Chapitre V
Fonctions vectorielles

Table des matières

Partie A : Fonctions d'un espace vectoriel normé dans un autre **2**
1. Fonctions composantes et fonctions partielles 2
2. Fonctions polynomiales 4
3. Applications lipschitziennes 9
4. Limite d'une application 12
5. Applications continues 21
6. Exemples d'applications continues 30

Partie B : Continuité des applications linéaires et multilinéaires **37**
1. Continuité et applications linéaires 37
2. Continuité et applications multilinéaires 44
3. Normes d'opérateur (ou normes subordonnées) 49

Partie C : Fonctions vectorielles de la variable réelle **57**
1. Dérivation des fonctions vectorielles de la variable réelle 57
2. Intégration des fonctions vectorielles sur un segment 70
3. Formules de Taylor 82

Partie D : Dérivées partielles **87**
1. Dérivée suivant un vecteur 87
2. Dérivées partielles 90
3. Matrice jacobienne 92

Dans ce chapitre, $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ désignent deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que E est de dimension non nulle.

Partie A

Fonctions d'un espace vectoriel normé dans un autre

Dans cette partie, A désigne un sous-ensemble non vide de E.

1. Fonctions composantes et fonctions partielles

Dans ce paragraphe, nous allons voir comment décomposer une fonction d'un espace vectoriel normé dans un autre en fonctions, soit à valeurs scalaires : les fonctions composantes ; soit de la variable scalaire : les fonctions partielles.
Nous verrons plus loin dans le chapitre que l'étude des propriétés d'une telle fonction, comme sa continuité par exemple, peut être faite complètement via les fonctions composantes, mais seulement partiellement via les fonctions partielles (qui portent donc bien leur nom !).

a. Fonctions composantes

Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Dans ce paragraphe, on suppose F de dimension finie égale à q.

Définition-Proposition 1. *Fonctions composantes*

Soit $f : A \to F$ et $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_q)$ une base de F.
Il existe une unique famille $(f_i)_{i\in[\![1,q]\!]}$ de fonctions de A dans $\mathbb{K}$ appelées **fonctions composantes de f dans la base $\mathcal{B}$** telle que, pour tout $x \in A$:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{q} f_i(x)\varepsilon_i.$$

Pour $i \in [\![1, q]\!]$, f_i est appelé la **i-ème fonction composante de f** dans la base $\mathcal{B}$.

Démonstration.

Pour chaque x appartenant à A, comme $\mathcal{B}$ est une base de F, il existe une unique famille de scalaires $(y_{x,i})_{i\in[\![1,q]\!]}$ telle que $f(x) = \sum_{i\in[\![1,q]\!]} y_{x,i}\varepsilon_i$.
Pour $i \in [\![1, q]\!]$, la fonction de A dans $\mathbb{K}$ telle que :

$$f_i : x \mapsto y_{x,i}$$

est alors bien définie sur A.
L'unicité de la décomposition de $f(x)$ pour chaque $x \in A$ assure alors l'unicité de la famille $(f_i)_{i\in[\![1,q]\!]}$. □

Exemple 1.

On considère la fonction $f :\to \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie, pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, par :

$$f(x, y, z) = \left(x^2y + z, x\sin(yz)\right).$$

Ses fonctions composantes dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont :

$$f_1 : (x, y, z) \mapsto x^2y + z \text{ et } f_2 : (x, y, z) \mapsto x\sin(yz).$$

Exercice 1.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la fonction $f_n : \mathbb{R}^2 \to M_2(\mathbb{R})$ définie, pour $(t, s) \in \mathbb{R}^2$, par :

$$f_n(t, s) = \begin{pmatrix} t & s \\ 0 & t \end{pmatrix}^n$$

Déterminer les applications composantes de f_n dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.

Correction.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(t, s) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{pmatrix} t & s \\ 0 & t \end{pmatrix} = tI_2 + sN \text{ où } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De plus, I_2 et N commutent, et N est nilpotente d'ordre 2, donc, d'après la formule du binôme de Newton, si $n \geq 1$:

$$f_n(t, s) = (tI_2 + sN)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (tI_2)^{n-k}(sN)^k = t^nI_2 + nt^{n-1}sN = \begin{pmatrix} t^n & nt^{n-1}s \\ 0 & t^n \end{pmatrix}$$

On remarque que la formule reste valable pour $n = 0$ en convenant que $0t^{n-1} = 0$ pour $t = 0$.
Ainsi, dans la base canonique $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ de $M_2(\mathbb{R})$, les applications composantes de f_n sont :

$$f_{n,1,1} : (t, s) \mapsto t^n; \quad f_{n,1,2} : (t, s) \mapsto nt^{n-1}s; \quad f_{n,2,1} : (t, s) \mapsto 0 \quad \text{et} \quad f_{n,2,2} : (t, s) \mapsto t^n.s$$

b. Applications partielles

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Dans ce paragraphe, on suppose E de dimension finie égale à p.

Définition 2.

Soit $f : A \to F$, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E et $a = \sum_{i=1}^{p} a_ie_i \in A$.

Pour $i \in [\![1, p]\!]$, on a appelle **i-ème application partielle de f dans la base $\mathcal{B}$ au point a**,

l'application f_{x_i} définie sur $V_i = \{t \in \mathbb{R} \mid a + (t - a_i)e_i \in A\}$ et à valeurs dans F telle que :

$$f_{x_i} : \left| \begin{array}{ccc} V_i & \to & F \\ t & \mapsto & f\left(a + (t-a_i)e_i\right) = f\left(a_1e_1 + ... + a_{i-1}e_{i-1} + te_i + a_{i+1}e_{i+1} + ... + a_pe_p\right). \end{array} \right.$$

Exemple 2.

On considère la fonction $f :\to \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie, pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, par :

$$f(x, y, z) = \left(x^2y + z, x\sin(yz)\right).$$

Ses applications partielles dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ au point (x, y, z) sont :

$$f_x : t \mapsto \left(t^2y + z, t\sin(yz)\right);\ f_y : t \mapsto \left(x^2t + z, x\sin(tz)\right) \text{ et } f_z : t \mapsto \left(x^2y + t, x\sin(yt)\right).$$

2. Fonctions polynomiales

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Dans ce paragraphe, on suppose E de dimension finie p.

a. Applications coordonnées

Définition-Proposition 3. *Applications coordonnées*

Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E.
Pour $i \in [\![1, p]\!]$, on appelle **i-ème application coordonnée dans la base $\mathcal{B}$**, la forme linéaire notée $\mathrm{d}x_i$ de E dans $\mathbb{K}$ définie, pour $x = \sum_{i=1}^{p} x_ie_i$, par :

$$\mathrm{d}x_i(x) = x_i.$$

Démonstration.

