \frac{1}{\ln(t)} dt$ et $\int_0^{\ln(2)} \frac{e^u}{u} du$ sont de même nature par théorème de changement de variable.

Or, on a $\frac{e^u}{u} \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{u}$ et l'intégrale $\int_0^{\ln(2)} \frac{1}{u} du$ diverge d'après le critère de Riemann en 0 ;

donc, par comparaison, $\int_0^{\ln(2)} \frac{e^u}{u} du$ diverge.

Il en résulte que $\int_1^2 \frac{1}{\ln(t)} dt$ diverge.

Remarque : on pouvait bien-sûr déterminer la nature de cette intégrale en remarquant simplement que, comme, pour tout réel $t > 0$, $\ln(t) \leq t - 1$, on a, pour tout $t \in]1, 2]$, $\frac{1}{\ln(t)} \geq \frac{1}{t-1}$; d'où la divergence de l'intégrale par comparaison à une intégrale de Riemann en 1 divergente.

2. Commençons par justifier la convergence de l'intégrale :

On pose $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^2}$. Alors f est continue sur $]0, +\infty[$.

— en 0 : on considère $\int_0^1 f(t) dt$. On a :

$$|f(t)| = \frac{-\ln(t)}{1+t^2} = \underset{t \rightarrow 0^+}{o} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right).$$

Or, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ converge d'après le critère de Riemann en 0 ($\frac{1}{2} < 1$) donc, par comparaison, $\int_0^1 |f(t)| dt$ converge, d'où $\int_0^1 f(t) dt$ converge.

— en $+\infty$: on considère $\int_1^{+\infty} f(t) dt$. La fonction est positive sur $[1, +\infty[$ et on a, par croissances comparées :

$$t^{\frac{3}{2}} f(t) = \frac{t^{\frac{3}{2}} \ln(t)}{1+t^2} = \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

d'où :

$$f(t) = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \right).$$

Or, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} dt$ converge d'après le critère de Riemann en $+\infty$ ($\frac{3}{2} > 1$) donc, par comparaison, $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge.

Conclusion : d'après la relation de Chasles, $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$ converge.

Passons au calcul de cet intégrale :

On effectue le changement de variable licite $u = \frac{1}{t} \Leftrightarrow t = \frac{1}{u}$, car ici, on a $\varphi : u \mapsto t = \varphi(u) = \frac{1}{u}$ qui est bien de classe C^1 , bijective et strictement décroissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même. On a :

- $u \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow 0^+$ et $u \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$;
- $dt = -\frac{1}{u^2} du$.

Et donc, les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$ et $\int_{+\infty}^0 \frac{\ln(\frac{1}{u})}{1+(\frac{1}{u})^2} \times \left(-\frac{1}{u^2}\right) du$ sont de même nature par théorème de changement de variable, et donc convergent du fait que la première est convergente, et on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt &= \int_{+\infty}^0 \frac{\ln(\frac{1}{u})}{1+(\frac{1}{u})^2} \times \left(-\frac{1}{u^2}\right) du \\ &= - \int_{+\infty}^0 \frac{\ln(1) - \ln(u)}{u^2 + 1} du \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{-\ln(u)}{1+u^2} du \\ \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt &= - \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt \end{aligned}$$

Par suite, $2 \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt = 0$ d'où :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt = 0.$$

3. Intégration des relations de comparaison

Proposition 18. *Intégration des relations de domination/négligeabilité*

Soit $f \in C([a, b[, \mathbb{R})$ et $g \in C([a, b[, \mathbb{R})$ une fonction **positive**. On suppose $f(t) = O_{t \rightarrow b}(g(t))$.

- Si $\int_a^b g$ converge, alors f est intégrable sur $[a, b[$ et on a :

$$\int_x^b f(t) dt = O_{x \rightarrow b} \left(\int_x^b g(t) dt \right)$$

- Si $\int_a^b g$ diverge, alors on a :

$$\int_a^x f(t) dt = O_{x \rightarrow b} \left(\int_a^x g(t) dt \right)$$

Ce résultat est toujours vrai lorsqu'on remplace les O par des o .

Démonstration.

On suppose $f(t) = O_{t \rightarrow b}(g(t))$. Alors il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ et $A \in [a, b[$ tel que, pour tout $t \in [A, b[$, $|f(t)| \leq M g(t)$.

- On suppose que $\int_a^b g$ converge. Alors, comme $f(t) = O_{t \rightarrow b}(g(t))$, on a $|f(t)| = O_{t \rightarrow b}(g(t))$ donc, par comparaison (Théorème 2), f est intégrable sur $[a, b[$.

De plus, pour tout $x \geq A$, on a :

$$\left| \int_x^b f(t) dt \right| \leq \int_x^b \underbrace{|f(t)|}_{\leq M g(t)} dt \leq M \int_x^b g(t) dt,$$

d'où :

$$\int_x^b f(t) dt = O_{x \rightarrow b} \left(\int_x^b g(t) dt \right).$$

- On pose $G : x \mapsto \int_a^x g(t) dt$ la primitive de g qui s'annule en a .
On suppose que $\int_a^b g$ diverge. Alors, comme g est positive, d'après la proposition 8 (qui reste vraie en remplaçant la borne $+\infty$ par $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$), on a $G(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} +\infty$.

On a, en posant $C = \int_a^A (|f(t)| - M g(t)) dt$:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^x f(t) dt \right| &\leq \int_a^x |f(t)| dt \\ &\leq \int_a^A |f(t)| dt + \int_A^x \underbrace{|f(t)|}_{M g(t)} dt \\ &\leq \int_a^A |f(t)| dt + \underbrace{\int_A^x M g(t) dt}_{= \int_a^x M g(t) dt - \int_a^A M g(t) dt} \\ &\leq \int_a^A (|f(t)| - M g(t)) dt + M \int_a^x g(t) dt \\ \left| \int_a^x f(t) dt \right| &\leq M G(x) + C. \end{aligned}$$

Or, $G(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} +\infty$, donc il existe $B \in [A, b[$ tel que, pour tout $x \geq B$, $C \leq M G(x)$. Ainsi, pour tout $x \geq B$:

$$\left| \int_a^x f(t) dt \right| \leq 2 M G(x) = 2 M \int_a^x g(t) dt.$$

Il en résulte que :

$$\int_a^x f(t) dt = O_{x \rightarrow b} \left(\int_a^x g(t) dt \right).$$

On raisonne de manière analogue dans le cas petit o . □

Exercice 12.

1. Montrer qu'en $+\infty$, $\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt = o\left(\int_1^x e^{t^2} dt\right)$.
2. En déduire un équivalent simple de $\int_1^x e^{t^2} dt$ en $+\infty$ (on pourra penser à utiliser une IPP).

Correction.

1. On pose $f : t \mapsto \frac{e^{t^2}}{t^2}$ et $g : t \mapsto e^{t^2}$. Les fonctions f et g sont continues, positives sur $[1, +\infty[$.
En $+\infty$, on a, pour tout $t \geq 1$, $g(t) \geq 1$ et $\int_1^{+\infty} 1 dt$ diverge, donc, par comparaison, $\int_1^{+\infty} g(t) dt$ diverge.
De plus, on a $f = \underset{t \rightarrow +\infty}{o}(g)$ car $\frac{1}{t^2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.

