

Chapitre III

Espaces vectoriels normés

Table des matières

Partie A : Normes et espaces vectoriels normés	2
1. Définition d'une norme	2
2. Premiers exemples d'espaces vectoriels normés	9
3. Distance associée à une norme	23
4. Boules et sphères associées à une distance	27
5. Parties bornées, applications bornées	29

Partie A

Normes et espaces vectoriels normés

Dans cette partie, E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Définition d'une norme

a. Définition et premières propriétés

Définition 1. Norme

On appelle **norme** sur l'espace vectoriel, une application $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie les axiomes suivants :

i) (Positivité) pour tout $x \in E$,

$$N(x) \geq 0;$$

ii) (Séparation) pour tout $x \in E$,

$$N(x) = 0 \text{ implique } x = 0_E;$$

iii) (Homogénéité) pour tous $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$N(\lambda x) = |\lambda|N(x);$$

iv) (Inégalité triangulaire) pour tous $x, y \in E$,

$$N(x + y) \leq N(x) + N(y).$$

Si N est une norme sur E , le couple (E, N) est appelé **espace vectoriel normé**.

Remarque 1.

Dans ce chapitre, les normes seront souvent appelées N dans les énoncés théoriques. On rencontrera également la notation $\| \cdot \|$ pour désigner une norme ce qui correspond à l'application $\| \cdot \| : x \mapsto \|x\|$.

Proposition 1.

Soit N une norme sur E . On a $N(0_E) = 0$ et, pour tout $x \in E$, $N(-x) = N(x)$.

Démonstration.

D'après l'axiome d'homogénéité appliqué à $\lambda = 0$ et $x = 0_E \in E$, on a :

$$N(0_E) = N(0.0_E) = |0|.N(0_E) = 0N(0_E) = 0.$$

De plus, pour tout $x \in E$, $N(-x) = N((-1).x) = |-1|N(x) = N(x)$. □

Exercice 1.

Soit $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$. Montrer que l'axiome d'homogénéité pour N est équivalent à :

$$\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad N(\lambda x) \leq |\lambda|N(x).$$

Correction.

La condition est nécessaire car $\Rightarrow$ implique $\leq$. Montrons qu'elle est suffisante :

1er cas : $\lambda = 0$. Pour tout $x \in E$, on a $N(0.x) \leq 0N(x) = 0$. Or N est positive, donc $N(0.x) = 0 = 0N(x)$.

2eme cas : $\lambda \neq 0$. Pour tout $x \in E$,

$$N(x) = N\left(\frac{1}{\lambda}\lambda x\right) \leq \frac{1}{|\lambda|}N(\lambda x).$$

Par suite, $N(\lambda x) \geq |\lambda|N(x)$.

D'où le résultat.

Proposition 2. Seconde Inégalité triangulaire

Soit N une norme sur E . Pour tous $x, y \in E$ on a :

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x - y) \leq N(x) + N(y).$$

Démonstration.

Soit $x, y \in E$. On a $N(x) = N(x - y + y) \leq N(x - y) + N(y)$. Par suite, $N(x) - N(y) \leq N(x - y)$. On a de même $N(y) - N(x) \leq N(x - y)$ en remarquant que $N(y) = N(y - x + x)$. □

b. Exemples déjà connus !

Les deux premiers exemples suivants sont bien connus et serviront de base pour la construction de la plupart des autres exemples de normes que nous verrons dans la suite.

Exemple 1.

- La valeur absolue est une norme sur $\mathbb{R}$.
- Le module est une norme sur $\mathbb{C}$.

Ces deux exemples ont été traités en Sup', même si le nom de "norme" n'avait pas été évoqué à l'époque. On redonne ici la démonstration des propriétés "normesque" de la valeur absolue et du module.

— La fonction valeur absolue $|\cdot| : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est définie, pour $x \in \mathbb{R}$ par :

$$|x| = \max(\{x, -x\}) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

On remarque alors que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq x$ et $|x| \geq -x$ et donc $-|x| \leq x \leq |x|$; de plus, on a également l'égalité $|x| = \sqrt{x^2}$.

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- i) (Positivité) Si $x \geq 0$, alors $|x| = x \geq 0$ et si $x < 0$, $|x| = -x > 0$. Dans tous les cas, on a $|x| \geq 0$; d'où la positivité.
- ii) (Séparation) . Si $|x| = 0$, alors on a :

$$0 = -0 = -|x| \leq x \leq |x| = 0$$

d'où $x = 0$.

- iii) (Homogénéité) On a :

$$|\lambda x| = \begin{cases} \lambda x & \text{si } \lambda x \geq 0 \\ -\lambda x & \text{si } \lambda x < 0. \end{cases}$$

On a alors plusieurs cas :

- * Si $\lambda = 0$ ou $x = 0$, alors $\lambda x = 0$, d'où $|\lambda x| = \lambda x = 0$. Et de plus, comme $|\lambda| = \pm \lambda$ et $|x| = \pm x$, on a $|\lambda| = 0$ ou $|x| = 0$ d'où $|\lambda| \cdot |x| = 0$. Ainsi, $|\lambda x| = 0 = |\lambda| \cdot |x|$.
- * Si $\lambda > 0$ et $x > 0$, alors $\lambda = |\lambda|$ et $x = |x|$ d'où, comme $\lambda x \geq 0$, $|\lambda x| = \lambda x = |\lambda| \cdot |x|$.
- * Si $\lambda < 0$ et $x > 0$, alors $\lambda = -|\lambda|$ et $x = |x|$ d'où, comme $\lambda x < 0$:

$$|\lambda x| = -\lambda x = -(-|\lambda|) \cdot |x| = |\lambda| \cdot |x|$$

- * Si $\lambda > 0$ et $x < 0$, alors $\lambda = |\lambda|$ et $x = -|x|$ d'où, comme $\lambda x < 0$:

$$|\lambda x| = -\lambda x = -|\lambda| \cdot (-|x|) = |\lambda| \cdot |x|$$

- * Si $\lambda < 0$ et $x < 0$, alors $\lambda = -|\lambda|$ et $x = -|x|$ d'où, comme $\lambda x \geq 0$, $|\lambda x| = \lambda x = (-|\lambda|) \cdot (-|x|) = |\lambda| \cdot |x|$.

- iv) (Inégalité triangulaire) Comme $\pm x \leq |x|$ et $\pm y \leq |y|$, on a $x + y \leq |x| + |y|$ et $-(x + y) \leq |x| + |y|$. Or $|x + y| = \pm(x + y)$ d'où :

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Ainsi, la valeur absolue $|\cdot|$ est une norme sur $\mathbb{R}$.

— La fonction module $|\cdot| : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}$ est définie, pour $z \in \mathbb{C}$ de forme algébrique $z = x + iy$, par :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

On remarque alors que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.

Soit $z, \zeta \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $z = x + iy$ la forme algébrique de z .

- i) (Positivité) La fonction racine carrée étant à valeur dans $\mathbb{R}_+$, on a $|z| \geq 0$.

ii) (Séparation) . Si $|z| = 0$, alors on a :

$$0 \leq |x| \leq |z| = 0 \text{ et } 0 \leq |y| \leq |z| = 0$$

d'où $|x| = 0$ et $|y| = 0$ et ainsi, d'après l'axiome de séparation pour la valeur absolue dans $\mathbb{R}$, $x = 0$ et $y = 0$. Par suite, $z = 0 + i0 = 0$.

iii) (Homogénéité) On a :

$$|\lambda z|^2 = (\lambda z) \cdot \overline{(\lambda z)} = \lambda \cdot z \cdot \overline{\lambda \cdot z} = (\lambda \cdot \overline{\lambda})(z \cdot \overline{z}) = |\lambda|^2 \cdot |z|^2 = (|\lambda| \cdot |z|)^2$$

d'où, par injectivité de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$ ($|\lambda z|$ et $|\lambda| \cdot |z|$ étant des réels positifs) :

$$|\lambda z| = |\lambda| \cdot |z|.$$

iv) (Inégalité triangulaire) On a :

$$|z + \zeta|^2 = (z + \zeta) \cdot \overline{(z + \zeta)} = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z \cdot \overline{\zeta}) + |\zeta|^2,$$

or, $\operatorname{Re}(z \cdot \overline{\zeta}) \leq |z \cdot \overline{\zeta}| = |z| \cdot |\zeta|$, d'où :

$$|z + \zeta|^2 \leq |z|^2 + 2|z| \cdot |\zeta| + |\zeta|^2 = (|z| + |\zeta|)^2$$

et donc, par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$ ($|z + \zeta|$ et $|z| + |\zeta|$ étant des réels positifs) :

$$|z + \zeta| \leq |z| + |\zeta|.$$

Ainsi, le module $|\cdot|$ est une norme sur $\mathbb{C}$.

Exemple 2.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E et $\|\cdot\|$ sa norme associée (i.e. $x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$). La terminologie utilisée est bien justifiée : en effet, $\|\cdot\|$ est bien une norme sur E au sens de la définition 1.

En particulier, la norme associée au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

On rappelle qu'un produit scalaire sur E est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E . On utilise donc ces propriétés.

Tout d'abord, l'application $x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est bien définie de E dans $\mathbb{R}$ car, par positivité du produit scalaire, pour tout $x \in E$, $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}_+ = \mathcal{D}_{\sqrt{\cdot}}$ (domaine de définition de la fonction racine).