Pour $i \in [\![1, p]\!]$, l'application $\mathrm{d}x_i$ est bien linéaire. En effet, pour tout $x = \sum_{i=1}^p x_ie_i, y = \sum_{i=1}^p y_ie_i \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a $\lambda x + \mu y = \sum_{i=1}^p (\lambda x_i + \mu y_i)e_i$, donc :

$$\mathrm{d}x_i(\lambda x + \mu y) = \lambda x_i + \mu y_i = \lambda\,\mathrm{d}x_i(x) + \mu\,\mathrm{d}x_i(y).$$

□

Exemple 3.

Les applications coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont :

$$\mathrm{d}x : (x, y, z) \mapsto x;\ \ \mathrm{d}y : (x, y, z) \mapsto y \text{ et } \mathrm{d}z : (x, y, z) \mapsto z.$$

Remarque 1.

Pour $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E et $i \in [\![1, p]\!]$, on pourra également trouver la notation e_i^*, ou encore e_i', pour la i-ème application coordonnée dans la base $\mathcal{B}$ - il s'agit de la notation usuelle (mais hors programme) lorsqu'on aborde la notion d'*espace dual*.

Proposition 1.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E, B une partie de F, $f : B \to E$ une fonction et $(f_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ les applications composantes de f dans la base $\mathcal{B}$. On a, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$:

$$f_i = \mathrm{d}x_i \circ f.$$

Démonstration.

Soit $i \in [\![1, p]\!]$. Pour tout $x \in B$, on a $f(x) = \sum_{i=1}^{p} f_i(x) e_i$, donc

$$\mathrm{d}x_i \circ f(x) = \mathrm{d}x_i(f(x)) = f_i(x).$$

Il en résulte que $\mathrm{d}x_i \circ f = f_i$. □

b. Fonctions polynomiales

Définition 4. *Fonction polynomiale*

Soit $f : E \to \mathbb{K}$.

— Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ de E. On dit que f est une **fonction polynomiale dans la base $\mathcal{B}$** s'il existe une famille $(\lambda_{k_1,...,k_p})_{(k_1,...,k_p) \in \mathbb{N}^p}$ de scalaires presque tous nuls telle que, pour tout $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$:

$$f(x) = \sum_{(k_1,...,k_p) \in \mathbb{N}^p} \lambda_{k_1,...,k_p} x_1^{k_1} ... x_p^{k_p}.$$

Autrement dit, f est polynomiale dans la base $\mathcal{B}$ si f est combinaison linéaire de produits finis des applications coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

— On dit que f est une **fonction polynomiale** s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que f est une fonction polynomiale dans la base $\mathcal{B}$ et on note $\mathcal{P}(E, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions de E dans $\mathbb{K}$ polynomiales.

Exemple 4.

— Sur $\mathbb{R}^3$, l'application

$$f : (x, y, z) \mapsto x^4 - y^2 z - 2z^3 + 5x^2 y^2 z^2$$

est une fonction polynomiale.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application :

$$\det : \left| \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ M & \mapsto & \det(M) \end{array} \right.$$

est une fonction polynomiale.

— La fonction f est une combinaison linéaire de produits des applications coordonnées dans la base canonique ; ainsi elle est polynomiale dans la base canonique et donc polynomiale.

— On a, pour $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$,

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} m_{\sigma(i),i},$$

donc det est une application polynomiale car polynomiale dans la base canonique de $M_n(\mathbb{K})$.

Remarque 2.

Lorsque l'espace de départ est $\mathbb{K}$, la définition précédente de fonction polynomiale de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ est équivalente à celle de Sup' proposée en terme de fonction obtenue en évaluant sur $\mathbb{K}$ les polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

On peut définir de manière analogue les fonctions polynomiales de E dans $\mathbb{K}$ dans une certaine base : pour cela, on considère les fonctions issues de l'évaluation des polynômes de $\mathbb{K}[X_1, ..., X_p]$ à p indéterminées en les coordonnées dans cette base.

Proposition 2.

Soit $f : E \to \mathbb{K}$.

La fonction f est une fonction polynomiale si, et seulement si, pour toute base $\mathcal{B}$ de E, f est polynomiale dans la base $\mathcal{B}$.

Plus précisément, les ensembles $\mathcal{P}(E, \mathbb{K})$ des fonctions polynomiales et des fonctions polynomiales dans une base quelconque coïncident et sont égaux à la sous-algèbre de $\mathcal{F}(E, \mathbb{K})$ (muni de la multiplication terme à terme des fonctions) engendrée par l'ensemble $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ des formes linéaires sur E.

Démonstration.

Notons $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions de E dans $\mathbb{K}$ polynomiales et, pour une base $\mathcal{B}$ de E, $\mathcal{P}_\mathcal{B}$ l'ensemble des fonctions de E dans $\mathbb{K}$ polynomiales dans la base $\mathcal{B}$.

Par définition, on a, $\mathcal{P} = \bigcup_{\mathcal{B} \text{ base de } E} \mathcal{P}_\mathcal{B}$.

On considère maintenant la sous-algèbre, notée $\mathcal{A}$ dans la suite, de $\mathcal{F}(E, \mathbb{K})$ engendrée par l'en-

semble $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$.
On va commencer par montrer que, pour toute base $\mathcal{B}$ de E, $\mathcal{P}_{\mathcal{B}} = \mathcal{A}$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$. On remarque tout d'abord que $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}$ est la sous-algèbre de $\mathcal{F}(E,\mathbb{K})$ engendrée par $\{\mathrm{d}x_1, ..., \mathrm{d}x_p\}$.
En effet, pour tout $f \in \mathcal{P}_{\mathcal{B}}$, il existe une famille $(\lambda_{k_1,...,k_p})_{(k_1,...,k_p)\in\mathbb{N}^n}$ de scalaires presque tous nuls telle que, pour tout $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{(k_1,...,k_p)\in\mathbb{N}^p} \lambda_{k_1,...,k_p} x_1^{k_1} ... x_p^{k_p} \\ &= \sum_{(k_1,...,k_p)\in\mathbb{N}^p} \lambda_{k_1,...,k_p}\, \mathrm{d}x_1(x)^{k_1} ... \,\mathrm{d}x_p(x)^{k_p} \end{aligned}$$

où, pour $i \in [\![1,p]\!]$, $\mathrm{d}x_i$ est la i-ème application coordonnée dans la base $\mathcal{B}$;
et ainsi, $f = \sum_{(k_1,...,k_p)\in\mathbb{N}^p} \lambda_{k_1,...,k_p}\, \mathrm{d}x_1^{k_1} ... \,\mathrm{d}x_p^{k_p}$.
Par suite, $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de produits d'éléments de $\{\mathrm{d}x_1, ..., \mathrm{d}x_p\}$ qui est égal à la sous-algèbre de $\mathcal{F}(E,\mathbb{K})$ engendrée par $\{\mathrm{d}x_1, ..., \mathrm{d}x_p\}$.