Ainsi, par intégration de la relation de négligeabilité (Proposition 18), on a :

$$\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt = \int_1^x f(t) dt = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}\left(\int_1^x g(t) dt\right) = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}\left(\int_1^x e^{t^2} dt\right).$$

2. Soit $x \in [1, +\infty[$. On applique une intégration par parties (licite car sur le **segment** $[1, x]$) à l'intégrale $\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt$ en considérant les deux fonctions u, v de classe C^1 sur $[1, x]$ telles que, pour $t \in [1, x]$:

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{1}{t^2} & u(t) &= -\frac{1}{t} \\ v(t) &= e^{t^2} & v'(t) &= 2te^{t^2}. \end{aligned}$$

Alors on a, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt &= \left[-\frac{e^{t^2}}{t} \right]_1^x - \int_1^x 2te^{t^2} \times \left(-\frac{1}{t} \right) dt \\ &= -\frac{e^{x^2}}{x} + e + 2 \int_1^x e^{t^2} dt. \end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{e^{x^2}}{x} = 2 \int_1^x e^{t^2} dt + e - \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt$$

De plus, d'après la question 1, $\int_1^x e^{t^2} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ car $t \mapsto e^{t^2}$ est positive et $\int_1^{+\infty} e^{t^2} dt$ diverge. Donc $e = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}\left(\int_1^x e^{t^2} dt\right)$.

De nouveau d'après la question 1, on a $\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}\left(\int_1^x e^{t^2} dt\right)$.

Ainsi, on obtient :

$$\frac{e^{x^2}}{x} = 2 \int_1^x e^{t^2} dt + \underset{x \rightarrow +\infty}{o}\left(\int_1^x e^{t^2} dt\right),$$

d'où :

$$\frac{e^{x^2}}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2 \int_1^x e^{t^2} dt,$$

et donc finalement :

$$\int_1^x e^{t^2} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{x^2}}{2x}.$$

Proposition 19. Intégration de la relation d'équivalence

Soit $f \in C([a, b[, \mathbb{R})$ et $g \in C([a, b[, \mathbb{R})$ une fonction **positive**. On suppose $f(x) \underset{x \rightarrow b}{\sim} g(x)$.

- Si $\int_a^b g$ converge, alors f est intégrable sur $[a, b[$ et on a :

$$\int_x^b f(t) dt \underset{x \rightarrow b}{\sim} \int_x^b g(t) dt.$$

- Si $\int_a^b g$ diverge, alors f n'est pas intégrable sur $[a, b[$ et on a :

$$\int_a^x f(t) dt \underset{x \rightarrow b}{\sim} \int_a^x g(t) dt.$$

Démonstration.

Le raisonnement est analogue à celui utilisé pour démontrer la proposition 18, mais reproduisons le tout de même ici :

On suppose $f(t) \underset{t \rightarrow b}{\sim} g(t)$.

- On suppose que $\int_a^b g$ converge. Alors, comme $f(t) \underset{t \rightarrow b}{\sim} g(t)$, g étant positive, f est positive au voisinage de b et donc, par comparaison (Théorème 2), f est intégrable sur $[a, b[$. Soit ε un réel strictement positif. Comme $f(t) \underset{t \rightarrow b}{\sim} g(t)$, il existe $A \in [a, b[$ tel que, pour tout $t \in [A, b[$, $|f(t) - g(t)| \leq \varepsilon g(t)$. Alors, pour tout $x \geq A$, on a :

$$\begin{aligned} \left| \int_x^b f(t) dt - \int_x^b g(t) dt \right| &= \left| \int_x^b (f(t) - g(t)) dt \right| \\ &\leq \int_x^b \underbrace{|f(t) - g(t)|}_{\leq \varepsilon g(t)} dt \\ &\leq \varepsilon \int_x^b g(t) dt \end{aligned}$$

d'où :

$$\int_x^b f(t) dt = \underset{x \rightarrow b}{\sim} \left(\int_x^b g(t) dt \right).$$

- On suppose que $\int_a^b g$ diverge. Alors, comme $f(t) \underset{t \rightarrow b}{\sim} g(t)$, g étant positive, f est positive au voisinage de b et donc, par comparaison (Théorème 2), f n'est pas intégrable sur $[a, b[$.

On pose $G : x \mapsto \int_a^x g(t) dt$ la primitive de g qui s'annule en a . Comme dans la démonstration du deuxième point de la proposition 18, on a $G(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} +\infty$.

Soit ε un réel strictement positif. Comme $f(t) \underset{t \rightarrow b}{\sim} g(t)$, il existe $A \in [a, b[$ tel que, pour tout $t \in [A, b[$, $|f(t) - g(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} g(t)$. On a, en posant $C = \int_a^A (|f(t) - g(t)| - \frac{\varepsilon}{2} g(t)) dt$:

$$\begin{aligned}
 \left| \int_x^b f(t) dt - \int_x^b g(t) dt \right| &\leq \int_x^b |f(t) - g(t)| dt \\
 &\leq \int_a^A |f(t) - g(t)| dt + \int_A^x \underbrace{|f(t) - g(t)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2} g(t)} dt \\
 &\leq \int_a^A |f(t) - g(t)| dt + \underbrace{\int_A^x \frac{\varepsilon}{2} g(t) dt}_{= \int_a^x \frac{\varepsilon}{2} g(t) dt - \int_a^A \frac{\varepsilon}{2} g(t) dt} \\
 &\leq \int_a^A (|f(t) - g(t)| - \varepsilon g(t)) dt + \frac{\varepsilon}{2} \int_a^x g(t) dt \\
 \left| \int_a^x f(t) dt - \int_a^x g(t) dt \right| &\leq \frac{\varepsilon}{2} G(x) + C.
 \end{aligned}$$

Or, $G(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} +\infty$, donc il existe $B \in [A, b[$ tel que, pour tout $x \geq B$, $C \leq \frac{\varepsilon}{2} G(x)$. Ainsi, pour tout $x \geq B$:

$$\left| \int_a^x f(t) dt - \int_a^x g(t) dt \right| \leq \varepsilon G(x) = \varepsilon \int_a^x g(t) dt.$$

Il en résulte que :

$$\int_a^x f(t) dt \underset{x \rightarrow b}{\sim} \int_a^x g(t) dt.$$

□

Exercice 13.

Dans cet exercice, on cherche à déterminer un équivalent simple en 1^- de $\varphi : x \mapsto \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$.

1. Montrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\varphi(x) = \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

2. En déduire un équivalent simple de φ en 1^- .

Correction.

1. Soit $x \in]-1, 1[$. La fonction $\arcsin$ est une primitive de la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ sur $[x, 1[$ et $\lim_{t \rightarrow 1^-} \arcsin(t) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$, donc l'intégrale $\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$ converge et on a :

$$\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = [\arcsin(t)]_x^1 = \arcsin(1) - \arcsin(x) = \varphi(x).$$

2. On a :

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+t} \cdot \sqrt{1-t}} \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1-t}}.$$

Or, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$ étant une intégrale convergente d'une fonction positive, par intégration de la relation d'équivalence (cas de convergence), on a :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &\underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1-t}} dt = \left[\sqrt{2} \cdot \sqrt{1-t} \right]_x^1 \\ \varphi(x) &\underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} \sqrt{2} \cdot \sqrt{1-x} \end{aligned}$$

E&P

Exercices et problèmes

Exercice 14.

Pour $t \in]0, +\infty[$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$, on pose :

$$f(\alpha, t) = \begin{cases} \frac{1}{t^{\frac{1}{\alpha}}} & \text{si } t \in]0, 1[\\ \frac{1}{t^\alpha} & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

Et, pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$, on note :

$$F(\alpha) = \int_0^{+\infty} f(\alpha, t) dt.$$

1. Déterminer le domaine D de définition de la fonction F .
2. Calculer, pour tout $\alpha \in D$, $F(\alpha)$.

Correction.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. La fonction $t \mapsto f(\alpha, t)$ est positive et continue sur $]0, +\infty[$ car, pour $\beta \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{1}{t^\beta}$ est positive et continue sur $]0, 1[$ et $[1, +\infty[$; et en 1, on a :

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} f(\alpha, t) = \frac{1}{1^{\frac{1}{\alpha}}} = 1 = \frac{1}{1^\alpha} = f(\alpha, 1).$$

Étudions la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(\alpha, t) dt$.