Soit $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

i) (Positivité) La fonction racine est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ donc $\|x\| \geq 0$.

ii) (Séparation) . Si $\|x\| = 0_E$, alors, $\sqrt{\langle x, x \rangle} = 0$. Ainsi, $\langle x, x \rangle = 0$, d'où par définie positivité du produit scalaire, $x = 0_E$.

iii) (Homogénéité) On a, par linéarité du produit scalaire par rapport à chaque variable :

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} = \sqrt{\lambda^2} \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\lambda| \|x\|.$$

iv) (**Inégalité triangulaire**) On a, en utilisant la bilinéarité du produit scalaire et le théorème de Cauchy-Schwarz :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

D'où le résultat.

c. Vecteurs unitaires ; boules et sphères unité

Notation 1. Boule et sphère unité

Soit N une norme sur E . On note :

- $S(0_E, 1) = \{x \in E \mid N(x) = 1\}$; on appelle cet ensemble **sphère unité** de E ;
- $B_f(0_E, 1) = \{x \in E \mid N(x) \leq 1\}$; on appelle cet ensemble **boule unité fermée** de E ;
- $B(0_E, 1) = \{x \in E \mid N(x) < 1\}$; on appelle cet ensemble **boule unité ouverte** de E ;

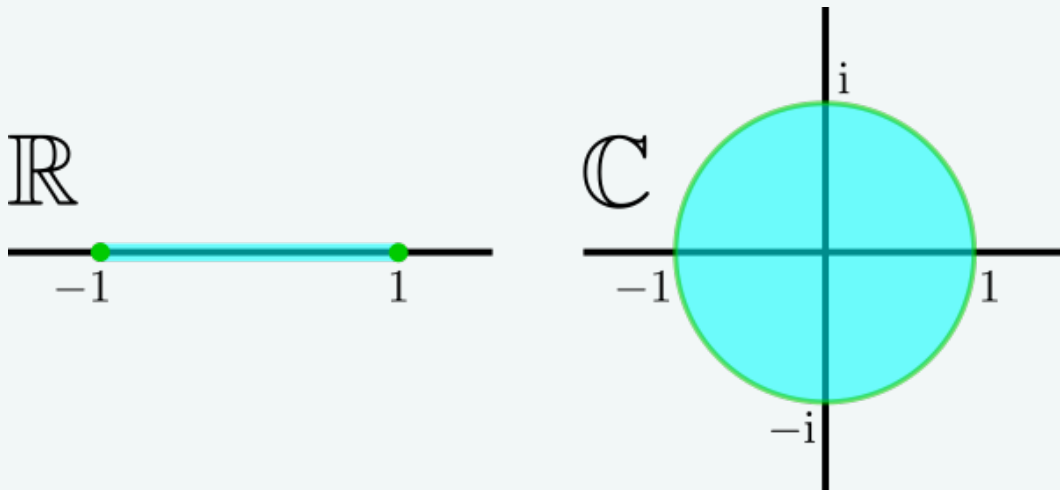
Exemple 3.

1. Dans l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, on a :

$$S(0, 1) = \{-1, 1\}, \quad B_f(0, 1) = [-1, 1] \text{ et } B(0, 1) =]-1, 1[.$$

2. Dans l'espace vectoriel normé $(\mathbb{C}, |\cdot|)$, on a :

$$S(0, 1) = \mathbb{U}.$$



Définition 2. Vecteur unitaire

Soit N une norme sur E .

On dit qu'un vecteur x de E est **unitaire** si $N(x) = 1$.

Remarque 2.

La sphère unité d'un espace vectoriel normé est donc l'ensemble de ses vecteurs unitaires.

Définition 3.

Soit N une norme sur E et $x \in E$ un vecteur non nul.

On appelle **vecteur unitaire associé à x** , le vecteur $\frac{1}{N(x)}x$.

Proposition 3.

Soit N une norme sur E et $x \in E$ un vecteur non nul. Le vecteur unitaire associé à x est un vecteur unitaire et colinéaire à x .

Démonstration.

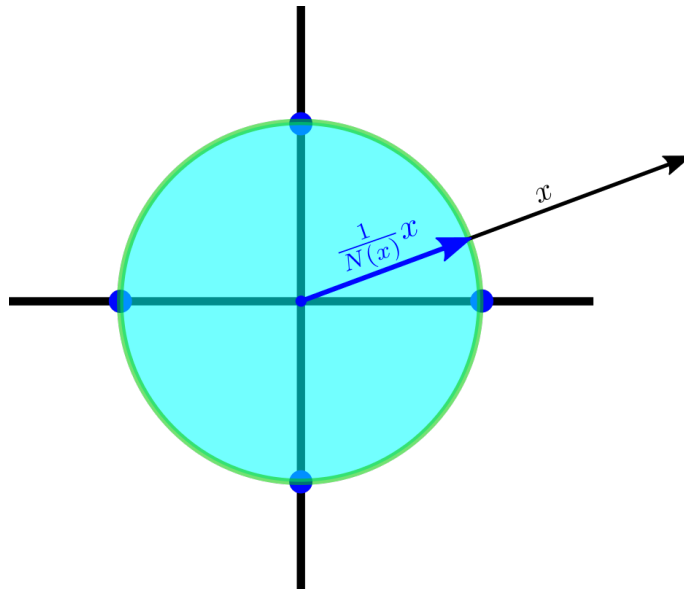
On note u le vecteur colinéaire à x .

Comme $\lambda = \frac{1}{N(x)} \in \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{K}$ et $u = \lambda x$, u est colinéaire à x .

De plus, on a, comme $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et par homogénéité :

$$N(u) = N(\lambda x) = |\lambda|N(x) = \frac{1}{N(x)}N(x) = 1.$$

Donc u est un vecteur unitaire. □



Remarque 3.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il n'existe que deux vecteurs unitaires colinéaires à x :

$$\frac{1}{N(x)}x \text{ et } -\frac{1}{N(x)}x.$$

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il en a une infinité : ce sont exactement les

$$\frac{e^{it}}{N(x)}x \text{ pour } t \in [0, 2\pi[.$$

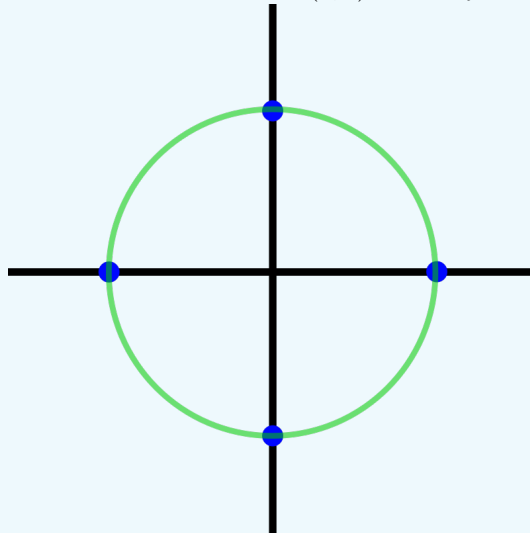
Exercice 2.

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ muni de la norme associée au produit scalaire canonique. Dessiner la sphère unité et les boules unité fermée et ouverte de cet espace vectoriel normé.

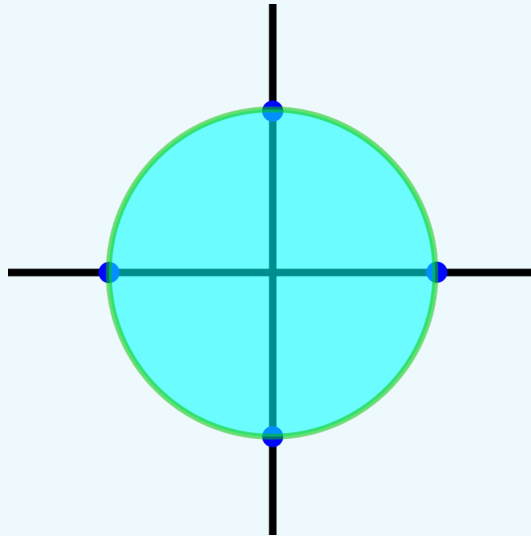
Correction.

La norme $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ est la bien connue norme euclidienne i.e., pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. On obtient donc :

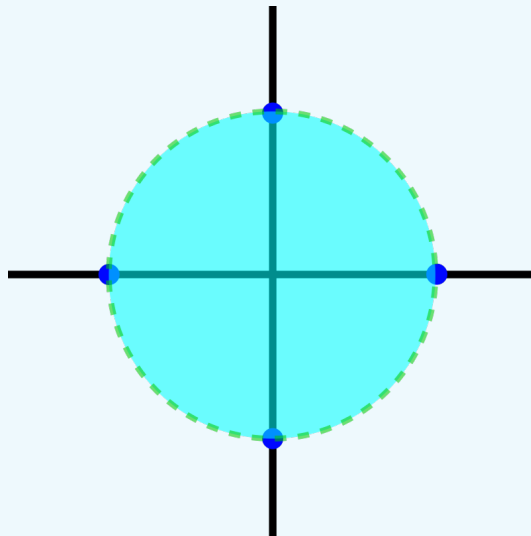
- pour la sphère unité : $S((0, 0), 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. On reconnaît l'équation du cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^2$!



- pour la boule unité fermée : $B_f((0, 0), 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. On reconnaît l'équation du disque fermé de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^2$!



— pour la boule unité ouverte : $B((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2} < 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$. On reconnaît l'équation du disque ouvert de centre $(0,0)$ et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^2$!