Procédons par double inclusion :

- ⋆ Comme les applications coordonnées sont des formes linéaires, on a $\{\mathrm{d}x_1, ..., \mathrm{d}x_p\} \subset \mathcal{L}(E,\mathbb{K})$, et donc $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(E,\mathbb{K})$ qui contient $\{\mathrm{d}x_1, ..., \mathrm{d}x_p\}$, d'où $\mathcal{P}_{\mathcal{B}} \subset \mathcal{A}$ car $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}$ est la plus petite sous-algèbre de $\mathcal{F}(E,\mathbb{K})$ qui contient $\{\mathrm{d}x_1, ..., \mathrm{d}x_p\}$.
- ⋆ Vérifions maintenant que $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}$ contient $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$. Comme E est de dimension finie p, $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ est de dimension finie p et $(\mathrm{d}x_1, ..., \mathrm{d}x_p)$ est une base de $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$. Par suite, toute forme linéaire appartient à $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}$ comme combinaison linéaire des $\mathrm{d}x_i$ pour $i \in [\![1,p]\!]$.
  Ainsi, $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(E,\mathbb{K})$ qui contient $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$; et, $\mathcal{A}$ étant la plus petite d'entre-elles, on a $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}_{\mathcal{B}}$.

Il en résulte que $\mathcal{P}_{\mathcal{B}} = \mathcal{A}$ et ce, pour toute base $\mathcal{B}$ de E.

Ainsi, on a, pour tout $\mathcal{B}$ base de E :

$$\mathcal{P} = \bigcup_{\mathcal{B}' \text{ base de } E} \mathcal{P}_{\mathcal{B}'} = \bigcup_{\mathcal{B}' \text{ base de } E} \mathcal{A} = \mathcal{A} = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}.$$

□

Corollaire 1. *Opérations sur les fonctions polynomiales*

L'ensemble des fonctions polynomiales de E dans $\mathbb{K}$ est stable par combinaisons linéaires et par produits finis.

Démonstration.

D'après la proposition précédente, l'ensemble des fonctions polynomiales de E dans $\mathbb{K}$ muni de ses opérations usuelles est une algèbre et donc est stable par combinaisons linéaires et par produits finis. □

Proposition 3. *Composition*

On suppose F de dimension finie $q \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : F \to \mathbb{K}$, $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_q)$ une base de F, $g : E \to F$ et $(g_i)_{i\in[\![1,q]\!]}$ les applications composantes de g dans la base $\mathcal{C}$.
Si f est polynomiale de F dans $\mathbb{K}$ et, pour tout $i \in [\![1, q]\!]$, g_i est polynomiale de E dans $\mathbb{K}$, alors $f \circ g$ est polynomiale de E dans $\mathbb{K}$.

Démonstration.

On suppose $f \in \mathcal{P}(F, \mathbb{K})$ et, pour tout $i \in [\![1, q]\!]$, $g_i \in \mathcal{P}(E, \mathbb{K})$. D'après le proposition 2, la fonction f est polynomiale dans la base $\mathcal{C}$ et donc il existe une famille $(\lambda_{k_1,...,k_q})_{(k_1,...,k_q)\in\mathbb{N}^q}$ de scalaires presque tous nuls telle que

$$f = \sum_{(k_1,...,k_q)\in\mathbb{N}^q} \lambda_{k_1,...,k_q}\, \mathrm{d}y_1^{k_1} ... \,\mathrm{d}y_q^{k_q},$$

où, pour $i \in [\![1, q]\!]$, $\mathrm{d}y_i$ est la i-ème application coordonnée dans la base $\mathcal{C}$.
On a alors, d'après la proposition 1 :

$$\begin{aligned} f \circ g &= \sum_{(k_1,...,k_q)\in\mathbb{N}^q} \lambda_{k_1,...,k_q} \prod_{i=1}^{q} \mathrm{d}y_i^{k_i} \circ g \\ &= \sum_{(k_1,...,k_q)\in\mathbb{N}^q} \lambda_{k_1,...,k_q} \prod_{i=1}^{q} (\,\mathrm{d}y_i \circ g)^{k_i} \\ f \circ g &= \sum_{(k_1,...,k_q)\in\mathbb{N}^q} \lambda_{k_1,...,k_q} \prod_{i=1}^{q} g_i^{k_i}. \end{aligned}$$

Ainsi, $f \circ g$ est une combinaison linéaire de produits finis d'éléments de $\mathcal{P}(E, \mathbb{K})$ qui est stable par ces opérations d'après le corollaire 1, donc $f \circ g$ appartient à $\mathcal{P}(E, \mathbb{K})$. □

Exemple 5.

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Les applications composantes dans le base canonique de $M_n(\mathbb{K})$ de l'application com : $M \mapsto \mathrm{com}(M)$ qui à une matrice associe sa comatrice, sont polynomiales.

Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$ et $i, j \in [\![1, n]\!]$.
En notant $c_{i,j}$ le coefficient de $\mathrm{com}(M)$ sur sa i-ème ligne et sa j-ième colonne, on a :

$$c_{i,j} = (-1)^{i+j} \det\left(M_{i,j}\right),$$

où $M_{i,j}$ est sous-matrice carrée de M de taille $n-1$ obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ième colonne de M.
L'application $M \mapsto M_{i,j}$ de $M_n(\mathbb{K})$ dans $M_{n-1}(\mathbb{K})$ est linéaire ; ainsi, ses applications composantes dans la base canonique de $M_{n-1}(\mathbb{K})$ sont des formes linéaires et donc sont polynomiales. Par suite, d'après la proposition précédente, comme $\det : M_{n-1}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est polynomiale (voire Exemple 4), $M \mapsto \det\left(M_{i,j}\right)$ est polynomiale sur $M_n(\mathbb{K})$.
Il en résulte que l'application composante $\mathrm{com}_{i,j} : M \mapsto c_{i,j}$ est polynomiale sur $M_n(\mathbb{K})$.

Définition-Proposition 5.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in M_n(\mathbb{K})$.

L'application $\chi_M : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \det(tI_n - M) \end{array} \right.$ est une fonction polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ associé à l'application polynomiale χ_M est appelé **polynôme caractéristique de** M et on le note de nouveau χ_M.

Correction.

On note $M = (m_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]}$. On considère l'application $g : t \to tI_n - M$ de $\mathbb{K}$ dans $M_n(\mathbb{K})$. Ses applications composantes dans la base canonique de $M_n(\mathbb{K})$ sont alors données (en les "numérotant" par des couples d'indices comme pour la base canonique), pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, par :

$$g_{i,j} : t \mapsto t\delta_{i,j} - m_{i,j},$$

Ainsi, pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, $g_{i,j}$ est polynomiale de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$, et d'après l'exemple 4, l'application $\det : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est polynomiale, donc, en vertu de la définition-proposition 3, $\chi_M = \det \circ g$ est polynomiale de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$.

Remarque 3.

On étudiera plus longuement, dans le chapitre sur la réduction des endomorphismes et des matrices carrées, le polynôme caractéristique de M pour une matrice carrée M donnée.

Exercice 2.