— en 0 : on considère $\int_0^1 f(\alpha, t) dt = \int_0^1 \frac{1}{t^{\frac{1}{\alpha}}} dt$.

D'après le critère de Riemann en 0, cette intégrale converge si, et seulement si, $\frac{1}{\alpha} < 1$ i.e. $\alpha > 1$ ou $\alpha < 0$.

— en $+\infty$: on considère $\int_1^{+\infty} f(\alpha, t) dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$.

D'après le critère de Riemann en $+\infty$, cette intégrale converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Par suite, d'après la relation de Chasles, $\int_0^{+\infty} f(\alpha, t) dt$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$. Il en résulte que le domaine de définition de F est :

$$D =]1, +\infty[.$$

2. Soit $\alpha \in]1, +\infty[$. D'après la relation de Chasles, on a :

$$\begin{aligned}
 F(\alpha) &= \int_0^{+\infty} f(\alpha, t) dt \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{t^{\frac{1}{\alpha}}} dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha}} dt \\
 &= \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{\alpha}} \cdot \frac{1}{t^{\frac{1}{\alpha}-1}} \right]_0^1 + \left[\frac{1}{1 - \alpha} \cdot \frac{1}{t^{\alpha-1}} \right]_1^{+\infty} \\
 &= \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{\alpha}} - 0 \right) + \left(0 - \frac{1}{1 - \alpha} \right) \\
 F(\alpha) &= \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1}.
 \end{aligned}$$

Problème 1.

Étude d'une fonction définie par une intégrale de Dirichlet paramétrée.

Dans ce problème, on déterminera, dans un premier temps, les domaines de définition de deux fonctions D et d définies par des intégrales paramétrées puis, dans un second temps, les limites de D aux bornes de son domaine.

Puis, pour finir, dans une partie indépendante, on calculera la valeur de l'intégrale de Dirichlet.

Notations

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note, lorsque cela à un sens (et c'est l'objet du problème!) :

$$D(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^x} dt \quad \text{et} \quad d(x) = \int_0^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t^x} dt.$$

On pose $\mathcal{D}_D$ (respectivement, $\mathcal{D}_d$) le domaine réel de définition de D (respectivement, de d) i.e.

$$\mathcal{D}_D = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{l'intégrale } D(x) \text{ converge}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_d = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{l'intégrale } d(x) \text{ converge}\},$$

et, de plus, on pose $\mathcal{D}_D^+ = \mathcal{D}_D \cap \mathbb{R}_+$ et $\mathcal{D}_d^+ = \mathcal{D}_d \cap \mathbb{R}_+$.

1. Une condition suffisante de convergence d'intégrales

1. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $u : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur $[a, +\infty[$ telle que $u(t) = O_{t \rightarrow +\infty}(t^\beta)$. On considère l'intégrale généralisée :

$$\int_a^{+\infty} \frac{u'(t)}{t^\alpha} dt.$$

On suppose $\alpha > \beta$. Montrer que cette intégrale converge.

2. En déduire la convergence des intégrales suivantes :

- (a) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt;$
 (b) $\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{\sqrt{t}} dt;$
 (c) $\int_1^{+\infty} e^{it^2} dt;$

2. Domaines de définition de D et de d .

A. Étude du domaine de D pour les réels positifs.

3. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^x} dt$ diverge si $x = 0$ et converge si $x > 0$.
 4. Déterminer pour quel $x \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^x} dt$ converge.
 5. En déduire l'ensemble $\mathcal{D}_D^+$ i.e. l'ensemble de définition de D restreinte aux réels positifs.

B. Étude du domaine de d pour les réels positifs.

6. Justifier succinctement que l'intégrale $\int_0^1 \frac{|\sin(t)|}{t^x} dt$ converge pour les mêmes valeurs de $x \in \mathbb{R}$ que celles trouvées dans la question 4.
 7. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t^x} dt$ converge si $x > 1$.
 8. Soit $x \in [0, 1]$.
 (a) Calculer, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)| dt$.
 (b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{2}{(k+1)^x \pi^x} \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^x} dt.$$

- (c) En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$:

$$\frac{2}{\pi^x} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^x} \leq \int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^x} dt.$$

- (d) Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t^x} dt$ diverge.

9. Déduire des questions précédentes l'ensemble $\mathcal{D}_d^+$ i.e. l'ensemble de définition de d restreinte aux réels positifs.

C. Utilisation du critère de Cauchy pour le cas des réels strictement négatifs

10. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f \in C_{pm}([a, +\infty[, \mathbb{R})$.

- (a) Montrer que si $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge alors, pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $[a, +\infty[$ qui tend vers $+\infty$, $\int_{u_n}^{+\infty} f(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- (b) En déduire que si $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge alors, pour toutes suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $[a, +\infty[$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < v_n$ et $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, on a $\int_{u_n}^{v_n} f(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

11. Soit x un réel **négatif**.

- (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t^x} dt \right| \geq 2.$$

- (b) En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^x} dt$ diverge.

Remarque : dans la question 10, nous avons prouvé et utilisé un cas particulier de l'implication directe (qui se démontre de manière relativement similaire) du *critère de Cauchy* pour les intégrales généralisées (dans le cas $b = +\infty$) et qui s'énonce de la façon suivante :

Soit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$ et $f \in C_{pm}([a, b[, \mathbb{C})$. L'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in [a, b[$ tel que, pour tous $u, v \in [A, b[$ vérifiant $u < v$, on a :

$$\left| \int_u^v f(t) dt \right| < \varepsilon.$$

L'implication réciproque se démontre en utilisant la convergence des suites de Cauchy à valeurs dans l'espace complet $\mathbb{R}$, notions qui ne sont pas au programme.

D. Conclusion.

12. Déterminer les domaines de définition $\mathcal{D}_D$ et $\mathcal{D}_d$ des fonctions D et d .

3. Limites de D aux bornes de son domaine de définition

A. Signe de D et calcul de sa limite en 2^-

On pose $g : t \mapsto \begin{cases} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} & \text{si } t \in \mathbb{R}^* \\ \frac{1}{2} & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$.

12. Montrer que la fonction g est continue, positive sur $\mathbb{R}$ et qu'elle admet un minimum strictement positif sur l'intervalle $[0, \pi]$.

13. Montrer que, pour tout $x \in]0, 2[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{g(t)}{t^{x-1}} dt$ converge et que :

$$D(x) = x \int_0^{+\infty} \frac{g(t)}{t^{x-1}} dt.$$

14. En déduire le signe de D sur $]0, 2[$.

15. Montrer que, pour tout $x \in]0, 2[$, on a, en notant m la valeur minimale prise par g sur $[0, \pi]$:

$$D(x) \geq mx \frac{\pi^{2-x}}{2-x};$$

puis en déduire la limite de $D(x)$ quand x tend vers 2^- .

B. Calcul de la limite de D en 0^+

16. Calcul de la limite de $x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{t^x} dt$ en 0^+ .

Dans cette question, on note $h : t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{t} - 1 & \text{si } t \in]0, 1] \\ \ln(t) & \text{si } t \in]1, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$.

(a) Montrer que h est continue positive sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et que l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(t) \sin(t) dt$ converge.