2. Premiers exemples d'espaces vectoriels normés

a. Quelques normes sur $\mathbb{K}^n$

Sur l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$, il existe de nombreuses normes qui permettent de le munir d'une structure d'espace vectoriel normé. En voici quelques unes parmi les plus fréquemment "rencontrées" :

Définition 4. Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$

Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ un vecteur de $\mathbb{K}^n$. On définit :

— La **norme un**, notée $\|\cdot\|_1$:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| = |x_1| + \dots + |x_n|.$$

— La **norme deux**, notée $\|\cdot\|_2$:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}.$$

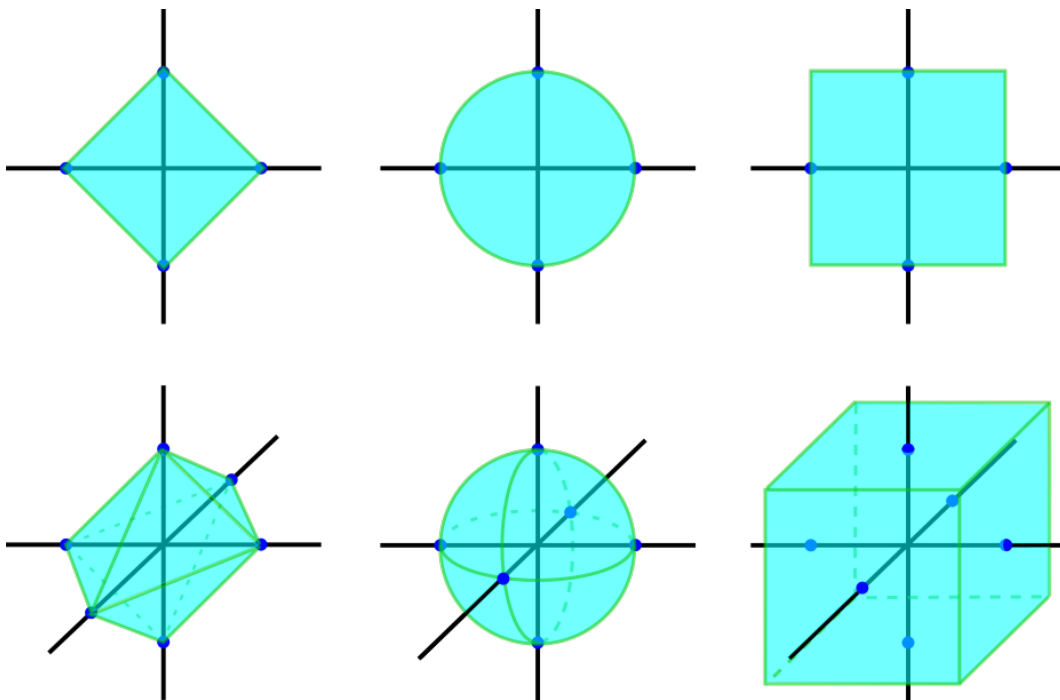
— La **norme infinie**, notée $\|\cdot\|_\infty$:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|) = \max(|x_1|, \dots, |x_n|).$$

Remarque 4.

On remarque que dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la norme deux correspond à la norme euclidienne (i.e. la norme associée au produit scalaire canonique) sur $\mathbb{R}^n$.

Voici une illustration dans $\mathbb{R}^2$ puis $\mathbb{R}^3$ des boules des normes un, deux et infinie (de gauche à droite).



Exercice 3.

Dessiner les boules des normes un, deux et infinie dans $\mathbb{R}^4$.

Correction.

includegraphics error, file not found.

Proposition 4.

Les normes un, deux, et infinie sont bien des normes sur $\mathbb{K}^n$.

Démonstration.

★ Commençons par traiter le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Démontrons que les normes un, deux et infinie sont bien des normes sur $\mathbb{R}^n$. Ces fonctions sont bien définies : pour la norme un, il s'agit d'une somme finie ; pour la norme deux, il s'agit de la racine d'une somme finie de nombres positifs (carrés) et donc positive ; pour la norme infinie, il s'agit du maximum d'un ensemble fini de réels.

• $\|\cdot\|_1$: Soit $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

i) (Positivité) pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|x_i| \geq 0$, donc :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \geq 0.$$

ii) (Séparation) On suppose que $\|x\|_1 = 0$. Alors $\sum_{i=1}^n |x_i| = 0$. Or si une somme de nombres positifs est nulle, tous ses termes sont nuls (en effet, chaque terme d'une somme de nombres positifs est compris entre 0 et cette somme) ; ainsi, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|x_i| = 0$ et donc $x_i = 0$. Par suite, $x = (0, \dots, 0) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

iii) (Homogénéité) On a, en factorisant par $|\lambda|$:

$$\|\lambda x\|_1 = \sum_{i=1}^n \underbrace{|\lambda x_i|}_{=|\lambda| \cdot |x_i|} = |\lambda| \sum_{i=1}^n |x_i| = |\lambda| \cdot \|x\|_1.$$

iv) (Inégalité triangulaire) Par définition de l'addition dans $\mathbb{R}^n$, on a $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ et ainsi, par inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$:

$$\|x + y\|_1 = \sum_{i=1}^n \underbrace{|x_i + y_i|}_{\leq |x_i| + |y_i|} \leq \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

Il en résulte que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

• $\|\cdot\|_2$: On rappelle que l'application $(\cdot|\cdot)$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(x|y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ (il s'agit du *produit scalaire canonique* de $\mathbb{R}^n$) et on remarque que $\|\cdot\|_2$ est la norme associée à ce produit scalaire. Ainsi, d'après l'exemple 2, $\|\cdot\|_2$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

• $\|\cdot\|_\infty$: Soit $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

i) (Positivité) pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|x_i| \geq 0$, donc en particulier :

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|) \geq 0.$$

ii) (Séparation) On suppose que $\|x\|_\infty = 0$. Alors $\max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|) = 0$. Ainsi, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $0 \leq |x_j| \leq \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|) = 0$, d'où $|x_j| = 0$ et donc $x_j = 0$. Par suite, $x = (0, \dots, 0) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

- iii) (**Homogénéité**) On a $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|)$ qui est un maximum bien défini donc il existe $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\|x\|_\infty = |x_{i_0}|$. Ainsi, on a, d'une part, comme $|\lambda|$ positif :

$$\|\lambda x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda x_i| \geq |\lambda x_{i_0}| = |\lambda| \cdot |x_{i_0}| = |\lambda| \|x\|_\infty;$$

et, d'autre part, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|x_i| \leq |x_{i_0}|$ donc, toujours par positivité de $|\lambda|$:

$$|\lambda x_i| = |\lambda| \cdot |x_i| \leq |\lambda| \cdot |x_{i_0}| = |\lambda| \|x\|_\infty.$$

Donc, en particulier, $|\lambda| \|x\|_\infty$ est plus grand que le maximum des $|\lambda x_i|$ i.e. $|\lambda| \|x\|_\infty \geq \|\lambda x\|_\infty$. Par suite, $\|\lambda x\|_\infty = |\lambda| \|x\|_\infty$.

- iv) (**Inégalité triangulaire**) Par définition de l'addition dans $\mathbb{R}^n$, on a $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$. Il existe $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\|x + y\|_\infty = |x_{i_0} + y_{i_0}|$. Ainsi, par inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$:

$$\|x + y\|_\infty = |x_{i_0} + y_{i_0}| \leq |x_{i_0}| + |y_{i_0}| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Il en résulte que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

★ Traisons désormais le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Pour les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{C}^n$, la démonstration est exactement la même que dans le cas de $\mathbb{R}^n$ car les propriétés de la valeur absolue qui nous ont servi (exactement ses axiomes de norme en fait !) restent valables pour le module.

Le cas de la norme deux est plus problématique : la notion de produit scalaire sur un espace vectoriel complexe existe mais sa définition doit être adaptée à ce cas pour que sa norme associée soit bien une norme comme dans le cas réel : il faut remplacer "bilinéaire" par "hermitien" dans la définition (*à vous de chercher ce que cela veut dire !*) - le nom d'espace préhilbertien est alors remplacé par espace hermitien. Avec cette définition de produit scalaire (on dit aussi produit hermitien dans ce cas), on peut généraliser au cas complexe la preuve de l'exemple 2 et conclure.

Malheureusement, les espaces hermitiens ne sont pas au programme ! On va donc ruser (et on utilisera la même ruse pour toutes les autres normes deux que nous rencontrerons dans la suite).

On note $\|\cdot\|_{2,\mathbb{C}}$ la norme deux sur $\mathbb{C}^n$ et $\|\cdot\|_{2,\mathbb{R}}$ la norme deux sur $\mathbb{R}^n$. On remarque alors que, pour $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, on a :

$$\|z\|_{2,\mathbb{C}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i|^2} = \|(|z_1|, \dots, |z_n|)\|_{2,\mathbb{R}}.$$

Soit $z = (z_1, \dots, z_n)$, $z' = (z'_1, \dots, z'_n) \in \mathbb{C}^n$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