Soit $f : E \to \mathbb{K}$ une fonction polynomiale. Pour $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E, il existe alors une famille $(\lambda_{k_1,...,k_p})_{(k_1,...,k_p) \in \mathbb{N}^p}$ de scalaires presque tous nuls telle que, pour tout $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$:

$$f(x) = \sum_{(k_1,...,k_p) \in \mathbb{N}^p} \lambda_{k_1,...,k_p} x_1^{k_1} ... x_p^{k_p},$$

et on appelle **degré de f dans la base $\mathcal{B}$** et on note $\deg_{\mathcal{B}}(f)$ est l'entier naturel :

$$\deg_{\mathcal{B}}(f) = \begin{cases} -\infty & \text{si } \forall\, (k_1, ..., k_p) \in \mathbb{N}^p,\ \lambda_{k_1,...,k_p} = 0; \\ \max\{k_1 + ... + k_p \mid \lambda_{k_1,...,k_p} \neq 0\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et f, g des fonctions polynomiales de E dans $\mathbb{K}$. Montrer que :

$$\deg_{\mathcal{B}}(f + g) \leq \max\left(\deg_{\mathcal{B}}(f), \deg_{\mathcal{B}}(g)\right) \text{ et } \deg_{\mathcal{B}}(fg) = \deg_{\mathcal{B}}(f) + \deg_{\mathcal{B}}(g).$$

2. En déduire que le degré d'une fonction polynomiale est indépendante de la base choisie i.e. pour f une fonction polynomiale de E dans $\mathbb{K}$ et $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ des bases de E, on a :

$$\deg_{\mathcal{B}}(f) = \deg_{\mathcal{B}'}(f).$$

3. Applications lipschitziennes

Définition 6.

Soit $k \in \mathbb{R}_+$, $A \subset E$ et $f : A \to F$.
On dit que f est **k-lipschitzienne** ou **lipschitzienne de rapport k sur A pour $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$** si, pour tous $x, y \in A$:

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E.$$

On dit que f est **lipschitzienne sur A pour $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$** s'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que f est lipschitzienne de rapport k sur A pour $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$.
S'il n'y a pas d'ambiguité sur les normes utilisées, on pourra se passer de la mention "pour $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$" pour la lipschitzianité d'une fonction.

Proposition 4.

Soit N_E, N'_E des normes sur E, N_F, N'_F des normes sur F, $a \in A$, $\ell \in F$ et $f : A \to F$.

- On suppose N_E dominée par N'_E et N_F dominée par N'_F.
  Si f est lipschitzienne sur A pour N_E et N'_F alors f est lipschitzienne sur A pour N'_E et N_F.
- On suppose N_E, N'_E équivalentes et N_F, N'_F équivalentes.
  L'application f est lipschitzienne sur A pour N_E et N'_F si, et seulement si, f est lipschitzienne sur A pour N'_E et N_F.
  Autrement dit, la lipschitzianité est invariante par passage à des normes équivalentes *(mais, en général, ce n'est pas le cas de la constante associée !)*.

Démonstration.

- On suppose N_E dominée par N'_E et N_F dominée par N'_F. Alors il existe C_E, C_F des réels strictement positifs tels que $N_E \leq C_E N'_E$ et $N_F \leq C_F N'_F$.
  On suppose f lipschitzienne de rapport k sur A pour N_E et N'_F pour un certain $k \in \mathbb{R}_+$.
  On pose $k' = C_F k C_E \geq 0$. Pour tous $x, y \in A$. On a :

$$N_F(f(x) - f(y)) \leq C_F N'_F(f(x) - f(y)) \leq C_F k N_E(x - y) \leq C_F k C_E N'_E(x - y) = k' N'_E(x - y).$$

  Par suite, f est k'-lipschitzienne et donc lipschitzienne sur A pour N'_E et N_F.
- On applique le point précédent en remarquant que deux normes sont équivalentes si, et seulement si, l'une domine l'autre et l'autre domine l'une.

□

Exemple 6.

- La norme $\|\cdot\|_E$ est 1-lipschitzienne sur E pour $\|\cdot\|_E$ et $|\cdot|$.
- Une application constante de A dans F est lipschitzienne sur A.

— Une homothétie de E est lipschitzienne sur E.

— Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $((E_1, \|\cdot\|_1), ..., (E_p, \|\cdot\|_p))$ des espaces vectoriels normés et $E = E_1 \times ... \times E_p$ muni de la norme produit. Les projections sur chaque facteur, i.e. pour $i = 1, ..., p$:

$$\pi_i : \left| \begin{array}{rcl} E & \to & E_i \\ x = (x_1, ..., x_p) & \mapsto & x_i, \end{array} \right.$$

sont 1-lipschitziennes sur E pour la norme produit sur E et la norme du facteur considéré.

— Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose E de dimension finie p et on considère $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E. Les applications coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ i.e. pour $i = 1, ..., p$:

$$\mathrm{d}x_i : \left| \begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{K} \\ x = \sum_{i=1}^p x_i e_i & \mapsto & x_i \end{array} \right.$$

sont 1-lipschitziennes sur E pour n'importe quelle norme sur E.

— L'application $\begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & d(x, A) \end{array}$ est 1-lipschitzienne sur E.

— Pour tous $x, y \in E$, on a, d'après la seconde inégalité triangulaire :

$$|\|x\|_E - \|y\|_E| \leq \|x - y\|_E.$$

Par suite, $\|\cdot\|$ est 1-lipschitzienne sur E pour $\|\cdot\|_E$ et $|\cdot|$.

— Soit $c \in F$. On note $f : x \mapsto c$. Pour tous $x, y \in A$, on a :

$$\|f(x) - f(y)\|_F = \|c - c\|_F = 0 \leq 0.\|x - y\|_E,$$

donc, f est est lipschitzienne (de rapport 0) sur A.

— Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On note $f = \lambda \mathrm{Id}_E$. Pour tous $x, y \in E$, on a :

$$\|f(x) - f(y)\|_E = |\lambda|.\|x - y\|_E$$

donc, f est lipschitzienne (de rapport $|\lambda|$) sur E.

— Soit $i \in [\![1, p]\!]$. Pour tous $x = (x_1, ..., x_p), y = (y_1, ..., y_p) \in E$,

$$\|\pi_i(x) - \pi_i(y)\|_i = \|x_i - y_i\|_i \leq \max_{1 \leq j \leq p} \|x_j - y_j\|_j = \|x - y\|_E.$$

donc π_i est 1-lipschitzienne sur E.

— Soit $i \in [\![1, p]\!]$. Pour tous $x = \sum_{i=1}^p x_i e_i, y = \sum_{i=1}^p y_i e_i \in E$,

$$\|\,\mathrm{d}x_i(x) - \,\mathrm{d}x_i(y)\|_i = \|x_i - y_i\|_i \leq \max_{1 \leq j \leq n} |x_j - y_j| = \|x - y\|_{\infty, \mathcal{B}}.$$

donc $\mathrm{d}x_i$ est 1-lipschitzienne sur E pour la norme infinie dans la base $\mathcal{B}$.
L'espace E étant de dimension finie, toutes les normes sur E sont équivalentes ; ainsi, d'après la proposition 4, $\mathrm{d}x_i$ est 1-lipschitzienne sur E pour n'importe quelle norme sur E.