(b) Pour $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on considère, sur $[0, 1]$, la fonction $\varphi_t : x \mapsto \left| \frac{1}{t^x} - 1 \right|$.

i. Montrer que, si $t \in]0, 1]$, la fonction φ_t est convexe sur $[0, 1]$ et que, si $t \in]1, \frac{\pi}{2}]$, φ_t est concave sur $[0, 1]$.

ii. En déduire que, pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$:

$$\left| \frac{1}{t^x} - 1 \right| = \varphi_t(x) \leq h(t).x$$

(c) Montrer que :

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{t^x} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) dt \right| \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0,$$

puis en déduire que $x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{t^x} dt$ admet une limite finie à déterminer quand $x \rightarrow 0^+$.

16bis Question pour les 5/2 ou à faire par la suite après avoir vu le théorème de convergence dominée. Pouvait-on obtenir cette limite par application du théorème de convergence dominée (version continue) ?

17. Calcul de la limite de $x \mapsto \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^x} dt$ en 0^+ .

(a) En effectuant une double intégration par parties justifiée, montrer que, pour tout réel $x > 0$:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^x} dt = x \left(\frac{2}{\pi} \right)^{x+1} - x(x+1) \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{x+2}} dt.$$

(b) Pour un réel $x > 0$, calculer $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{1}{t^{x+2}} dt$. En déduire la limite de $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^x} dt$ quand x tend vers 0^+ .

17bis Question pour les 5/2 ou à faire par la suite après avoir vu le théorème de convergence dominée. Pouvait-on obtenir cette limite par application du théorème de convergence dominée (version continue) ?

18. Conclusion. Dédurre des questions 16 et 17 la limite de la fonction D en 0^+ .

4. Valeur de l'intégrale de Dirichlet

Le but de cette partie est de déterminer la valeur de $D(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$, connue sous le nom d'intégrale de Dirichlet.

A. Un cas particulier du lemme de Riemann-Lebesgue

Soit $f : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

19. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \sin((2n+1)t) dt = \frac{f(0)}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(t) \cos((2n+1)t) dt.$$

(b) En déduire que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \sin((2n+1)t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Remarque : dans la question 19b, nous avons prouvé un cas particulier du lemme de Riemann-Lebesgue qui s'énonce de la façon suivante :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in C_{pm}(I, \mathbb{C})$. Si f est intégrable sur I , alors :

$$\int_I f(t) e^{i\xi t} dt \xrightarrow{\xi \rightarrow \pm\infty} 0.$$

Ce qui implique par exemple que la transformée de Fourier (on en parlera succinctement au chapitre concernant les intégrales à paramètre) d'une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ admet des limites nulles en $\pm\infty$.

Dans toute la suite du problème, on note :

— sur $]0, \frac{\pi}{2}]$, $F : t \mapsto \frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t}$.

— pour $n \in \mathbb{N}$, sous réserve d'existence, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt$.

B. Une expression de l'intégrale partielle de Dirichlet

20. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_n converge.

(b) Calculer I_0 , puis, pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la valeur de $I_n - I_{n-1}$.

Indication : on pourra penser à utiliser la formule $\sin(a) - \sin(b) = \dots$

(c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de I_n .

21. (a) Montrer que F est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et qu'elle est prolongeable par continuité en 0 par une valeur $c \in \mathbb{R}$ à déterminer.

Dans la suite du problème, on notera encore F la fonction ainsi prolongée sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par $F(0) = c$.

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(t) \sin((2n+1)t) dt = \frac{\pi}{2} - \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(u)}{u} du.$$

C. Calcul de l'intégrale de Dirichlet

22. Montrer que le fonction F est de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ (prolongée par $F(0) = c$).

23. En déduire que l'intégrale de Dirichlet vaut $\frac{\pi}{2}$ i.e.

$$D(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Correction.

Étude d'une fonction définie par une intégrale de Dirichlet paramétrée.

1. Une condition suffisante de convergence d'intégrales

1. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $u : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ telle que $u(t) = O_{t \rightarrow +\infty}(t^\beta)$. On suppose $\alpha > \beta$.

On effectue une intégration par parties pour prouver la convergence de $\int_a^{+\infty} \frac{u'(t)}{t^\alpha} dt$.

On considère la fonction u de l'énoncé et la fonction $v : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ qui sont toutes deux de classe C^1 sur $[a, +\infty[$. De plus, uv admet une limite finie en a car u et v sont continues en a et, on a, comme $\alpha - \beta > 0$:

$$u(t)v(t) = \frac{u(t)}{t^\alpha} = O_{t \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{t^{\alpha-\beta}}\right) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi, l'intégration par parties est licite et donc, les intégrales $\int_a^{+\infty} u'(t)v(t) dt$ et $\int_a^{+\infty} u(t)v'(t) dt$ sont de même nature.

Montrons que l'intégrale $\int_a^{+\infty} u(t)v'(t) dt$ converge. On a :

$$|u(t)v'(t)| = \alpha \frac{|u(t)|}{t^{\alpha+1}} = O_{t \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{t^{\alpha-\beta+1}}\right).$$

Or, d'après le critère de Riemann en $+\infty$, comme $\alpha - \beta + 1 > 1$, $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha-\beta+1}} dt$ converge et donc, par comparaison, $\int_a^{+\infty} u(t)v'(t) dt$ converge absolument, d'où $\int_a^{+\infty} u(t)v'(t) dt$ converge.

Par suite, $\int_a^{+\infty} \frac{u'(t)}{t^\alpha} dt = \int_a^{+\infty} u'(t)v(t) dt$ converge.

2. (a) On pose $a = 1 \in \mathbb{R}_+^*$ et $u : t \mapsto \sin(t)$ qui de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ (et même de classe C^∞) et vérifie $u(t) = \underbrace{O}_{=t^0}(\underbrace{1}_{=t^0})$. On a alors, pour $t \in [a, +\infty[$:

$$\frac{u'(t)}{t^1} = \frac{\cos(t)}{t},$$

donc, d'après la question 1, comme $1 > 0$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt$ converge.

- (b) On pose $a = 1 \in \mathbb{R}_+^*$ et $u : t \mapsto -ie^{it}$ qui de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ (et même de classe C^∞) et vérifie $u(t) = \underbrace{O}_{=t^0}(\underbrace{1}_{=t^0})$. On a alors, pour $t \in [a, +\infty[$:

$$\frac{u'(t)}{t^{\frac{1}{2}}} = \frac{e^{it}}{\sqrt{t}},$$

donc, d'après la question 1, comme $\frac{1}{2} > 0$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{\sqrt{t}} dt$ converge.

- (c) On pose $a = 1 \in \mathbb{R}_+^*$ et $u : t \mapsto \frac{1}{2}e^{it^2}$ qui de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ (et même de classe C^∞) et vérifie $u(t) = \underbrace{O}_{=t^0}(\underbrace{1}_{=t^0})$. On a alors, pour $t \in [a, +\infty[$:

$$\frac{u'(t)}{t^1} = \frac{te^{it^2}}{t} = e^{it^2},$$

donc, d'après la question 1, comme $1 > 0$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{it^2} dt$.

2. Domaines de définition de D et de d .

A. Étude du domaine de D pour les réels positifs.

3. — Si $x = 0$, comme la fonction $\cos$ est une primitive de $\sin$ et qu'elle n'admet pas de limite en $+\infty$ (par exemple, par contraposée de la caractérisation séquentielle de la limite car $\cos(n\pi) = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^0} dt = \int_1^{+\infty} \sin(t) dt$ diverge.
- Soit $x > 0$. On pose $a = 1 \in \mathbb{R}_+^*$ et $u : t \mapsto -\cos(t)$ qui de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ et vérifie $u(t) = \underbrace{O}_{=t^0}(\underbrace{1}_{=t^0})$. On a alors, pour $t \in [a, +\infty[$:

$$\frac{u'(t)}{t^x} = \frac{\sin(t)}{t^x},$$

donc, d'après la question 1, comme $x > 0$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^x} dt$ converge.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^x}$ est continue sur $]0, 1]$.