- i) (**Positivité**) Par positivité de $\|\cdot\|_{2,\mathbb{R}}$, $\|\cdot\|_{2,\mathbb{C}}$ l'est.
- ii) (**Séparation**) On suppose que $\|z\|_{2,\mathbb{C}} = 0$. Alors $\|(|z_1|, \dots, |z_n|)\|_{2,\mathbb{R}} = 0$, d'où, par axiome de séparation pour $\|\cdot\|_{2,\mathbb{R}}$, on a, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|z_i| = 0$ et donc $z_i = 0$. Ainsi, $z = 0_{\mathbb{C}^n}$.
- iii) (**Homogénéité**) On a, par homogénéité de $\|\cdot\|_{2,\mathbb{R}}$:

$$\begin{aligned} \|\lambda z\|_{2,\mathbb{C}} &= \|(\lambda z_1, \dots, \lambda z_n)\|_{2,\mathbb{C}} \\ &= \|(|\lambda z_1|, \dots, |\lambda z_n|)\|_{2,\mathbb{R}} \\ &= \|(|\lambda| \cdot |z_1|, \dots, |\lambda| \cdot |z_n|)\|_{2,\mathbb{R}} \\ &= |\lambda| \cdot \|(|z_1|, \dots, |z_n|)\|_{2,\mathbb{R}} \\ \|\lambda z\|_{2,\mathbb{C}} &= |\lambda| \cdot \|z\|_{2,\mathbb{C}}. \end{aligned}$$

iv) (**Inégalité triangulaire**) On a, par inégalité triangulaire du module, croissance des fonctions racine carrée et carrée sur $\mathbb{R}_+$ puis par inégalité triangulaire pour la norme $\|\cdot\|_{2,\mathbb{R}}$:

$$\begin{aligned}
\|z + z'\|_{2,\mathbb{C}} &= \|(z_1 + z'_1, \dots, z_n + z'_n)\|_{2,\mathbb{C}} \\
&= \|(|z_1 + z'_1|, \dots, |z_n + z'_n|)\|_{2,\mathbb{R}} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^n \underbrace{(|z_i + z'_i|)^2}_{\leq |z_i| + |z'_i|}} \\
&\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (|z_i| + |z'_i|)^2} = \|(|z_1| + |z'_1|, \dots, |z_n| + |z'_n|)\|_{2,\mathbb{R}} \\
&\leq \|(|z_1|, \dots, |z_n|)\|_{2,\mathbb{R}} + \|(|z'_1|, \dots, |z'_n|)\|_{2,\mathbb{R}} \\
\|z + z'\|_{2,\mathbb{C}} &\leq \|z\|_{2,\mathbb{C}} + \|z'\|_{2,\mathbb{C}}
\end{aligned}$$

Par suite, $\|\cdot\|_{2,\mathbb{C}}$ est une norme sur $\mathbb{C}^n$.

□

Remarque 5.

Soit $p \geq 1$ un réel. On peut généraliser l'idée des normes un et deux : on montrera en exercice que

$$x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

est une norme sur $\mathbb{K}^n$. On l'appelle la **norme p** .

L'exercice suivant donne une explication de l'emploi de la dénomination "norme infinie" :

Exercice 4.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{K}^n$. Montrer que $\|x\|_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \|x\|_\infty$.

Correction.

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.

— Si $x = 0_{\mathbb{K}^n}$, on a $\|x\|_p = 0 \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0 = \|x\|_\infty$.

— On suppose $x \neq 0_{\mathbb{K}^n}$. Alors, par contraposée de l'axiome de séparation pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, on a $\|x\|_\infty \neq 0$.

On considère alors, pour $p \in [1, +\infty[$, le quotient :

$$\left(\frac{\|x\|_p}{\|x\|_\infty} \right)^p = \sum_{i=1}^n \left(\frac{|x_i|}{\|x\|_\infty} \right)^p.$$

On note $I = \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid |x_i| = \|x\|_\infty\}$ et $k = \#I$ (cardinal de I). La norme infinie x étant

le maximum des coordonnées de x en valeur absolue (ou module), il existe $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|x_{i_0}| = \|x\|_\infty$, d'où $k \geq 1$.

Par suite, comme, pour tout $i \notin I$, $\frac{|x_i|}{\|x\|_\infty} \in [0, 1[$, on a :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\|x\|_p}{\|x\|_\infty} \right)^p &= \sum_{i \in I} \underbrace{\left(\frac{|x_i|}{\|x\|_\infty} \right)^p}_{=1} + \sum_{i \notin I} \underbrace{\left(\frac{|x_i|}{\|x\|_\infty} \right)^p}_{\xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0} \\ \left(\frac{\|x\|_p}{\|x\|_\infty} \right)^p &\underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} k. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient, k étant strictement positif, :

$$\frac{\|x\|_p}{\|x\|_\infty} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} k^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 1.$$

Il en résulte que, dans tous les cas, $\|x\|_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \|x\|_\infty$.

b. Exemples de normes sur des espaces de suites

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites indexées par $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On définit les normes suivantes sur certains de ses sous-espaces :

Définition 5.

- On note $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ l'ensemble des suites $u = (u_n)$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum u_n$ est absolument convergente. On définit la **norme un**, notée $\|\cdot\|_1$ sur $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ par :

$$\text{Pour } u = (u_n) \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K}), \quad \|u\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|.$$

- On note $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ l'ensemble des suites $u = (u_n)$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum u_n^2$ est absolument convergente. On définit la **norme deux**, notée $\|\cdot\|_2$ sur $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ par :

$$\text{Pour } u = (u_n) \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K}), \quad \|u\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2}.$$

- On note $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ l'ensemble des suites *bornées* de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On définit la **norme infinie**, notée $\|\cdot\|_\infty$ sur $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ par :

$$\text{Pour } u = (u_n) \in \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K}), \quad \|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} (|u_n|).$$

Proposition 5.

Les couples $(\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K}), \|\cdot\|_1)$, $(\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K}), \|\cdot\|_2)$, $(\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ sont des espaces vectoriels normés et on a :

$$\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \subset \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \subset \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K}).$$

Démonstration.

- Montrons tout d'abord que $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ et $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ sont des espaces vectoriels et qu'on a bien les inclusions proposées. On donne rapidement les ingrédients de la preuve, la rédaction détaillée est laissée au lecteur !

Il est clair que la suite constante en 0 appartient à ces trois ensembles. Ensuite, on utilise le fait qu'une série dont le terme général est la somme des termes généraux de deux séries absolument convergentes est absolument convergente et que $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ pour montrer que $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ et $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^\mathbb{N}$. Enfin, pour $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, on utilise l'inégalité triangulaire et la sous-additivité du sup.

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. Alors u_n est le terme général d'une série absolument convergente donc u converge vers 0 quand $n \rightarrow \infty$. Par suite, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $|u_n| \leq 1$.

On note $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $v_n = u_{n+n_0}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Les séries de termes généraux u_n et v_n sont de même nature donc $\sum v_n$ est absolument convergente. De plus, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \leq 1$, on a $v_n^2 \leq |v_n|$; par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum v_n^2$ est (absolument) convergente.

Or $\sum v_n^2$ et $\sum u_n^2$ sont de même nature donc u appartient à $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. Il en résulte que $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \subset \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$.

Ensuite, si $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ alors $(u_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 et donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aussi. Par suite, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et donc u appartient à $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K})$.

On obtient au final les inclusions suivantes :

$$\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \subset \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \subset \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K}).$$

- N'oublions pas que la première chose à faire avant de se lancer dans l'étude des axiomes de norme pour une fonction, est de montrer que celle-ci est bien définie ! En effet, si on "essayait" $\|\cdot\|_1$ sur $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, on pourrait vérifier que les axiomes de norme sont bien satisfaits mais qu'en fait, la fonction est "très mal" définie : $\|\cdot\|_1$ n'est pas définie en la suite constante en 1 par exemple.

- $\|\cdot\|_1$: Montrons que la fonction $\|\cdot\|_1$ est bien définie sur $\ell^1 = \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1$. Alors $\sum u_n$ est une série numérique absolument convergente i.e. la série $\sum |u_n|$ converge donc la quantité $\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ est bien définie.

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}, v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- (Positivité) La somme d'une série à termes positifs convergente est positive (car la limite d'une suite convergente à valeurs positives est positive ←-- exercice) donc

$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{|u_n|}_{\geq 0} \geq 0.$$

- (Séparation) On suppose que $\|u\|_1 = 0$. Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| = 0$. Comme $\sum |u_n|$ est une série à termes positifs, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de ses sommes partielles est croissante

et ainsi, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq |u_n| \leq S_n \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} S_k = \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k| = 0$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$. Par suite, $u = (0)_{n \in \mathbb{N}} = 0_{\ell^1}$.

iii) (**Homogénéité**) On a, par linéarité de l'application $w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$:

$$\|\lambda u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{|\lambda u_n|}_{=|\lambda| \cdot |u_n|} = |\lambda| \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| = |\lambda| \cdot \|u\|_1.$$

iv) (**Inégalité triangulaire**) Par définition de l'addition dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on a $u + v = (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et ainsi, par inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$ et par croissance et linéarité de l'application $w = (w_n) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$:

$$\|u + v\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{|u_n + v_n|}_{\leq |u_n| + |v_n|} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| + \sum_{n=0}^{+\infty} |v_n| = \|u\|_1 + \|v\|_1.$$

Il en résulte que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur ℓ^1 .

- $\|\cdot\|_2$: Tritons le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On note $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ et on considère l'application $(\cdot|\cdot)$ de $\ell^2 \times \ell^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(u|v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$. Celle-ci est un produit scalaire sur ℓ^2 (nous allons le montrer ci-après) et on remarque que $\|\cdot\|_2$ est la norme associée à ce produit scalaire. Ainsi, d'après l'exemple 2, $\|\cdot\|_2$ est une norme sur ℓ^2 . Montrons que $(\cdot|\cdot)$ est bien un produit scalaire sur ℓ^2 i.e. une forme bilinéaire symétrique définie positive sur ℓ^2 .

Encore une fois, il s'agit premièrement de montrer que $(\cdot|\cdot)$ est bien définie de $\ell^2 \times \ell^2$ dans $\mathbb{R}$: pour $u, v \in \ell^2$, comme pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $2|ab| \leq a^2 + b^2$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n v_n| \leq \frac{u_n^2 + v_n^2}{2}.$$

Or, par hypothèse, u_n^2 et v_n^2 sont des termes généraux de séries convergentes d'où $\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}$ l'est aussi et ainsi, par comparaison $\sum |u_n v_n|$ converge.

Par suite, la série numérique $\sum u_n v_n$ est absolument convergente et donc convergente. Il en résulte que la quantité $(u|v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ est bien définie.