— Pour tous $x, y \in E$,

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y) = \|x - y\|_E$$

donc $x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne sur E.

Exercice 3.

Montrer que $\begin{array}{ccc} E\times E & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & d(x,y) \end{array}$ est lipschitzienne sur $E\times E$ pour la norme produit sur $E\times E$.

Correction.

On a, pour tous $(x,y),(u,v)\in E^2$:

$$\begin{aligned} |d(x,y)-d(u,v)| &\leq |d(x,y)-d(y,u)|+|d(y,u)-d(u,v)| \\ &\leq d(x,u)+d(y,v) \\ &\leq 2\max(d(x,u),d(y,v)) = 2\|(x,y)-(u,v)\|_\infty. \end{aligned}$$

Donc cette application est 2-lipschitzienne sur $E\times E$ pour la norme produit.

Exercice 4. *Rappels de Sup'*

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Montrer que si f est continue sur I, dérivable sur l'intérieur de I et f' est bornée sur I, alors f est lipschitzienne sur I.
   En déduire que $x \mapsto \cos(x)$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que si f est de classe C^1 sur I, alors f est lipschitzienne sur tout segment de I.

Correction.

1. On suppose f continue sur I, dérivable sur l'intérieur de I et f' bornée sur I disons par $M\geq 0$.
   Pour tous $x,y\in I$, f est alors continue sur $[x,y]$ et dérivable sur $]x,y[$ donc, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c\in]x,y[$ tel que :
   $$f(x)-f(y)=f'(c)(x-y),$$
   d'où, comme $|f'|\leq M$ sur $]x,y[$:
   $$|f(x)-f(y)|=|f'(c)|.|x-y|\leq M.|x-y|.$$
   Il en résulte que f est lipschitzienne sur I.
   La fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\cos' = -\sin$ est bornée sur $\mathbb{R}$ (par 1), donc, d'après ce qui précède, cos est lipschitzienne sur I.
2. On suppose f de classe C^1 sur I. Soit $a,b\in I$ avec $a<b$. Alors f est dérivable sur $[a,b]$ et f' est continue sur $[a,b]$. Ainsi, d'après le théorème des bornes atteintes, f' est bornée sur $[a,b]$; donc, d'après la question précédente, f est lipschitzienne sur $[a,b]$.
   Il en résulte que f est lipschitzienne sur tout segment de I.

4. Limite d'une application

Dans ce paragraphe, on généralise directement la notion de limite déjà vue pour pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ aux fonctions d'un espace vectoriel normé dans un autre.

a. Généralités

Définition 7. *Limite*

Soit $f : A \to F$ une application et $a \in \overline{A}$.

Soit $\ell \in F$. On dit que f **admet** ℓ **pour limite en** a ou **tend vers** ℓ **en** a pour les normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in A, \quad \|x - a\|_E \leq \delta \ \Rightarrow\ \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

On dit que f **admet une limite en** a pour les normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ s'il existe $\ell \in F$ tel que f admet ℓ pour limite en a.

Remarque 4.

- Par mesure de simplicité, s'il n'y a pas d'ambiguité sur les normes dont sont munis E et F, on pourra dire "f **admet** ℓ **pour limite en** a" sans le "pour les normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$".
  Mais **attention !** Comme on le voit dans la définition, la notion de limite dépend crucialement des normes dont sont munis les espaces de départ et d'arrivée de l'application. Si on change de normes, l'application peut ne plus admettre de limite alors qu'elle en admettait une avec la norme précédente (ou même une autre limite !).
- Si a appartient à A et f admet ℓ pour limite en a, alors $\ell = f(a)$.

Proposition 5.

Soit $f : A \to F$ et $a \in \overline{A}$.

Si f admet une limite en a, alors cette limite est unique.

Démonstration.

On suppose que f tend vers ℓ et ℓ' en a. Pour tout $x \in A$, on a :

$$\|\ell - \ell'\|_F = \|\ell - f(x) + f(x) - \ell\|_F \leq \|f(x) - \ell\|_F + \|f(x) - \ell'\|_F.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe des réels $\delta, \delta' > 0$ tels que, pour tout $x \in A$:

$$\|x - a\|_E \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$\|x - a\|_E \leq \delta' \Rightarrow \|f(x) - \ell'\|_F \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On note $\eta = \min(\delta, \delta') > 0$. Comme $a \in \overline{A}$, $B(a, \eta) \cap A \neq \emptyset$, donc il existe $x \in A$ tel que $\|x - a\|_E \leq \eta$.

Par suite, on a $\|x-a\|_E \leq \delta$ et $\|x-a\|_E \leq \delta'$, d'où :

$$\|\ell-\ell'\|_F = \leq \underbrace{\|f(x)-\ell\|_F}_{\leq \varepsilon/2} + \underbrace{\|f(x)-\ell'\|_F}_{\leq \varepsilon/2} \leq 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $\|\ell-\ell'\|_E = 0$, et donc, d'après l'axiome de séparation de $\|\cdot\|_E$, $\ell = \ell'$. □

Remarque 5.

En étudiant la démonstration précédente, on comprend pourquoi se limite (sic) aux points a de $\overline{A}$ dans la définition de la limite : en effet, si $a \notin \overline{A}$, l'unicité de la limite n'est plus garantie ; et même pire, en fait, dans ce cas, tout vecteur de F est limite de f en a.

La proposition précédente légitime l'emploi de la notation suivante :

Notation 1.

Soit $f : A \to F$, $a \in \overline{A}$ et $\ell \in F$. Si f admet ℓ pour limite en a, on note :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \text{ ou encore } f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell.$$

Remarque 6.

Insistons ! Même si la notation précédente ne le prend pas en compte, la notion de limite dépend des normes utilisées !

b. Limites et infini

Dans la définition suivante, on se placera dans le cas où $F = \mathbb{R}$ pour considérer des limites infinies :

Définition 8. *Limite infinie*

Soit $f : A \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{A}$.

— On dit que f tend vers $+\infty$ en a, et on note $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, si :

$$\forall R \geq 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in A,\quad \|x-a\|_E \leq \delta \ \Rightarrow\ f(x) \geq R.$$

— On dit que f tend vers $-\infty$ en a, et on note $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, si :

$$\forall R \geq 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in A,\quad \|x-a\|_E \leq \delta \ \Rightarrow\ f(x) \leq -R.$$

Pour cette définition, on se place dans le cas où $A = E = \mathbb{R}$ pour considérer des limites en $\pm\infty$:

Définition 9. *Limite en $\pm\infty$*

Soit $f : \mathbb{R} \to F$ et $\ell \in F$.

— On dit que f tend vers ℓ en $+\infty$, et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, si :

$$\forall \varepsilon \geq 0,\ \exists R > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\quad x \geq R \ \Rightarrow\ \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

— On dit que f tend vers ℓ en $-\infty$, et on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$, si :

$$\forall \varepsilon \geq 0,\ \exists R > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\quad x \leq -R \ \Rightarrow\ \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

On considère désormais le cas où A n'est pas bornée et $\|x\|_E \to +\infty$:

Définition 10.