En 0 : on a

$$\frac{\sin(t)}{t^x} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{t}{t^x} = \frac{1}{t^{x-1}}.$$

Or, d'après le critère de Riemann en 0, $\int_0^1 \frac{1}{t^{x-1}} dt$ converge si, et seulement si, $x - 1 < 1$ i.e. $x < 2$ et donc, par comparaison, $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^x} dt$ converge si, et seulement si, $x < 2$.

5. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, puisque, d'après la question 3, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^x} dt$ converge si, et seulement si, $x > 0$, et, d'après la question 4, $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^x} dt$ converge si, et seulement si, $x < 2$; d'après la relation de Chasles, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^x} dt$ converge si, et seulement si, $0 < x < 2$.
Par suite, $\mathcal{D}_D^+ =]0, 2[$.

B. Étude du domaine de d pour les réels positifs.

6. On a $]0, 1] \subset [0, \pi]$ et $\sin$ est positive sur $[0, \pi]$ donc, sur $]0, 1]$, $|\sin| = \sin$. Par suite, $\int_0^1 \frac{|\sin(t)|}{t^x} dt = \int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^x} dt$ converge si, et seulement si, $x < 2$ d'après la question 4.
7. La fonction $t \mapsto \frac{|\sin(t)|}{t^x}$ est continue, positive sur $[1, +\infty[$.
En $+\infty$: on a

$$\frac{|\sin(t)|}{t^x} \leq \frac{1}{t^x}.$$

Or, d'après le critère de Riemann en $+\infty$, $\int_0^1 \frac{1}{t^x} dt$ converge si $x > 1$, donc, par comparaison, si $x > 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t^x} dt$ converge.

8. Soit $x \in [0, 1]$.
(a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction $|\sin|$ est π périodique, donc, en effectuant le changement de variable de classe C^1 $u = t - k\pi$, on obtient, $\sin$ étant positive sur $[0, \pi]$:

$$\begin{aligned} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)| dt &= \int_0^\pi |\sin(u + k\pi)| du \\ &= \int_0^\pi |\sin(u)| du \\ &= \int_0^\pi \sin(u) du \\ &= [-\cos(u)]_0^\pi \\ &= -\cos(\pi) - (-\cos(0)) \\ \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)| dt &= 2. \end{aligned}$$

- (b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comme la fonction $u \mapsto \frac{1}{u^x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, pour tout $t \in [k\pi, (k+1)\pi]$, $\frac{1}{t^x} \geq \frac{1}{((k+1)\pi)^x} = \frac{1}{(k+1)^x \pi^x}$, donc, par croissance de l'intégrale, on obtient, d'après la question précédente :

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^x} dt \geq \frac{1}{(k+1)^x \pi^x} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)| dt = \frac{2}{(k+1)^x \pi^x}.$$

- (c) Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. En sommant l'inégalité obtenue à la question précédente de $k = 1$ à $n - 1$, on obtient, d'après la relation de Chasles de proche en proche :

$$\frac{2}{\pi^x} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^x} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{(k+1)^x \pi^x} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^x} dt = \int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^x} dt.$$

- (d) La série à termes positifs $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{(k+1)^x}$ diverge par comparaison à la série de Riemann divergente $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^x}$ ($x \leq 1$) car $\frac{1}{(k+1)^x} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{k^x}$; donc la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$.

Par suite, on a :

$$\int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^x} dt \geq \frac{2}{\pi^x} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Or, si $x \rightarrow +\infty$, $n = \left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor \rightarrow +\infty$, donc, par croissance de l'intégrale, on a :

$$\int_{\pi}^x \frac{|\sin(t)|}{t^x} dt \geq \int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^x} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Par suite, par définition, $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t^x} dt$ diverge, et donc, d'après la relation de Chasles, $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t^x} dt$ diverge.

9. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, d'après les questions 7 et 8d, $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t^x} dt$ converge si, et seulement si, $x > 1$.
Il en résulte que $\mathcal{D}_d^+ =]1, +\infty[$.

C. Utilisation du critère de Cauchy pour le cas des réels strictement négatifs

10. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f \in C_{pm}([a, +\infty[, \mathbb{R})$.

- (a) On suppose que $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge. Notons $\ell = \int_a^{+\infty} f(t) dt$.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $[a, +\infty[$ qui tend vers $+\infty$. Par définition, on a $F(x) = \int_a^x f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$. Ainsi, d'après la caractérisation séquentielle de la limite, comme $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, on a $F(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

Ainsi, d'après la relation de Chasles, on a :

$$\int_{u_n}^{+\infty} f(t) dt = \int_a^{+\infty} f(t) dt - \int_a^{u_n} f(t) dt = \ell - F(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

- (b) On suppose que $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $[a, +\infty[$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < v_n$ et $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Alors, par comparaison, $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et donc, d'après la relation de Chasles, on a, d'après la question précédente :

$$\int_{u_n}^{v_n} f(t) dt = \int_{u_n}^{+\infty} f(t) dt - \int_{v_n}^{+\infty} f(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 - 0 = 0.$$

11. Soit $x \in \mathbb{R}_-^*$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sur $[n\pi, (n+1)\pi]$, on a $\sin = (-1)^n |\sin|$, donc :

$$\left| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t^x} dt \right| = \left| (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^x} dt \right| = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^x} dt.$$

De plus, comme $x < 0$, la fonction $u \mapsto \frac{1}{u^x} = u^{-x}$ est croissante sur $\mathbb{R}$, donc, pour tout $t \in [n\pi, (n+1)\pi] \subset [1, +\infty[$, $\frac{1}{t^x} \geq 1$.

Par suite, on a, par croissance de l'intégrale et en utilisant le résultat de la question 8a :

$$\begin{aligned} \left| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t^x} dt \right| &= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^x} dt \\ &\geq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)| dt \\ \left| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t^x} dt \right| &\geq 2. \end{aligned}$$

(b) Comme $x < 0$, $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^x}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = n\pi$ et $v_n = (n+1)\pi$. Alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites à valeurs dans $[0, +\infty[$ qui vérifient, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < v_n$ et $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Or, d'après la question précédente, on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \int_{u_n}^{v_n} \frac{\sin(t)}{t^x} dt \right| = \left| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t^x} dt \right| \geq 2,$$

donc, $\left| \int_{u_n}^{v_n} \frac{\sin(t)}{t^x} dt \right|$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Ainsi, par contraposée de l'implication démontrée à la question 10b, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^x} dt$ diverge.

D. Conclusion.

12. — D'après le résultat de la question 5, $\mathcal{D}_D \cap \mathbb{R}_+ = \mathcal{D}_D^+ =]0, 2[$ et d'après la question 11, $\mathcal{D}_D \cap \mathbb{R}_-^* = \emptyset$. Par suite :

$$\mathcal{D}_D =]0, 2[.$$

— D'après le résultat de la question 9, $\mathcal{D}_d \cap \mathbb{R}_+ = \mathcal{D}_d^+ =]1, 2[$. De plus, si une intégrale est absolument convergente, alors elle converge ; donc, par contraposée, pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$,

comme $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^x} dt$ diverge, alors $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t^x} dt$ diverge. Par suite :

$$\mathcal{D}_d =]1, 2[.$$

3. Limites de D aux bornes de son domaine de définition

A. Signe de D et calcul de sa limite en 2^-

12. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$. Comme $\frac{1}{2} \geq 0$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $\cos(t) \leq 1$, $g(t) = \frac{1-\cos(t)}{t^2} \geq 0$; d'où g est positive sur $\mathbb{R}$.