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}, v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}, w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

i) (**Symétrie**) Par commutativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$, on a :

$$(v|u) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n = (u|v).$$

ii) (**Bilinéarité**) Comme $(\cdot|\cdot)$ est symétrique, il suffit de montrer la linéarité par rapport à la première variable. Par linéarité de l'application $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} s_n$, on a :

$$(\lambda u + v|w) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{(\lambda u_n + v_n)w_n}_{=\lambda u_n w_n + v_n w_n} = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n w_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n w_n = \lambda(u|w) + (v|w).$$

iii) (Définie positivité) On a, d'une part

$$(u|u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{u_n^2}_{\geq 0} \geq 0$$

et d'autre part, si $(u|u) = 0$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq u_k^2 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 = (u|u) = 0,$$

donc $u_k = 0$. Par suite, $u = (0)_{n \in \mathbb{N}} = 0_{\ell^2}$.

Ceci montre que $(\cdot|\cdot)$ est bien un produit scalaire sur ℓ^2 .

Maintenant, pour le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, en utilisant un ruse similaire à celle de la fin de la démonstration de la proposition 4 (on exprime la norme deux sur $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ avec la norme deux sur $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$), on prouve que la norme deux est bien une norme sur $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

- $\|\cdot\|_\infty$: Montrons que la fonction $\|\cdot\|_\infty$ est bien définie sur $\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$. Comme u est bornée, l'ensemble $U = \{|u_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ (en effet, $|u_0| \in U$ et on utilise le caractère borné de u pour montrer que U est majoré) donc U possède une borne supérieure. Ainsi, la quantité $\|u\|_\infty = \sup U$ est bien définie.

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}, v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $U = \{|u_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$, $V = \{|v_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$, $W = \{|\lambda u_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $X = \{|u_n + v_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$.

- i) (Positivité) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \geq 0$, donc en particulier, $\sup U$ étant un majorant de U :

$$\|u\|_\infty = \sup U \geq |u_0| \geq 0.$$

- ii) (Séparation) On suppose que $\|u\|_\infty = 0$. Alors $\sup U = 0$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup U$ étant un majorant de U :

$$0 \leq |u_n| \leq \sup U = 0.$$

Par suite, $u = (0)_{n \in \mathbb{N}} = 0_{\ell^\infty}$.

- iii) (Homogénéité) Comme $|\lambda|$ est positif, $\sup U$ étant le plus petit des majorants de U , $|\lambda| \sup U$ est le plus petit des majorants de $\{|\lambda| \cdot |u_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\lambda| \cdot |u_n| = |\lambda u_n|$ donc $\{|\lambda| \cdot |u_n| \mid n \in \mathbb{N}\} = W$. Par suite :

$$\|\lambda u\|_\infty = \sup W = |\lambda| \sup U = |\lambda| \cdot \|u\|_\infty$$

- iv) (Inégalité triangulaire) Par définition de l'addition dans $\mathbb{K}^\mathbb{N}$, on a $u + v = (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$:

$$|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n| \leq \|u\|_\infty + \|v\|_\infty.$$

Ainsi, $\|u\|_\infty + \|v\|_\infty$ est un majorant de X ; or $\|u + v\|_\infty = \sup X$ étant le plus petit des majorants de X , on obtient :

$$\|u + v\|_\infty \leq \|u\|_\infty + \|v\|_\infty.$$

Il en résulte que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur ℓ^∞ .

□

c. Exemples de normes sur des espaces de fonctions

Soit X un ensemble non vide. On considère l'ensemble $\mathcal{F}_b(X, \mathbb{K})$ (egalement noté $\ell^\infty(X, \mathbb{K})$) des fonctions bornées de X à valeurs dans $\mathbb{K}$. C'est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$: $\mathcal{F}_b(X, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$, l'ensemble de toutes les fonctions de X dans $\mathbb{K}$.

Voici la norme naturelle sur $\mathcal{F}_b(X, \mathbb{K})$:

Définition 6. *Norme sur l'espace des fonctions bornées*

Soit $f \in \mathcal{F}_b(X, \mathbb{K})$. On appelle **norme infinie** de f , et on note $\|\cdot\|_\infty$ la quantité :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Proposition 6.

La norme infinie de $\mathcal{F}_b(X, \mathbb{K})$ est bien définie et c'est une norme sur $\mathcal{F}_b(X, \mathbb{K})$.

Démonstration.

L'ensemble X est non vide et f est bornée, donc l'ensemble $F = \{|f(x)| \mid x \in X\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Elle possède donc une borne supérieure. Par suite, $\|f\|_\infty$ est bien définie et égale à cette borne supérieure.

Soit $f, g \in \mathcal{F}_b(X, \mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- (Positivité) Comme X est non vide, il existe $x_0 \in X$. Alors on a $\|f\|_\infty \geq |f(x_0)| \geq 0$.
- (Séparation) : Si $\|f\|_\infty = 0$, alors, pour tout $x \in X$, $0 \leq |f(x)| \leq \|f\|_\infty = 0$ donc f est la fonction nulle sur X .
- (Homogénéité) : On considère l'ensemble $G = \{|\lambda f(x)| \mid x \in X\}$. Alors $\|\lambda f\|_\infty = \sup G$. Montrons l'égalité demandée en utilisant la caractérisation séquentielle de la borne supérieure i.e. $a = \sup A$ si, et seulement si, a est un majorant de A et il existe une suite (a_n) à valeurs dans A telle que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$.

Pour tout $u \in F$, il existe $x \in X$ tel que $u = |f(x)| = |\lambda| |f(x)|$; et ainsi,

$$u = |\lambda| \cdot |f(x)| \leq |\lambda| \cdot \|f\|_\infty.$$

Par suite, $|\lambda| \cdot \|f\|_\infty$ est un majorant de G .

De plus, comme $\|f\|_\infty = \sup F$, d'après la caractérisation séquentielle de la borne supérieure de F , il existe une suite (u_n) à valeurs dans F (avec $u_n = |f(x_n)|$ où $x_n \in X$) telle que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|f\|_\infty$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\lambda| u_n = |\lambda| \cdot |f(x_n)| = |\lambda f(x_n)| \in G$ et $|\lambda| u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$.

Il en résulte, par caractérisation séquentielle de la borne supérieure de G que :

$$|\lambda| \cdot \|f\|_\infty = \sup G = \|\lambda f\|_\infty.$$

- (Inégalité triangulaire) : On a, pour tout $x \in X$, par inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$,

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Ainsi, $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ est un majorant de l'ensemble $\{|f(x) + g(x)| \mid x \in X\}$ dont la borne supérieure est $\|f + g\|_\infty$ qui est le plus petit de ses majorants. Par suite :

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

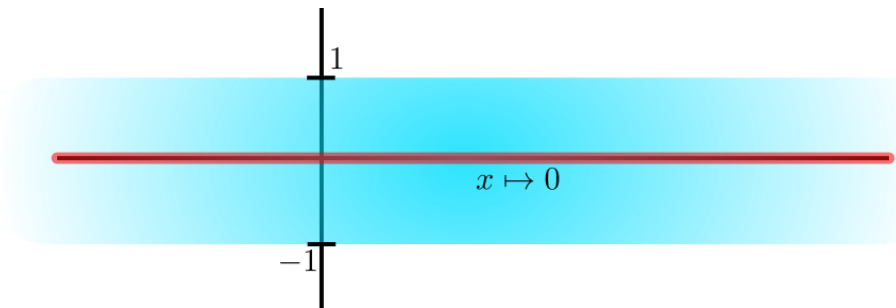
□

L'exercice suivant propose une interprétation graphique très utile pour tester l'appartenance d'une fonction à la boule unité fermée de la norme infinie sur un espace de fonctions bornées.

Exercice 5.

On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{F}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ muni de sa norme canonique i.e. la norme $\|\cdot\|_\infty$.

1. Soit $f \in E$. Montrer que $f \in B_f(0_E, 1)$ si, et seulement si, le graphe de f appartient à la bande bleue de la figure ci-dessous (les droites d'équations $y = \pm 1$ sont considérées comme incluses dans cette zone)



2. (a) Montrer que les fonctions $\sin$, $\cos$ et $\frac{2}{\pi} \arctan$ appartiennent à la sphère unité de $\mathcal{F}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
 (b) L'appartenance à la boule unité ouverte est-elle équivalente à l'appartenance du graphe à la zone bleue privée des droites $y = \pm 1$?

Correction.

1. Soit $f \in E$ et $\mathcal{G}_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ le graphe de f . La zone bleue représente l'ensemble $\mathbb{R} \times [-1, 1]$.

On a :

$$\begin{aligned} f \in B_f(0_E, 1) &\Leftrightarrow \|f\|_\infty \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq f(x) \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (x, f(x)) \in \mathbb{R} \times [-1, 1] \\ f \in B_f(0_E, 1) &\Leftrightarrow \mathcal{G}_f \subset \mathbb{R} \times [-1, 1] \end{aligned}$$

2. (a) On a $\|\sin\|_\infty = 1 = \|\cos\|_\infty$ car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \sin(x) \leq 1$; $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, et $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1 = \cos(0)$.
 On a, par définition de $\arctan$ (bijection réciproque de la restriction de $\tan$ à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$), pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \arctan(x) \leq \frac{\pi}{2}$. De plus, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$. Par

suite, on a :

$$\left\| \frac{2}{\pi} \arctan \right\|_{\infty} = \frac{2}{\pi} \underbrace{\|\arctan\|_{\infty}}_{=\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Il en résulte que $\sin$, $\cos$ et $\frac{2}{\pi} \arctan$ appartiennent à la sphère unité de $\mathcal{F}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- (b) La réponse est non comme le montre la question précédente : le graphe de la fonction $\frac{2}{\pi} \arctan$ est inclus dans la zone bleue privée des droites $y = \pm 1$ mais sa norme valant 1, la fonction n'appartient pas à la boule unité ouverte !