On suppose A non bornée dans $(E, \|\cdot\|_E)$. Soit $f : A \to F$ et $\ell \in F$.
On dit que f **tend vers** ℓ **quand** $\|x\|$ **tend vers** $+\infty$, et on note $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty} f(x) = \ell$ si :

$$\forall \varepsilon \geq 0,\ \exists R > 0,\ \forall x \in A,\quad \|x\|_E \geq R \ \Rightarrow\ \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

c. Limite et comparaison de normes

Proposition 6.

Soit N_E, N'_E des normes sur E, N_F, N'_F des normes sur F, $a \in \overline{A}$, $\ell \in F$ et $f : A \to F$.

— On suppose N_E dominée par N'_E et N_F dominée par N'_F.
Si f admet pour limite ℓ en a pour N_E et N'_F alors f admet pour limite ℓ en a pour N'_E et N_F.

— On suppose N_E, N'_E équivalentes et N_F, N'_F équivalentes.
L'application f admet pour limite ℓ en a pour N_E et N'_F si, et seulement si, f admet pour limite ℓ en a pour N'_E et N_F.
Autrement dit, le fait d'admettre de limite et la limite sont invariants par passage à des normes équivalentes.

Démonstration.

— On suppose N_E dominée par N'_E et N_F dominée par N'_F. Alors il existe C_E, C_F des réels strictement positifs tels que $N_E \leq C_E N'_E$ et $N_F \leq C_F N'_F$.
On suppose que f admet pour limite ℓ en a pour N_E et N'_F.
Soit un réel $\varepsilon > 0$. Comme $\dfrac{\varepsilon}{C_F} > 0$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in A$, $N_E(x-a) \leq \delta$ implique $N'_F(f(x) - \ell) \leq \dfrac{\varepsilon}{C_F}$.
On pose $\delta' = \dfrac{\delta}{C_E} > 0$.
Soit $x \in A$. Supposons $N'_E(x-a) \leq \delta'$. Alors $N_E(x-a) \leq C_E N'_E(x-a) \leq \delta$. Par suite,

on a :

$$N_F(f(x)-\ell) \leq C_F.N'_F(f(x)-\ell) \leq C_F.\frac{\varepsilon}{C_F} = \varepsilon.$$

Par suite, f admet pour limite ℓ en a pour N'_E et N_F.

— On applique le point précédent en remarquant que deux normes sont équivalentes si, et seulement si, l'une domine l'autre et l'autre domine l'une.

□

d. Caractérisation séquentielle de la limite

Théorème 1. *Caractérisation séquentielle de la limite*

Soit $f : A \to F$, $a \in \overline{A}$ et $\ell \in F$.
La fonction f tend vers ℓ en a si, et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A telle que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$,

$$f(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell.$$

Autrement dit, f tend vers ℓ en a si, et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A qui converge vers a, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans F converge vers ℓ.

Démonstration.

— ($\Rightarrow$). On suppose $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans A tel que $u_n \to a$.
Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe un réel $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in A$ vérifiant $\|x-a\|_E \leq \delta$, $\|f(x)-\ell\|_F \leq \varepsilon$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a donc il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geq N$,

$$\|u_n - a\| \leq \delta.$$

Par suite, $\|f(u_n)-\ell\|_F \leq \varepsilon$.
Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, il en résulte que la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

— ($\Leftarrow$). On procède par contraposition. On suppose que f ne tend pas vers ℓ en a.
Exhibons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A qui converge vers a et telle que la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers ℓ.
Comme f ne tend pas vers ℓ en a, alors :

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0\ \exists x \in A; \|x-a\|_E \leq \delta \text{ et } \|f(x)-\ell\|_F > \varepsilon.$$

Considérons ce $\varepsilon > 0$ et soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, pour $\delta_n = \frac{1}{2^n} > 0$, il existe $u_n \in A$ tel que $\|u_n - a\|_E \leq \delta_n$ et $\|f(u_n)-\ell\|_F > \varepsilon$.
Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans A, converge vers a car $\|u_n - a\|_E \leq \delta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f(u_n)-\ell\|_F > \varepsilon$, donc $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers ℓ.

□

e. Opérations sur les limites

Proposition 7. *Espace vectoriel des fonctions admettant une limite en un point*

Soit $a \in \overline{A}$. Muni des ses opérations usuelles, l'ensemble des fonctions de A dans F qui admettent une limite en a est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et l'application qui à f associe sa limite en a est linéaire.

En particulier, si $f, g : A \to F$ admettent des limites en a, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda f + \mu g$ admet une limite en a et on a :

$$\lim_{x\to a}((\lambda f + \mu g)(x)) = \lim_{x\to a}(\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda \lim_{x\to a} f(x) + \mu \lim_{x\to a} g(x).$$

Démonstration.

On peut utiliser les résultats établis dans la partie sur les suites à valeurs dans un espace vectoriel normé en appliquant la caractérisation de la limite par les suites.

Voici une preuve qui utilise la definition première de limite :
On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions de A dans F qui admettent une limite en a. Montrons que c'est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(A, F)$ de toutes les fonctions de A dans F.

- L'application nulle $\mathbf{0} : x \mapsto 0_F$ de A dans F admet pour limite 0_F en a. Donc $\mathbf{0}$ appartient à $\mathcal{F}$.
- Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $f, g \in \mathcal{F}$. On note $\ell, \ell' \in F$ leurs limites respectives en a. Alors on a, pour tout $x \in A$:

$$\begin{aligned}\|(\lambda f + \mu g)(x)) - (\lambda\ell + \mu\ell')\|_F &= \|\lambda(f(x) - \ell) + \mu(g(x) - \ell')\|_F \\ &\leq |\lambda| \underbrace{\|f(x) - \ell\|_F}_{\xrightarrow[x\to a]{} 0} + |\mu| \underbrace{\|g(x) - \ell'\|_F}_{\xrightarrow[x\to a]{} 0} \xrightarrow[x\to a]{} 0.\end{aligned}$$

  Donc $\lambda f + \mu g$ admet une limite en a égale $\lambda\ell + \mu\ell' \in F$ (car F est un espace vectoriel. D'où $\lambda f + \mu g$ appartient à $\mathcal{F}$.

Soit $L_a : \mathcal{F} \to \mathbb{K}$ l'application $L_a : f \mapsto \lim_{x\to a} f(x)$. En reprenant les arguments précédents, on obtient que, pour $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et pour $f, g \in \mathcal{F}$ de limites respectives $\ell, \ell' \in F$ en a :

$$L_a(\lambda f + \mu g) = \lambda\ell + \mu\ell' = \lambda L_a(f) + \mu L_a(g).$$

Donc L_a est une application linéaire de $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{K}$. □

Proposition 8. *Limite d'un produit*

Soit $a \in \overline{A}$.