Reste à montrer la continuité de g en 0. On a, pour $t \in \mathbb{R}^*$:

$$g(t) = \frac{1-\cos(t)}{t^2} = \frac{1 - (1 - \frac{t^2}{2} + o_{t \rightarrow 0}(t^2))}{t^2} = \frac{1}{2} + o_{t \rightarrow 0}(1) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} = g(0).$$

Par suite, g est continue en 0 et donc sur $\mathbb{R}$.

En particulier, g est continue sur le segment $[0, \pi]$ donc, d'après le théorème des bornes atteintes, g est bornée sur $[0, \pi]$ et atteint ses bornes sur cet intervalle, d'où g admet un minimum disons m sur $[0, \pi]$.

Justifions que $m > 0$. Comme g est positive sur $\mathbb{R}$, il suffit de montrer que g est strictement positive sur $[0, \pi]$. Tout d'abord, $g(0) = \frac{1}{2} > 0$ et, pour tout $t \in]0, \pi]$, $\cos(t) \neq 1$ car $\cos$ n'atteint la valeur 1 que sur l'ensemble $2\pi\mathbb{Z}$. Par suite, pour tout $t \in]0, \pi]$, $g(t) = \frac{1-\cos(t)}{t^2} \neq 0$ et donc $g(t) > 0$.

Il en résulte que $m > 0$.

13. Soit $x \in]0, 2[$.

Pour tout $t \in]0, +\infty[$, on a :

$$\frac{g(t)}{t^{x-1}} = \frac{1-\cos(t)}{t^{x+1}}.$$

On effectue une intégration par parties en posant, pour $t \in]0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} u(t) &= 1 - \cos(t) & u'(t) &= \sin(t) \\ v'(t) &= \frac{1}{t^{x+1}} & v(t) &= -\frac{1}{xt^x} \end{aligned}$$

où les fonctions u et v sont bien de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et vérifient :

$$u(t)v(t) = -\frac{1-\cos(t)}{xt^x} \begin{cases} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\frac{t^2}{2}}{xt^x} = \frac{t^{2-x}}{2x} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0 \text{ car } x < 2. \\ \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \text{ car } x > 0 \text{ et } 0 \leq 1 - \cos(t) \leq 1. \end{cases}$$

Ainsi, l'intégration par parties est licite, d'où $\int_0^{+\infty} u(t)v'(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{g(t)}{t^{x-1}} dt$ et

$$\int_0^{+\infty} u'(t)v(t) dt = \int_0^{+\infty} -\frac{\sin(t)}{xt^x} dt \text{ sont de même nature.}$$

Or, comme $x \in]0, 2[= \mathcal{D}_D$, l'intégrale $D(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^x} dt$ converge et donc, par linéarité, $\int_0^{+\infty} -\frac{\sin(t)}{xt^x} dt$ converge.

Par suite, $\int_0^{+\infty} \frac{g(t)}{t^{x-1}} dt$ converge et on a, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{g(t)}{t^{x-1}} dt &= [u(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -\frac{\sin(t)}{xt^x} dt \\ &= (0 - 0) + \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^x} dt \\ \int_0^{+\infty} \frac{g(t)}{t^{x-1}} dt &= \frac{1}{x} D(x). \end{aligned}$$

Il en résulte que $D(x) = x \int_0^{+\infty} \frac{g(t)}{t^{x-1}} dt$.

14. Soit $x \in]0, 2[$. D'après la question précédente, $D(x) = x \int_0^{+\infty} \frac{g(t)}{t^{x-1}} dt$. Or, d'après la question 12, g est positive sur $\mathbb{R}$ donc $t \mapsto \frac{g(t)}{t^{x-1}}$ est positive sur $\mathbb{R}$. Ainsi, par croissance de l'intégrale, $\int_0^{+\infty} \frac{g(t)}{t^{x-1}} dt \geq 0$ et donc, x étant positif, $D(x) \geq 0$. Par suite, D est positive sur $]0, 2[$.

15. Soit $x \in]0, 2[$. On note m la valeur minimale prise par g sur $[0, \pi]$: Alors, on a, d'après la question 13 $D(x) = x \int_0^{+\infty} \frac{g(t)}{t^{x-1}} dt \geq x \int_0^\pi \frac{g(t)}{t^{x-1}} dt$ car la fonction $t \mapsto \frac{g(t)}{t^{x-1}}$ est positive sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{x-1}}$ étant intégrable sur $]0, \pi]$ car $x - 1 < 1$ (Critère de Riemann en 0), on obtient, par croissance de l'intégrale :

$$\begin{aligned} D(x) &\geq x \int_0^\pi \frac{g(t)}{t^{x-1}} dt \\ &\geq x \int_0^\pi \frac{m}{t^{x-1}} dt \\ &\geq xm \left[\frac{t^{2-x}}{2-x} \right]_0^\pi \\ D(x) &\geq xm \frac{\pi^{2-x}}{2-x}. \end{aligned}$$

Déterminons alors la limite de $D(x)$ quand x tend vers 2^- .

On a $xm\pi^{2-x} \xrightarrow{x \rightarrow 2^-} 2m > 0$ car $m > 0$ d'après la question 12.

Par suite, d'après la question précédente,

$$D(x) \geq xm \frac{\pi^{2-x}}{2-x} \underset{x \rightarrow 2^-}{\sim} \frac{2m}{2-x} \xrightarrow{x \rightarrow 2^-} +\infty$$

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, D tend vers $+\infty$ en 2^- .

B. Calcul de la limite de D en 0^+

16. Calcul de la limite de $x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{t^x} dt$ en 0^+ .

- (a) La fonction h est continue sur $]0, 1[$ et $]1, \frac{\pi}{2}]$; de plus $h(1) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow 1^+} h(t) = \ln(1) = 0$ donc h est continue en 1. Par suite, h est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

On a, pour $t \in]0, 1]$, $\frac{1}{t} \geq 1$, donc $h(t) \geq 0$; et pour $t \in]1, \frac{\pi}{2}]$, $h(t) = \ln(t) \geq 0$; d'où h est positive sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

Montrons que l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(t) \sin(t) dt$ converge. Comme la fonction $\sin$ est continue positive sur $]0, \frac{\pi}{2}]$, $t \mapsto h(t) \sin(t)$ est continue positive sur cette intervalle comme produit de fonctions continues positives.

En 0 : on a

$$h(t) \sin(t) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{t} \cdot t = 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1,$$

donc $t \mapsto h(t) \sin(t)$ est prolongeable par continuité en 0 ce qui implique que l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(t) \sin(t) dt$ converge.

- (b) i. Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{t^x} - 1$ est de classe C^∞ sur $[0, 1]$ et on a, pour tout $x \in [0, 1]$:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{t^x} - 1 \right) = \frac{\ln(t)^2}{t^x}.$$

Ainsi :

— pour $t \in]0, 1]$, on a, pour tout $x \in [0, 1]$, $\frac{1}{t^x} \geq 1$, donc $\varphi_t(x) = \frac{1}{t^x} - 1$, d'où :

$$\varphi_t''(x) = \frac{\ln(t)^2}{t^x} \geq 0.$$

Donc φ_t est convexe sur $[0, 1]$;

— pour $t \in]1, \frac{\pi}{2}]$, on a, pour tout $x \in [0, 1]$, $\frac{1}{t^x} \leq 1$, donc $\varphi_t(x) = 1 - \frac{1}{t^x}$, d'où :

$$\varphi_t''(x) = -\frac{\ln(t)^2}{t^x} \leq 0.$$

Donc φ_t est concave sur $[0, 1]$.