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. On considère l'espace vectoriel $C([a, b], \mathbb{K})$ des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$. On définit trois normes usuelles sur cet espace par analogie du cas de $\mathbb{K}^n$:

Définition 7. *Normes sur $C([a, b], \mathbb{K})$*

Soit $f \in C([a, b], \mathbb{K})$. On définit les **normes de la convergence : en moyenne, en moyenne quadratique et uniforme** respectivement notées $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_{\infty}$, par :

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}$$

$$\text{et } \|f\|_{\infty} = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|.$$

Proposition 7.

Les normes de la convergence en moyenne, en moyenne quadratique et uniforme sont bien des normes sur $C([a, b], \mathbb{K})$.

Démonstration.

— $\|\cdot\|_1$. Soit $f, g \in E = C([a, b], \mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

La norme de f est bien définie car $|f|$ est continue sur le **segment** $[a, b]$ et donc intégrable sur $[a, b]$.

- i) **Positivité.** L'intégrale d'une fonction positive est positive donc $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt \geq 0$.
- ii) **Séparation.** Si $\|f\|_1 = 0$, alors $\int_a^b |f(t)| dt = 0$, or une fonction **continue, positive**, d'intégrale nulle est nulle, d'où $f = 0_E$.
- iii) **Homogénéité.** Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\|\lambda f\|_1 = \int_a^b \underbrace{|\lambda f(t)|}_{=|\lambda| \cdot |f(t)|} dt = |\lambda| \int_a^b |f(t)| dt = |\lambda| \cdot \|f\|_1.$$

iv) **Inégalité triangulaire.** Par croissance et linéarité de l'intégrale, on a :

$$\|f + g\|_1 = \int_a^b \underbrace{|f(t) + g(t)|}_{\leq |f(t)| + |g(t)|} dt \leq \int_a^b |f(t)| dt + \int_a^b |g(t)| dt = \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

Il en résulte que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur E .

- $\|\cdot\|_2$: Dans le cas réel, il suffit de remarquer que la norme de la convergence en moyenne quadratique est la norme associée au produit scalaire canonique

$$(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

sur $C([a, b], \mathbb{R})$.

Pour le cas complexe, on adapte de nouveau la "ruse" de la fin de la démonstration de la proposition 4 pour montrer que $\|\cdot\|_2$ est une norme sur $C([a, b], \mathbb{C})$.

- $\|\cdot\|_\infty$: Tout d'abord, la norme infinie d'une fonction f de $C([a, b], \mathbb{K})$ est bien définie, car, d'après le théorème des bornes atteintes, toute fonction continue sur un **segment** est bornée (et atteint ses bornes) ; d'où l'existence de $\|f\|_\infty$ car $|f|$ est continue sur le segment $[a, b]$.

Ensuite, pour montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est bien d'une norme, il suffit de reproduire la même démonstration faite pour la norme infinie sur $\mathcal{F}_b(X, \mathbb{K})$.

□

Remarque 6.

On verra dans la suite du chapitre, que la norme infinie sur $C([a, b], \mathbb{K})$ peut-être obtenue comme norme *induite* par la norme infinie sur $\mathcal{F}_b([a, b], \mathbb{K})$ via l'inclusion $C([a, b], \mathbb{K}) \subset \mathcal{F}_b([a, b], \mathbb{K})$.

Question 1.

La norme un de $C([a, b], \mathbb{K})$ est également définie sur $C_{pm}([a, b], \mathbb{K})$. S'agit-il encore d'une norme sur ce "sur"-espace ?

Réponse.

Non ! La démonstration de tous les axiomes se passent de la même façon que sur $C([a, b], \mathbb{K})$ sauf... pour la séparation ! En effet, on peut remarquer par exemple que la fonction f définie sur $[a, b]$ par $f(a) = 1$ et $f(t) = 0$ si $t \neq a$ vérifie $\|f\|_1 = 0$ et est non nulle !

Quand seule, parmi les axiomes de norme, la séparation n'est pas demandée, on parle de *semi-norme*. Sur $C_{pm}([a, b], \mathbb{K})$, $\|\cdot\|_1$ est une semi-norme mais pas une norme.

Exercice 6.

On note E l'ensemble des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans lui-même. Montrer que l'application $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\|f\| = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(t)|}{1+t^2} dt$$

est une norme sur E .

Démonstration.

Soit $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Commençons par montrer que $\|\cdot\|$ est bien définie.

La fonction $g : t \mapsto \frac{|f(t)|}{1+t^2}$ est continue, positive sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$g(t) = \frac{|f(t)|}{1+t^2} \leq \frac{\|f\|_{\infty}}{1+t^2}.$$

L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$ converge car $\arctan$, qui est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$, admet

des limites finies en $\pm\infty$. Par suite, par comparaison, $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt$ converge.

Il en résulte que $\|\cdot\|$ est bien définie sur E .

Montrons que est $\|\cdot\|$ une norme sur E .

i) **Positivité.** L'intégrale d'une fonction positive est positive donc

$$\|f\| = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{|f(t)|}{1+t^2}}_{\geq 0} dt \geq 0.$$

ii) **Séparation.** Si $\|f\| = 0$, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(t)|}{1+t^2} dt = 0$; or une fonction continue, positive, d'intégrale nulle est nulle, donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\frac{|f(t)|}{1+t^2} = 0$; par suite, f est la fonction nulle.

iii) **Homogénéité.** Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\|\lambda f\| = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\lambda f(t)|}{1+t^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda| \frac{|f(t)|}{1+t^2} dt = |\lambda| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(t)|}{1+t^2} dt = |\lambda| \cdot \|f\|.$$

iv) **Inégalité triangulaire.** Par croissance et linéarité de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned} \|f+g\| &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(t)+g(t)|}{1+t^2} dt \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(t)|}{1+t^2} + \frac{|g(t)|}{1+t^2} dt \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(t)|}{1+t^2} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|g(t)|}{1+t^2} dt \\ \|f+g\| &\leq \|f\| + \|g\|. \end{aligned}$$

Il en résulte que $\| \cdot \|$ est une norme sur E . □

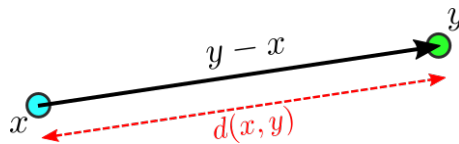
3. Distance associée à une norme

La norme d'un espace vectoriel normé E est une manière d'associer une *longueur* à chaque vecteur de E . Du point de vue *affine* i.e. si on se place dans un espace affine dirigé par E , une manière de mesurer la distance entre deux points M et N devient alors clair : il suffit de regarder la longueur - la norme - du vecteur $\overrightarrow{MN}$ qui "sépare" ces deux points.

Définition 8. Distance associée à une norme

Soit N une norme sur E . On appelle **distance associée à N** l'application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\text{pour } (x, y) \in E^2, \quad d(x, y) = N(y - x).$$



Remarque 7.

Soit N une norme sur E . La distance d associée à N vérifie les propriétés suivantes, pour tous $x, y, z \in E$:

- i) (Symétrie) $d(x, y) = d(y, x)$
- ii) (Séparation) $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$.
- iii) (Inégalité triangulaire) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Pour un ensemble quelconque X , une application $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui vérifie ces trois axiomes est appelé une *distance* sur X .

Nous ne nous attarderons pas sur ce concept mais dans la suite, nous utiliserons librement ces propriétés dans l'étude des distances associées aux normes.

Proposition 8. Seconde inégalité triangulaire

Soit N une norme sur E . La distance d associée à N vérifie, pour tous $x, y, z \in E$:

$$|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

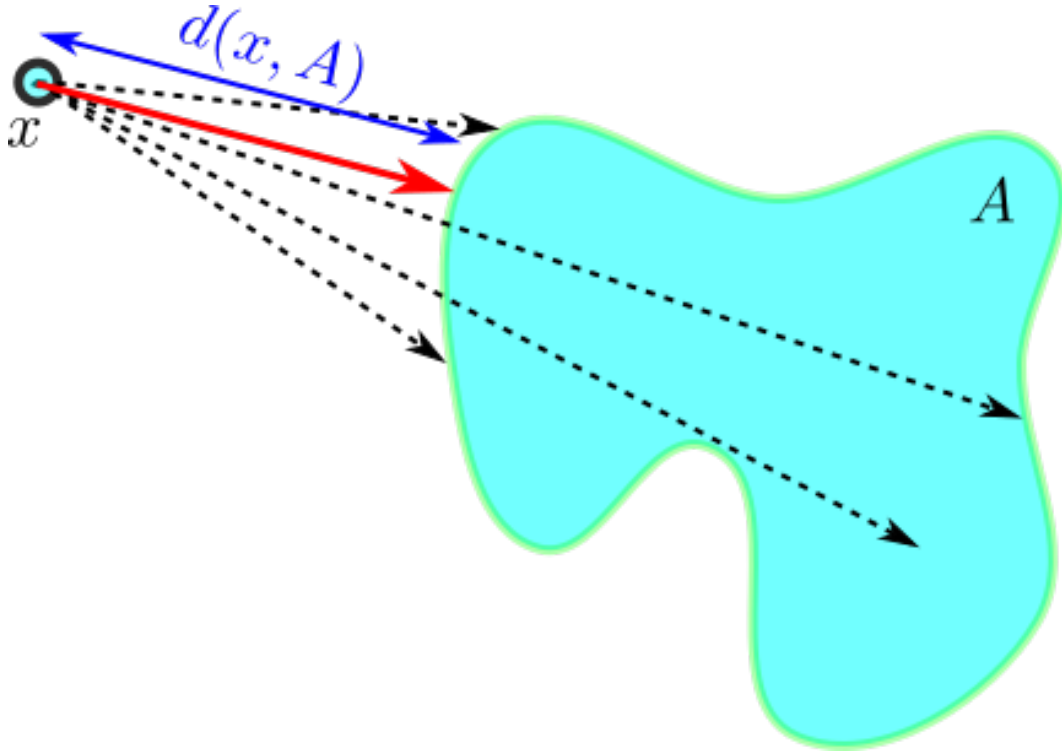
Démonstration.