- Soit $f : A \to F$, $\varphi : A \to \mathbb{K}$.
  Si f et φ admettent des limites en a (finie pour φ), alors l'application $\varphi.f : x \mapsto \varphi(x)f(x)$, définie de A dans F, admet une limite en a et on a :

$$\lim_{x\to a}(\varphi.f)(x) = \lim_{x\to a}\varphi(x).f(x) = \lim_{x\to a}\varphi(x).\lim_{x\to a} f(x).$$

- On suppose que F est une algèbre munie d'une norme d'algèbre. Soit $f, g : A \to F$.
  Si f et g admettent des limites en a, alors l'application $fg : x \mapsto f(x)g(x)$, définie de A

dans F, admet une limite en a et on a :

$$\lim_{x\to a}(fg)(x) = \lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x).$$

Démonstration.

On peut utiliser un raisonnement direct ou se servir des résultats sur la convergence des suites et la caractérisation séquentielle de la limite (Théorème 1).
Utilisons les suites :

— On suppose $\lim_{x\to a} f(x) = \ell \in F$ et $\lim_{x\to a} \varphi(x) = \lambda \in \mathbb{K}$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans A qui converge vers a. D'après le théorème 1, on a $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ et $\varphi(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda$.
Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par inégalité triangulaire et homogénéité de la norme $\|\cdot\|_F$:

$$\|\varphi(x_n)f(x_n) - \lambda\ell\|_F \leq \underbrace{|\varphi(x_n) - \lambda|}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}0}\ \underbrace{\|f(x_n)\|_F}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}\|\ell\|_F} + |\lambda|\ \underbrace{\|f(x_n) - \ell\|_F}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Ceci étant vrai pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A qui converge vers a, d'après le théorème 1, $\varphi.f$ admet une limite en a égale à $\lambda\ell$.

— La preuve est en tout point similaire à la précédente, on reproduit tout de même ici ces arguments. On suppose $\lim_{x\to a} f(x) = \ell \in F$ et $\lim_{x\to a} g(x) = \ell' \in F$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans A qui converge vers a. D'après le théorème 1, on a $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ et $g(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell'$. Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par inégalité triangulaire et sous-multiplicativité de la norme $\|\cdot\|_F$:

$$\|f(x_n)g(x_n) - \ell\ell'\|_F \leq \underbrace{\|f(x_n) - \ell\|_F}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}0}\ \underbrace{\|g(x_n)\|_F}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}\|\ell'\|_F} + \|\ell\|_F\ \underbrace{\|g(x_n) - \ell'\|_F}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Ceci étant vrai pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A qui converge vers a, d'après le théorème 1, $f.g$ admet une limite en a égale à $\ell\ell'$.

□

Proposition 9. *Limite d'une application composée*

Soit $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F), (G, \|\cdot\|_G)$ des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$; $A \subset E$ et $B \subset F$ des ensembles non vides ; $a \in \overline{A}$ et $b \in \overline{B}$; et $f : A \to F$ et $g : B \to G$.
Si $f : A \to F$ admet b pour limite en a, $g : B \to G$ admet une limite en b et $f(A) \subset B$, alors $g \circ f$ admet une limite en a et on a :

$$\lim_{x\to a} g \circ f(x) = \lim_{y\to b} g(y).$$

Démonstration.

On suppose $f(A) \subset B$, $f : A \to F$ admet b pour limite en a et $g : B \to G$ admet disons ℓ pour limite en b.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans A qui converge vers a. Comme $\lim_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim_{y\to b} g(y) = \ell$, d'après le théorème 1, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans B converge vers b et donc la suite $(g\circ f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans G converge vers ℓ.
Ceci étant vrai pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A qui converge vers a, d'après le théorème 1, $g\circ f$ admet une limite en a et $\lim_{x\to a} g\circ f(x) = \ell = \lim_{y\to b} g(y)$. □

f. Limite dans un espace produit

Proposition 10.

Soit $q\in\mathbb{N}^*$, $(F_1, \|\cdot\|_{F_1}), ..., (F_q, \|\cdot\|_{F_q})$ des espaces vectoriels normés, $F = F_1\times ...\times F_q$, $a\in\overline{A}$, $\ell = (\ell_1, ..., \ell_q)\in F$ et $f : A\to F$.

Pour $i\in[\![1,q]\!]$, on note $f_i = \pi_i\circ f : A\to F_i$ où $\pi_i : (y_1, ..., y_q)\in F\mapsto y_i\in F_i$ est la projection du produit sur F_i.

L'application f admet ℓ pour limite en a pour $\|\cdot\|_E$ et la norme produit sur F si, et seulement si, pour tout $i\in[\![1,q]\!]$, f_i admet ℓ_i pour limite en a.

Démonstration.

Comme F est muni de la norme produit, une suite $u = ((u_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}, ..., (u_n^{(q)})_{n\in\mathbb{N}})$ à valeurs dans F converge vers ℓ si, et seulement si, pour tout $i\in[\![1,q]\!]$, $(u_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_i.

Ainsi, d'après la caractérisation séquentielle de la limite (Théorème 1) :

l'application f admet ℓ pour limite en a ;

si, et seulement si,

pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A qui converge vers a, la suite $u = (f(a_n))_{n\in\mathbb{N}} = ((f_1(a_n))_{n\in\mathbb{N}}, ..., (f_q(a_n))_{n\in\mathbb{N}})$ à valeurs dans F converge vers $\ell = (\ell_1, ..., \ell_q)$;

si, et seulement si,

pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A qui converge vers a, pour tout $i\in[\![1,q]\!]$, $(f_i(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_i ;

si, et seulement si,

pour tout $i\in[\![1,q]\!]$, f_i admet ℓ_i pour limite en a.

□

Théorème 2.

Soit $q\in\mathbb{N}^*$. On suppose F est de dimension finie q.
Soit $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_q)$ une base de F, $a\in\overline{A}$, $\ell = \sum_{i=1}^q \ell_i\varepsilon_i\in F$, $f : A\to F$ et $(f_i)_{i\in[\![1,q]\!]}$ les applications composantes de f dans la base $\mathcal{C}$.

L'application f admet ℓ pour limite en a pour $\|\cdot\|_E$ et une norme quelconque sur F si, et

seulement si, pour tout $i \in [\![1, q]\!]$, f_i admet ℓ_i pour limite en a pour $\|\cdot\|_E$ et $|\cdot|$.

Démonstration.