- ii. — Soit $t \in]0, 1]$. Comme, d'après la question précédente, φ_t est convexe sur $[0, 1]$, sa courbe est en dessous de sa corde qui relie les points d'abscisses 0 et 1 et d'ordonnée $\varphi_t(0) = 0$ et $\varphi_t(1) = \frac{1}{t} - 1$ qui est donc d'équation $y = \frac{(\frac{1}{t}-1)-0}{1-0}x + 0 = (\frac{1}{t} - 1)x$. Par suite, on a, pour tout $x \in [0, 1]$:

$$\varphi_t(x) \leq \left(\frac{1}{t} - 1\right)x = h(t)x.$$

— Soit $t \in]1, \frac{\pi}{2}]$. Comme, d'après la question précédente, φ_t est concave sur $[0, 1]$, sa courbe est en dessous de sa tangente en 0 qui est d'équation $y = \varphi_t'(0)(x - 0) + \varphi_t(0) = \ln(t)x$. Par suite, on a, pour tout $x \in [0, 1]$:

$$\varphi_t(x) \leq \ln(t)x = h(t)x.$$

Par suite, pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$ et pour tout $x \in [0, 1]$, on a :

$$\left| \frac{1}{t^x} - 1 \right| = \varphi_t(x) \leq h(t)x.$$

- (c) Soit $x \in [0, 1]$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{t^x} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) dt \right| &\leq \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{t^x} - 1 \right) \sin(t) dt \right| \\ &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{1}{t^x} - 1 \right| \sin(t) dt \\ &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} x h(t) \sin(t) dt \\ &\leq x \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(t) \sin(t) dt \end{aligned}$$

Or, d'après la question 16a, l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(t) \sin(t) dt$ converge, donc $x \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(t) \sin(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$. Ainsi, d'après le théorème des gendarmes :

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{t^x} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) dt \right| \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0.$$

Il en résulte que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{t^x} dt \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) dt = [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

16bis Pour pouvoir appliquer le théorème de convergence dominée (version continue), il nous faut une fonction de domination admissible de $f_x(t) = \frac{\sin(t)}{t^x}$ pour $x \in [0, 1]$. Or, la fonction $\sin$ étant concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a, pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(t) \leq t$ car la courbe de $\sin$ est en dessous de sa tangente en 0. Ainsi, $|f_x(t)| \leq t^{1-x} \leq 1$ car $x \leq 1$. Comme la fonction constante en 1 a le bon goût d'être intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$, on peut donc s'essayer à la vérification des hypothèses du théorème :

- pour tout $x \in [0, 1]$, f_x est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.
- pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, on a

$$f_x(t) = \frac{\sin(t)}{t^x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \sin(t)$$

et $\sin$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$;

- On a, pour tout $x \in [0, 1]$ et pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, comme vu précédemment :

$$|f_x(t)| \leq 1 = g(t) \quad \textbf{hypothèse de domination}$$

et $g : t \mapsto 1$ est intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ car continue sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée (cas continu), les f_x et $\sin$ sont intégrables sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ (on le savait déjà !) et on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_x(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{x \rightarrow 0^+} f_x(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) dt = 1.$$

17. Calcul de la limite de $x \mapsto \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^x} dt$ en 0^+ .

(a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

— On effectue une première intégration par parties en posant :

$$\begin{aligned} u'(t) &= \sin(t) & u(t) &= -\cos(t) \\ v(t) &= \frac{1}{t^x} & v'(t) &= -\frac{x}{t^{x+1}} \end{aligned}$$

où les fonctions u et v sont bien de classe C^1 sur $[\frac{\pi}{2}, +\infty[$ et vérifient :

$$u(t)v(t) = -\frac{\cos(t)}{t^x} \begin{cases} \xrightarrow{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} 0. \\ \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \text{ car } x > 0 \text{ et } -1 \leq \cos(t) \leq 1. \end{cases}$$

Ainsi, l'intégration par parties est licite, d'où $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} u'(t)v(t) dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^x} dt$ et $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} u(t)v'(t) dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} x \frac{\cos(t)}{t^{x+1}} dt$ sont de même nature et donc sont convergentes car, d'après la question 3, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^x} dt$ converge, d'où, d'après la relation de Chasles $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^x} dt$ converge.

Ainsi, par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^x} dt &= [u(t)v(t)]_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} x \frac{\cos(t)}{t^{x+1}} dt \\ &= -x \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^{x+1}} dt. \end{aligned}$$

— On effectue une seconde intégration par parties sur l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^{x+1}} dt$ en posant :

$$\begin{aligned} u'(t) &= \cos(t) & u(t) &= \sin(t) \\ v(t) &= \frac{1}{t^{x+1}} & v'(t) &= -\frac{x+1}{t^{x+2}} \end{aligned}$$

où les fonctions u et v sont bien de classe C^1 sur $[\frac{\pi}{2}, +\infty[$ et vérifient :

$$u(t)v(t) = \frac{\sin(t)}{t^{x+1}} \begin{cases} \xrightarrow[t \rightarrow \frac{\pi}{2}]{} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{x+1} \\ \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0 \text{ car } x+1 > 0 \text{ et } -1 \leq \sin(t) \leq 1. \end{cases}$$

Ainsi, l'intégration par parties est licite, d'où $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} u'(t)v(t) dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^{x+1}} dt$ et $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} u(t)v'(t) dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} -(x+1) \frac{\sin(t)}{t^{x+2}} dt$ sont de même nature et donc sont convergentes car, d'après la première intégration par parties, $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^{x+1}} dt$ l'est.

Ainsi, par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^{x+1}} dt &= [u(t)v(t)]_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} -(x+1) \frac{\sin(t)}{t^{x+2}} dt \\ &= -\left(\frac{2}{\pi}\right)^{x+1} + (x+1) \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{x+2}} dt. \end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^x} dt = -x \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^{x+1}} dt = x \left(\frac{2}{\pi}\right)^{x+1} - x(x+1) \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{x+2}} dt.$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a $x+2 > 1$ donc, d'après la critère de Riemann en $+\infty$, $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{1}{t^{x+2}} dt$ converge, et on a :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{1}{t^{x+2}} dt = \left[-\frac{1}{(x+1)t^{x+1}} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} = \frac{1}{(x+1)} \cdot \left(\frac{2}{\pi} \right)^{x+1}.$$

De plus, l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{x+2}} dt$ est absolument convergente car, pour $t \in [\frac{\pi}{2}, +\infty[$, $\frac{|\sin(t)|}{t^{x+2}} \leq \frac{1}{t^{x+2}}$ et on a, par inégalité triangulaire et par croissance de l'intégrale :

$$\left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{x+2}} dt \right| \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t^{x+2}} dt \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{1}{t^{x+2}} dt = \frac{1}{(x+1)} \cdot \left(\frac{2}{\pi} \right)^{x+1}$$

Par suite, on obtient, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^x} dt \right| &= \left| x \left(\frac{2}{\pi} \right)^{x+1} - x(x+1) \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{x+2}} dt \right| \\ &\leq x \left(\frac{2}{\pi} \right)^{x+1} + x(x+1) \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{x+2}} dt \right| \\ &\leq x \left(\frac{2}{\pi} \right)^{x+1} + x(x+1) \cdot \frac{1}{(x+1)} \cdot \left(\frac{2}{\pi} \right)^{x+1} \\ \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^x} dt \right| &\leq 2x \left(\frac{2}{\pi} \right)^{x+1} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^x} dt \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0.$$

17bis D'après la question 3, l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(t)}{t^x} dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \sin(t) dt$ diverge, donc on ne peut pas appliquer le théorème de convergence dominée à la famille de fonctions $\left(t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^x} \right)_{x \in \mathbb{R}_+^*}$ pour sa limite en 0^+ . En effet, si les hypothèses du théorème étaient vérifiées, cela impliquerait que l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \sin(t) dt$ converge, et ce n'est donc pas le cas !
D'ailleurs, on peut remarquer que c'est l'hypothèse de domination qui échoue ici, puisque toutes les autres hypothèses sont vérifiées par $\left(t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^x} \right)_{x \in \mathbb{R}_+^*}$.

