

Feuille d'exercices n°3

N'oubliez pas de regarder la fin du TD 2 sur l'intégration des relations de comparaison.

Exercices obligatoires : 2, 3, 5, 14, 15, 19, 22, 23.

1. Exercices basiques

a. Normes

Exercice 1.

Sur $\mathbb{R}^2$, on considère l'application $N : (x, y) \mapsto |x| + \max(|x|, |y|)$. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2.

Sur $\mathbb{R}^2$, on considère l'application $N : (x, y) \mapsto 2|x| + |y|$. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$ et dessiner sa sphère unité.

Exercice 3.

On considère l'espace vectoriel $E = C_b(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ qui tendent vers 0 en $+\infty$ et, pour $f \in E$, on considère :

$$\|f\| = \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-t^2} dt.$$

Montrer que l'application $f \mapsto \|f\|$ est une norme sur E .

Exercice 4.

Sur $E = \mathbb{R}[X]$, on définit N_1 et N_2 par

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| \text{ et } N_2(P) = \sup_{t \in [-1, 1]} |P(t)|.$$

Démontrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur E .

Exercice 5.

Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. On définit

$$N(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty, \quad N'(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

Démontrer que N et N' sont deux normes sur E .

Exercice 6.

Soit E l'espace vectoriel des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ convergentes. On considère l'application $\|\cdot\|$ défini par :

$$\text{pour } u = (u_n) \in E, \quad \|u\| = \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n|.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une semi-norme sur E i.e. $\|\cdot\|$ vérifie tous les axiomes d'une norme excepté l'axiome de séparation.
2. Donner un exemple de suite qui ne satisfait pas à l'axiome de séparation.

Exercice 7.

Dites si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :

1. Si (E, N) est un espace vectoriel normé, $x \in E$, $r > 0$ et $B(x, r)$ est la boule de centre x et de rayon $r > 0$, alors pour tout $\lambda > 0$, $\lambda B(x, r) = B(x, \lambda r)$.
2. $N : (x, y) \mapsto |5x + 3y|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et x, y deux vecteurs de E tels que $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$. Alors $x \in \text{vect}(y)$.
4. Soit $E = \mathbb{R}_1[X]$. Alors $N : P \mapsto |P(0)| + |P(1)|$ est une norme sur E .

Exercice 8.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Démontrer que, pour tous $x, y \in E$, on a

$$\|x\| + \|y\| \leq \|x + y\| + \|x - y\|.$$

En déduire que

$$\|x\| + \|y\| \leq 2 \max(\|x + y\|, \|x - y\|).$$

La constante 2 peut elle être améliorée ?

2. On suppose désormais que la norme est issue d'un produit scalaire. Démontrer que, pour tous $x, y \in E$, on a

$$(\|x\| + \|y\|)^2 \leq \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2.$$

En déduire que

$$\|x\| + \|y\| \leq \sqrt{2} \max(\|x + y\|, \|x - y\|).$$

La constante $\sqrt{2}$ peut elle être améliorée ?

Exercice 9.

Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels et $N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$N(x_1, \dots, x_n) = a_1|x_1| + \dots + a_n|x_n|.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les a_k pour que N soit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 10.

Soient N_1 et N_2 deux normes sur un espace vectoriel E . On pose $N = \max(N_1, N_2)$. Démontrer que N est une norme sur E .

Exercice 11.

On définit une application sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en posant

$$N(A) = n \max_{i,j} |a_{i,j}| \text{ si } A = (a_{i,j}).$$

Vérifier que l'on définit bien une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puis qu'il s'agit d'une norme d'algèbre, c'est-à-dire que

$$N(AB) \leq N(A)N(B) \text{ pour toutes matrices } A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 12.

Soit $a, b > 0$. On pose, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $N(x, y) = \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}$.

1. Prouver que N est une norme.
2. Dessiner la boule de centre 0 et de rayon 1.
3. Déterminer le plus petit nombre $p > 0$ tel que $N \leq p\|\cdot\|_2$ et le plus grand nombre q tel que $q\|\cdot\|_2 \leq N$.

Exercice 13.