Il suffit d'appliquer la définition de distance associée à une norme et d'utiliser la seconde inégalité triangulaire pour les normes. (On peut aussi vérifier que pour la notion de distance "générale" au sens de la remarque précédente, cette inégalité est encore valable.) □

Définition 9. Distance à une partie

Soit N une norme sur E , d sa distance associée, A une partie non vide de E et $x \in E$. On appelle **distance de x à A** et on note $d(x, A)$, la quantité :

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}.$$



On peut également définir la distance entre deux parties de E :

Définition 10. Distance entre deux parties

Soit N une norme sur E , d sa distance associée et A, B des parties non vides de E . On appelle **distance de A à B** et on note $d(A, B)$, la quantité :

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) \mid (a, b) \in A \times B\}.$$

Exemple 4.

On considère l'espace $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ muni de sa norme canonique. On a, pour $\mathbf{1} = (1)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K})$:

$$d(\mathbf{1}, \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})) = 1.$$

Tout d'abord, d'après la proposition 5, on a bien $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \subset \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K})$.

— Comme la suite nulle $\mathbf{0} = (0)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, on a :

$$d(\mathbf{1}, \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})) \leq d(\mathbf{1}, \mathbf{0}) = \|\mathbf{0} - \mathbf{1}\|_\infty = \|\mathbf{1}\|_\infty = 1.$$

— Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. Alors $\sum u_n$ converge, et ainsi u converge vers 0. Par suite, on a, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$d(\mathbf{1}, u) = \|\mathbf{1} - u\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |u_k - 1| \geq |u_n - 1| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

d'où, d'après le théorème des gendarmes, $d(\mathbf{1}, u) \geq 1$.

Ceci étant vrai pour tout $u \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, on obtient $d(\mathbf{1}, \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})) \geq 1$ car la borne inférieure est le plus grand des minorants.

Il en résulte que :

$$d(\mathbf{1}, \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})) = 1.$$

Exercice 7.

Soit d la distance associée à une norme sur E et A une partie non vide de E . Montrer que, pour tous $x, y \in E$, on a :

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$

Correction.

Soit $a \in A$. On a, par définition de $d(x, A)$ et par inégalité triangulaire :

$$d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a).$$

Par suite, $d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, a)$. Cette dernière inégalité est vraie pour tout $a \in A$.

Exercice 8.

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, calculer la distance entre $(-1, 1)$ et la droite D d'équation $y = 2x$ pour les normes un, deux et infinie de $\mathbb{R}^2$. Représenter graphiquement chacune des situations.

Correction.

On note d_1 la distance associée à $\|\cdot\|_1$, d_2 la distance associée à $\|\cdot\|_2$, d_∞ la distance associée à $\|\cdot\|_\infty$ et $u = (-1, 1)$.

La droite D est le sous-ensemble $D = \{(a, 2a) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Pour $(a, 2a) \in D$ avec $a \in \mathbb{R}$, on a :

$$d_i(u, (a, 2a)) = \|(a + 1, 2a - 1)\|_i \text{ pour } i = 1, 2 \text{ ou } \infty.$$

1. On a :

$$d_1(u, (a, 2a)) = |a + 1| + |2a - 1| = \begin{cases} -(a + 1) - (2a - 1) = -3a & \text{pour } a \leq -1 \\ (a + 1) - (2a - 1) = -a + 2 & \text{pour } -1 \leq a \leq \frac{1}{2} \\ (a + 1) + (2a - 1) = 3a & \text{pour } a \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

On étudie $a \mapsto d_1(u, (a, 2a))$ sur chacun des trois intervalles ci-dessus pour obtenir le minimum de cette fonction sur $\mathbb{R}$ qui est égal à $\frac{3}{2}$ (atteint pour $a = \frac{1}{2}$). Par suite,

$$d_1(u, D) = \inf_{(a, 2a) \in D} d_1(u, (a, 2a)) = \inf_{a \in \mathbb{R}} d_1(u, (a, 2a)) = \frac{3}{2} \left(= d_1(u, (\frac{1}{2}, 1)) \right).$$

2. On a, pour $a \in \mathbb{R}$:

$$d_2(u, (a, 2a)) = \sqrt{(a+1)^2 + (2a-1)^2} = \sqrt{5a^2 - 2a + 2},$$

or $5a^2 - 2a + 2$ est de discriminant strictement négatif, donc $5a^2 - 2a + 2 > 0$ (car $5 > 0$) et le minimum de $a \mapsto 5a^2 - 2a + 2$ est atteint pour $a = \frac{2}{2 \times 5} = \frac{1}{5}$ et vaut $\frac{9}{5}$. De plus, la fonction $\sqrt{}$ est croissante, donc le minimum de la fonction $a \mapsto \sqrt{5a^2 - 2a + 2}$ est égal à $\sqrt{\frac{9}{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$. Par suite,

$$d_2(u, D) = \inf_{a \in \mathbb{R}} d_2(u, (a, 2a)) = \frac{3\sqrt{5}}{5} \left(= d_2(u, (\frac{1}{5}, \frac{2}{5})) \right).$$

Remarque : Comme la norme 2 est la norme associée au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$ et D est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, la distance de u à D aurait pu être calculée en déterminant la distance de u avec son projeté orthogonal sur D (qui est bien $(\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$).

∞. On a, pour $a \in \mathbb{R}$, $d_\infty(u, (a, 2a)) = \max(|a+1|, |2a-1|)$, et on a :

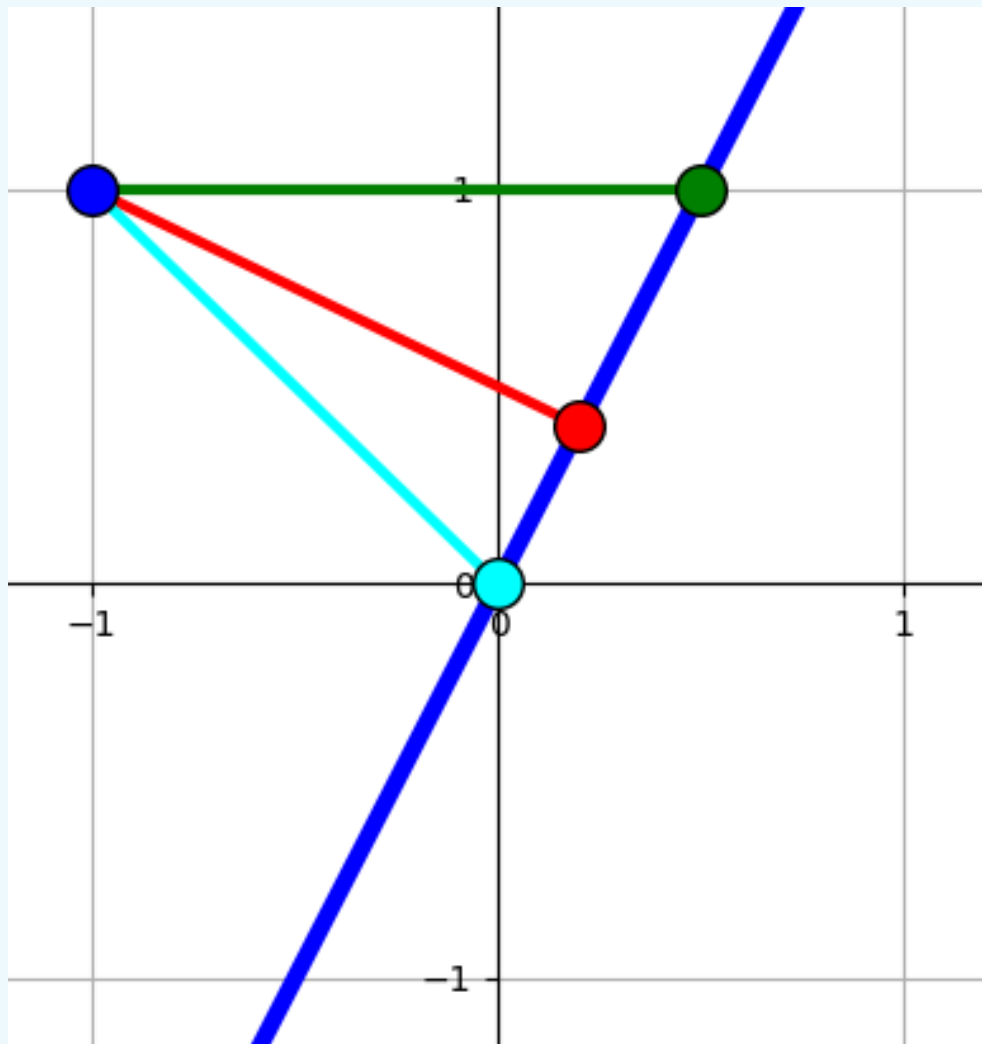
$$|2a-1| - |a+1| = \begin{cases} -(2a-1) + (a+1) = -a+2 & \text{pour } a \leq -1 \\ -(2a-1) - (a+1) = -3a & \text{pour } -1 \leq a \leq \frac{1}{2} \\ (2a-1) - (a+1) = a-2 & \text{pour } a \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

donc $|2a-1| \leq |a+1|$ si, et seulement si, $a \in [0, 2]$. Par suite,

$$d_\infty(u, (a, 2a)) = \begin{cases} -2a+1 & \text{pour } a \leq 0 \\ a+1 & \text{pour } 0 \leq a \leq 2 \\ 2a-1 & \text{pour } a \geq 2. \end{cases}$$