18. *Conclusion.* Dédurre des questions 16 et 17 la limite de la fonction D en 0^+ .

4. Valeur de l'intégrale de Dirichlet

19. (a) La fonction $t \mapsto f(t) \sin((2n+1)t)$ étant continue sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$ comme produit de fonctions continues, l'intégrale converge et on peut appliquer directement une intégration par parties en posant :

$$\begin{aligned} u'(t) &= \sin((2n+1)t) & u(t) &= -\frac{1}{2n+1} \cos((2n+1)t) \\ v(t) &= f(t) & v'(t) &= f'(t) \end{aligned}$$

où les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

On a alors, par intégration par parties et en remarquant que $\cos(k\frac{\pi}{2}) = 0$ pour tout entier k :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \sin((2n+1)t) dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(t)v(t) dt \\ &= \underbrace{[u(t)v(t)]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{= -\cos((2n+1)\frac{\pi}{2})f(\frac{\pi}{2}) - \frac{-\cos(0)}{2n+1}f(0)} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(t)v'(t) dt \\ &= 0 + \frac{f(0)}{2n+1} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos((2n+1)t)}{2n+1} f'(t) dt \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \sin((2n+1)t) dt &= \frac{f(0)}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(t) \cos((2n+1)t) dt. \end{aligned}$$

- (b) On a, d'après la question précédente, pour $n \in \mathbb{N}$, par inégalités triangulaires et croissance de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \sin((2n+1)t) dt \right| &= \left| \frac{f(0)}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(t) \cos((2n+1)t) dt \right| \\ &= \frac{1}{2n+1} \left(|f(0)| + \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(t) \cos((2n+1)t) dt \right| \right) \\ &= \frac{1}{2n+1} \left(|f(0)| + \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f'(t)| \cdot \underbrace{|\cos((2n+1)t)|}_{\leq 1} dt \right) \\ \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \sin((2n+1)t) dt \right| &= \frac{1}{2n+1} \left(|f(0)| + \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f'(t)| dt \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \sin((2n+1)t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

A. Une expression de l'intégrale partielle de Dirichlet

20. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et on a $\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} \underset{t \rightarrow 0+}{\sim} \frac{(2n+1)t}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0+} 2n+1$; donc elle est prolongeable par continuité en 0. Par suite, l'intégrale I_n converge.

(b) On a $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dt = \frac{\pi}{2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a, par linéarité de l'intégrale :

$$I_n - I_{n-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t) - \sin((2n-1)t)}{\sin(t)} \, dt$$

Or, on rappelle que, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sin(a) - \sin(b) = 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

D'où, pour $a = (2n+1)t$ et $b = (2n-1)t$, comme $\frac{a+b}{2} = 2nt$ et $\frac{a-b}{2} = t$, on obtient :

$$\begin{aligned} I_n - I_{n-1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos(2nt) \sin(t)}{\sin(t)} \, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos(2nt) \, dt \\ &= \left[\frac{\sin(2nt)}{2n} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ I_n - I_{n-1} &= 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

(c) D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = I_{n-1}$ donc la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante. Or, comme $I_0 = \frac{\pi}{2}$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \frac{\pi}{2}.$$

21. (a) La fonction F est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ comme somme de quotient de fonctions continues qui ne s'annulent pas sur $]0, \frac{\pi}{2}]$. De plus, on a :

$$\frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t} = \frac{t - \sin(t)}{t \sin(t)} = \frac{t - (t - \frac{t^3}{6} + \frac{o_{t \rightarrow 0^+}(t^3))}{t^2 + \frac{o_{t \rightarrow 0^+}(t^2)}} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\frac{t^3}{6}}{t^2} = \frac{t}{6} \underset{t \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

Par suite, F est prolongeable par continuité en 0 par $F(0) = 0$.

(b) La fonction F étant continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, $t \mapsto F(t) \sin((2n+1)t)$ est continue sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$ comme produit de fonctions continues et donc l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(t) \sin((2n+1)t) \, dt$ converge.

Soit $n \in \mathbb{N}$. L'intégrale I_n converge d'après la question 20 et l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} \, dt$ converge car $t \mapsto \frac{\sin((2n+1)t)}{t}$, prolongée par $2n+1$ en $t = 0$, est continue sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$. Ainsi, par combinaison linéaire d'intégrales convergentes, on

a, comme, d'après la question 20 :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(t) \sin((2n+1)t) dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t} \right) \sin((2n+1)t) dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt \\
&= I_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt \\
\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(t) \sin((2n+1)t) dt &= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt.
\end{aligned}$$

On effectue alors, sur l'intégrale convergente $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt$, le changement de variable $u = (2n+1)t$ de classe C^1 :

$$\begin{aligned}
t &= \frac{1}{2n+1}u & dt &= \frac{1}{2n+1} du \\
t = 0 &\Leftrightarrow u = 0 & t = \frac{\pi}{2} &\Leftrightarrow u = (2n+1)\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt = \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(u)}{\frac{1}{2n+1}u} \left(\frac{1}{2n+1} \right) du = \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(u)}{u} du.$$

Il en résulte que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(t) \sin((2n+1)t) dt = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt = \frac{\pi}{2} - \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(u)}{u} du.$$

B. Calcul de l'intégrale de Dirichlet

22. La fonction F est de classe C^1 sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ comme somme de quotient de fonctions de classe

C^1 qui ne s'annulent pas sur $]0, \frac{\pi}{2}]$. De plus, on a, pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\begin{aligned}
F'(t) &= \frac{-\cos(t)}{\sin^2(t)} + \frac{1}{t^2} \\
&= \frac{\sin^2(t) - t^2 \cos(t)}{t^2 \sin^2(t)} \\
&= \frac{(t - \frac{t^3}{6} + o_{t \rightarrow 0^+}(t^3))^2 - t^2(1 - \frac{t^2}{2} + o_{t \rightarrow 0^+}(t^3))}{t^2(t + o_{t \rightarrow 0^+}(t))^2} \\
&= \frac{(t^2 - \frac{t^4}{3}) - (t^2 - \frac{t^4}{2}) + o_{t \rightarrow 0^+}(t^4)}{t^4 + o_{t \rightarrow 0^+}(t^4)} \\
&= \frac{\frac{t^4}{6} + o_{t \rightarrow 0^+}(t^4)}{t^4 + o_{t \rightarrow 0^+}(t^4)} \\
F'(t) &\underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\frac{t^4}{6}}{t^4} = \frac{1}{6} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Par suite, F étant continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et de classe C^1 sur $]0, \frac{\pi}{2}]$, d'après le théorème du prolongement C^1 (corollaire du théorème de la limite de la dérivée), F est de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ (et $F'(0) = \frac{1}{6}$).

23. D'après la question 3, $D(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge, alors, par définition, la fonction $\delta : x \mapsto \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$ admet une limite finie en $+\infty$, égale à $D(1)$.
Par suite, par caractérisation séquentielle de la limite, la suite $(\delta((2n+1)\frac{\pi}{2}))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $D(1)$ i.e.

$$\int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{t} dt = \delta\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} D(1).$$

D'après la question 21, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(t) \sin((2n+1)t) dt.$$

Or, comme, d'après la question précédente, F est de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on peut appliquer la question 19 à $g = F$, d'où :

$$\int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(t) \sin((2n+1)t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Il en résulte, par unicité de la limite de $(\delta((2n+1)\frac{\pi}{2}))_{n \in \mathbb{N}}$, que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = D(1) = \frac{\pi}{2}.$$