Sur $E = \mathbb{R}[X]$, on définit N_1 et N_2 par

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| \text{ et } N_2(P) = \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)|.$$

1. Démontrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur E .
2. Étudier pour chacune des deux normes la convergence de la suite (P_n) définie par $P_n = \frac{1}{n}X^n$.

Exercice 14.

Soit $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose

$$N(f) = \left(f^2(0) + \int_0^1 (f'(t))^2 dt \right)^{1/2}.$$

1. Démontrer que N est une norme sur E .
2. Démontrer que, pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2}N(f)$.

b. Boules / Distances**Exercice 15.**

On considère l'espace vectoriel normé $(\ell^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

1. Déterminer la distance de la suite u constante en 1 au sous-espace vectoriel $c_0(\mathbb{R})$ des suites à valeurs réelles convergent vers 0.
2. Déterminer la distance de la suite $v = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ au sous-espace vectoriel $\mathcal{C}$ des suites à valeurs réelles convergentes.

Exercice 16.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $x, y \in E$. Démontrer que $x + B_f(y, r) = B_f(x + y, r)$.

Remarque : $x + B_f(y, r)$ est l'ensemble $\{x + z \mid z \in B_f(y, r)\}$.

Exercice 17.

Soit E un espace vectoriel et $N : E \mapsto \mathbb{R}$ une fonction telle que :

- i) N est positive sur E ;
- ii) pour tout $x \in E$, $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$;
- iii) pour tous $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$;

Montrer que N est une norme si, et seulement si, $B_f = \{x \in E \mid N(x) \leq 1\}$ est convexe.

Exercice 18.

Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie et

$$A = \left\{ f \in E \mid f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t) dt \geq 1 \right\}.$$

Montrer que pour tout $f \in A$, $\|f\|_\infty > 1$ et déterminer $d(0_E, A)$.

Exercice 19.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé avec $E \neq \{0\}$ et $x, x' \in E$ et $r, r' \in \mathbb{R}_+^*$.
 Montrer $B_f(x, r) = B_f(x', r')$ si, et seulement si, $x = x'$ et $r = r'$.

Indication.

Une implication est évidente, montrer l'implication réciproque par contraposée en commençant par le cas : $x = x'$ et $r \neq r'$.
 Ensuite, dans le cas $x \neq x'$, faire un dessin !

Exercice 20.

Soit E un espace vectoriel normé. Pour $a \in E$ et $r > 0$, on note $\bar{B}(a, r)$ la boule fermée de centre a et de rayon r . On fixe $a, b \in E$ et $r, s > 0$.

1. On suppose que $\bar{B}(a, r) \subset \bar{B}(b, s)$. Démontrer que $\|a - b\| \leq s - r$.
2. On suppose que $\bar{B}(a, r) \cap \bar{B}(b, s) = \emptyset$. Montrer que $\|a - b\| > r + s$.

2. Exercices d'entraînement**a. Normes****Exercice 21.**

Pour tout $x = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, on définit

$$N(x) = \sqrt{a^2 + 2ab + 5b^2}.$$

Démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 22.

Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B).$$

1. Démontrer que cette formule définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On notera N la norme associée.
2. Démontrer que, pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $N(AB) \leq N(A)N(B)$.

3. Exercices d'approfondissement**a. Normes**

Exercice 23. (*) Les normes p sur $\mathbb{R}^n$, pour $1 < p < +\infty$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Montrer que pour tous $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+$ et tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \leq \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right)^{\frac{1}{q}}.$$

2. En déduire que, pour tous $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+$ et $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}};$$

puis montrer que cette dernière inégalité est toujours vraie quand $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}_+$.

Cette inégalité est connue sous le nom de **Inégalité de Hölder**.

3. En utilisant l'inégalité de Hölder, démontrer l'**inégalité de Minkowski**, i.e. pour tous $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+$ et $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}_+$:

$$\left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

4. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et l'application de $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\text{pour } x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Montrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 24.

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose

$$\|P\|_A = \sup_{x \in A} |P(x)|.$$

Quelles conditions A doit-elle satisfaire pour que l'on obtienne une norme sur $\mathbb{R}[X]$?