On étudie $a \mapsto d_\infty(u, (a, 2a))$ sur chacun des trois intervalles ci-dessus pour obtenir le minimum de cette fonction sur $\mathbb{R}$ qui est égal à 1 (atteint pour $a = 0$). Par suite,

$$d_\infty(u, D) = \inf_{a \in \mathbb{R}} d_\infty(u, (a, 2a)) = 1 (= d_\infty(u, (0, 0))).$$



4. Boules et sphères associées à une distance

On généralise dans ce paragraphe la notion de cercle/sphère, disque/boule bien connue dans les espaces euclidiens de dimension 2 et 3 qui nous apparaissent naturels. Comme pour la sphère et la boule unité d'une norme, la forme des sphères et boules que nous allons considérer peut être tout-à-fait contre-intuitive vis-à-vis de la terminologie et de nos habitudes.

Notation 2. Boules et sphères

Soit N une norme sur E , d sa norme associée, $x_0 \in E$ et r un réel strictement positif. On note :

- $S(x_0, r) = \{x \in E \mid d(x, x_0) = r\}$; on appelle cet ensemble **sphère** de centre x_0 et de rayon r ;
- $B_f(x_0, r) = \{x \in E \mid d(x, x_0) \leq r\}$; on appelle cet ensemble **boule fermée** de centre x_0 et de rayon r ;

- $B(x_0, r) = \{x \in E \mid d(x, x_0) < r\}$; on appelle cet ensemble **boule ouverte** de centre x_0 et de rayon r ;

Remarque 8.

On peut remarquer que $S(x_0, r) = B_f(x_0, r) \setminus B(x_0, r)$.

Proposition 9.

Soit N une norme sur E . Toute boule (ouverte ou fermée) est une partie convexe de E .

Démonstration.

Soit $x_0 \in E$ et $r > 0$. Soit $x, y \in B(x_0, r)$ et $t \in [0, 1]$. Alors on a, en remarquant que $x_0 = tx_0 + (1-t)x_0$:

$$\begin{aligned} d(x_0, tx + (1-t)y) &= N((tx + (1-t)y) - x_0) \\ &= N(t(x - x_0) + (1-t)(y - x_0)) \\ &\leq N(t(x - x_0)) + N((1-t)(y - x_0)) \quad (\text{inégalité triangulaire}) \\ &\leq tN(x - x_0) + (1-t)N(y - x_0) \quad (\text{homogénéité}) \\ &< tr + (1-t)r = r \quad (x, y \in B(x_0, r)) \end{aligned}$$

Donc $tx + (1-t)y$ appartient à $B(x_0, r)$. Par suite, $B(x_0, r)$ est une partie convexe de E .

Il en est de même pour $B_f(x_0, r)$: il suffit de remplacer l'inégalité stricte par une inégalité large dans la dernière ligne du raisonnement précédent. $\square$

Exemple 5.

- Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, pour $x \in \mathbb{R}$ et $r > 0$, on a :

$$B_f(x, r) = [x - r, x + r]; \quad B(x, r) =]x - r, x + r[; \quad S(x, r) = \{x - r, x + r\}.$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$, pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$, on a :

$$B_f(x, r) = [x_1 - r, x_1 + r] \times \dots \times [x_n - r, x_n + r]; \quad B(x, r) =]x_1 - r, x_1 + r[\times \dots \times]x_n - r, x_n + r[.$$

En particulier, pour $x = 0_{\mathbb{R}^n}$:

$$B_f(0_{\mathbb{R}^n}, r) = [-r, r]^n; \quad B(0_{\mathbb{R}^n}, r) =]-r, r[^n.$$

- On a $B_f(x, r) = \{y \in \mathbb{R} \mid |y - x| \leq r\} = \{y \in \mathbb{R} \mid x - r \leq y \leq x + r\} = [x - r, x + r]$; de manière analogue, $B(x, r) =]x - r, x + r[$ et $S(x, r) = \{x - r, x + r\}$.

- On traite le cas de la boule fermée. On a, pour $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$:
- $y \in B_f(x, r)$
 - si, et seulement si,
 - $\|y - x\|_\infty = d(x, y) \leq r$
 - si, et seulement si,
 - $\max(|y_1 - x_1|, \dots, |y_n - x_n|) \leq r$
 - si, et seulement si,
 - pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|y_i - x_i| \leq r$
 - si, et seulement si,
 - pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $y_i \in [x_i - r, x_i + r]$
 - si, et seulement si,
 - $y \in [x_1 - r, x_1 + r] \times \dots \times [x_n - r, x_n + r]$.

5. Parties bornées, applications bornées

a. Parties bornées

Définition 11. *Partie bornée*

Soit N une norme sur E et A une partie de E . On dit que A est **bornée dans** $(E, \|\cdot\|)$ s'il existe un réel positif R tel que :

$$\text{pour tout } x \in A, \quad N(x) \leq R.$$

Proposition 10.

Soit N une norme sur E , d sa distance associée et A une partie de E . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) A est bornée dans $(E, \|\cdot\|)$;
- ii) il existe un réel $R \geq 0$ tel que $A \subset B_f(0_E, R)$;
- iii) il existe $x_0 \in E$ et un réel $R \geq 0$ tels que $A \subset B_f(x_0, R)$;
- iv) il existe un réel $R \geq 0$ tel que, pour tous $x, y \in A$, $d(x, y) \leq R$.

Correction.

Schéma de la preuve : i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ iv) $\Rightarrow$ i)

- i) $\Rightarrow$ ii) : On suppose A bornée. Alors il existe $R \geq 0$ tel que pour tout $x \in A$, $N(x) \leq R$, d'où $d(x, 0_E) \leq R$ et donc $x \in B_f(0_E, R)$. Par suite, $A \subset B_f(0_E, R)$.
- ii) $\Rightarrow$ iii) : Il suffit de prendre $x_0 = 0_E$.
- iii) $\Rightarrow$ iv) : On suppose iii). Soit $x, y \in A$. Alors x, y appartiennent à $B_f(x_0, R)$ et on a :

$$d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y) \leq 2R.$$

- iv) $\Rightarrow$ i) : On suppose iv). Si A est vide, la propriété est vérifiée. Supposons A non vide. On fixe x_0 dans A . Soit $x \in A$. Alors

$$N(x) = d(x, 0_E) \leq d(x, x_0) + d(x_0, 0_E) = R + N(x_0).$$

Par suite, A est bornée.

Remarque 9.

Attention, la notion de partie bornée dépend bien-sûr de la norme utilisée ! Une partie bornée pour une certaine norme peut ne pas l'être pour une autre. Nous en verrons un exemple dans la partie consacrée à la comparaison des normes.

S'il n'y pas d'ambiguïté sur la norme utilisée, on pourra dire qu'une partie est "bornée dans E " ou même "bornée" tout court.

Exemple 6.

- Une boule ouverte ou fermée est bornée.
- Un sous-espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$ n'est pas borné dans E .
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales est borné et, si $n \geq 2$, l'ensemble $SL_n(\mathbb{R})$ des matrices de déterminant 1 n'est pas borné dans $M_n(\mathbb{R})$ muni de la norme associée à son produit scalaire canonique.

- Si B est une boule ouverte ou fermée de centre x_0 et de rayon $r \in \mathbb{R}_+$, on a $B \subset B_f(x_0, r)$, donc, d'après la caractérisation des parties bornées (Proposition 10, ii), B est bornée.
- Soit F un sous-espace vectoriel de E non réduit à $\{0_E\}$. Alors il existe $x \in F \setminus \{0_E\}$ et donc, comme F est un sous-espace vectoriel, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda x \in F$. Ainsi, on a, pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\lambda x \in F$ et :

$$\|\lambda x\| = \lambda \cdot \underbrace{\|x\|}_{\neq 0} \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} +\infty,$$

d'où F n'est pas borné dans E .

- La norme associée au produit scalaire canonique de $M_n(\mathbb{R})$ est donnée par $\|\cdot\| : M \mapsto \sqrt{\text{Tr}({}^tMM)}$.

On rappelle que $O_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tMM = I_n\}$. Pour tout $M \in O_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\|M\| = \sqrt{\text{Tr}({}^tMM)} = \sqrt{\text{Tr}(I_n)} = \sqrt{n} \leq \sqrt{n},$$

d'où $O_n(\mathbb{R})$ est borné dans $(M_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$.

Montrons que $SL_n(\mathbb{R})$ n'est pas borné dans $(M_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on note $D_x = \text{diag}(x, \frac{1}{x}, 1, \dots, 1)$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $D_x \in SL_n(\mathbb{R})$ car $\det(D_x) = x \cdot \frac{1}{x} = 1$ et :

$$\|D_x\| = \sqrt{\text{Tr}({}^tD_x D_x)} = \sqrt{\text{Tr}\left(\text{diag}\left(x^2, \frac{1}{x^2}, 1, \dots, 1\right)\right)} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} + n - 2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty,$$

d'où $SL_n(\mathbb{R})$ n'est pas borné dans $(M_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$.