On considère l'isomorphisme $u : F \to \mathbb{K}^q$ donné par $u : y = \sum_{i=1}^q y_i\varepsilon_i \mapsto (y_1, ..., y_q)$.
On munit F de la norme infinie $\|\cdot\|_{\infty,\mathcal{C}}$ dans la base $\mathcal{C}$ et on munit $\mathbb{K}^q$ muni de la norme infinie $\|\cdot\|_\infty$ qui correspond à la norme produit sur ce produit cartésien où chaque facteur $\mathbb{K}$ est muni de $|\cdot|$.
On rappelle qu'alors $\|\cdot\|_{\infty,\mathcal{C}} = \|\cdot\|_\infty \circ u$.
De ce fait, la fonction f admet pour limite $\ell = \sum_{i=1}^q \ell_i\varepsilon_i$ en a pour $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_{\infty,\mathcal{C}}$ si, et seulement si, $u \circ f$ admet pour limite $u(\ell) = (\ell_1, ..., \ell_q)$ en a pour $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_\infty$.
Ainsi, en remarquant que les applications composantes de f dans la base $\mathcal{C}$ de F sont égales aux applications composantes de $u \circ f$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^q$, on a, d'après la proposition précédente :

$$\text{l'application } f \text{ admet } \ell \text{ pour limite en } a \text{ pour } \|\cdot\|_E \text{ et } \|\cdot\|_{\infty,\mathcal{C}} ;$$

si, et seulement si,

$$\text{l'application } u \circ f \text{ admet pour limite } (\ell_1, ..., \ell_q) \text{ en } a \text{ pour } \|\cdot\|_E \text{ et } \|\cdot\|_\infty.$$

si, et seulement si,

$$\text{pour tout } i \in [\![1, q]\!],\ f_i \text{ admet } \ell_i \text{ pour limite en } a \text{ pour } \|\cdot\|_E \text{ et } |\cdot|.$$

Pour une norme quelconque sur F, on conclut grâce au fait que, F étant de dimension finie, toutes les normes sur F sont équivalentes et que la notion de limite est invariante par passage à une norme équivalente (Corollaire 6). □

g. Relations de comparaisons

Dans ce paragraphe, on étend (rapidement), comme on l'a fait pour les suites à valeurs vectorielles, les notations de Landau, aux fonctions vectorielles.

Définition 11. *Domination et négligeabilité vis-à-vis d'une fonction à valeurs scalaires*

Soit $a \in \overline{A}$, $f : A \to F$ et $\varphi : A \to \mathbb{K}$.

— On dit que f est **dominée** par φ quand x tend vers a s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ et un réel $\delta > 0$ tels que, pour tout $x \in A$, $\|x - a\| \leq \delta$ implique :

$$\|f(x)\|_F \leq M|\varphi(x)|.$$

On note alors $f = \underset{x\to a}{O}(\varphi)$ ou $f(x) = \underset{x\to a}{O}(\varphi(x))$.

— On dit que f est **négligeable** devant φ quand x tend vers a si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in A$, $\|x - a\| \leq \delta$ implique :

$$\|f(x)\|_F \leq \varepsilon|\varphi(x)|.$$

On note alors $f = \underset{x\to a}{o}(\varphi)$ ou $f(x) = \underset{x\to a}{o}(\varphi(x))$.

Définition 12. *Domination, négligeabilité et équivalence*

Soit $a \in \overline{A}$ et $f, g : A \to F$.

— On dit que f est **dominée** par g quand x tend vers a et on note $f = \underset{x\to a}{O}(\varphi)$ ou $f(x) = \underset{x\to a}{O}(\varphi(x))$. si :

$$f = O(\|g\|_F).$$

— On dit que f est **négligeable** devant g quand x tend vers a et on note $f = \underset{x\to a}{o}(g)$ ou $f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$ si :

$$f = o(\|g\|_F).$$

— On dit que f **est équivalente** à g quand x tend vers a et on note $f \underset{x\to a}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ si :

$$f - g = \underset{x\to a}{o}(\|g\|_F).$$

Remarque 7.

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur les fonctions de A dans F. On pourra donc employer la terminologie : "f et g sont équivalentes quand x tend vers a" si f équivaut g quand x tend vers a.

5. Applications continues

a. Continuité locale

Définition 13. *Application continue en un point*

Soit $a \in A$ et $f : A \to F$.

On dit que f est **continue en** a pour $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ si f admet une limite en a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ i.e.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A, \quad \|x - a\|_E \leq \delta \ \Rightarrow\ \|f(x) - f(a)\|_F \leq \varepsilon,$$

ou de manière équivalente, si, pour $x \in A$:

$$\|f(x) - f(a)\|_F \xrightarrow[\|x-a\|_E \to 0]{} 0.$$

Remarque 8.

— Encore une fois, attention ! La continuité dépend des normes dont sont munis les espaces de départ et d'arrivée de l'application au départ.
Par mesure de simplicité, s'il n'y a aucune ambiguité sur les normes utilisées au départ et à l'arrivée, on pourra dire "continue en a" sans précision.

— Dans la définition, la mention "$\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$" est redondante car, comme $a \in A$, si f admet ℓ pour limite en a, on a automatiquement $\ell = f(a)$.

Théorème 3. *Caractérisation séquentielle de la continuité*

Soit $a \in A$ et $f : A \to F$.

L'application f est continue en a si, et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A qui converge vers a,

$$f(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a).$$

Démonstration.

On applique la caractérisation séquentielle de la limite (Théorème 1) : f admet une limite en a et $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, si, et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A qui converge vers a, $f(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a)$. □

La caractérisation séquentielle de la continuité fournit un bon moyen de montrer qu'une application n'est pas continue en un point comme on pourra le voir dans l'exemple et les exercices du paragraphe 6 :

Proposition 11.

Soit $a \in A$ et $f : A \to F$.

L'application f est n'est pas continue en a si, et seulement si, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A qui converge vers a telle que

$$f(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \not\; f(a).$$

Démonstration.

Il s'agit de la négation de l'équivalence du théorème 3. □

b. Continuité globale

Définition 14. *Application continue sur un ensemble*

Soit $f : A \to F$.

On dit que f est **continue sur** A pour $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ si, pour tout $a \in A$, f est continue en a pour $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ i.e.

$$\forall a \in A,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A, \quad \|x - a\|_E \leq \delta \ \Rightarrow\ \|f(x) - f(a)\|_F \leq \varepsilon.$$

On note $C_{\|\cdot\|_E,\|\cdot\|_F}(A, F)$, ou plus simplement $C(A, F)$ s'il n'y a pas d'ambiguité sur les normes utilisées, l'ensemble des applications continues de A dans F pour $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$.

Exemple 7.

- La norme $\|\cdot\|_E$ est continue sur E pour $\|\cdot\|_E$ et $|\cdot|$.
- Une application constante de A dans F est continue sur A.

— Une homothéthie de E est continue sur E.

On démontre directement ces exemples avec la définition de la continuité pour se faire la main mais, a posteriori, on pourrait utiliser la proposition 19 pour ce faire !

— Soit $a \in E$. Pour tout $x \in E$, on a, d'après la seconde inégalité triangulaire :

$$|\|x\|_E - \|a\|_E| \leq \|x - a\|_E \xrightarrow[x \to a]{} 0,$$

d'où $\|\cdot\|_E$ admet pour limite $\|a\|_E$ en a.

Ainsi, l'application $x \mapsto \|x\|_E$ est continue en tout point a de E pour $\|\cdot\|_E$ et $|\cdot|$ donc elle est continue sur E pour $\|\cdot\|_E$ et $|\cdot|$.

— Soit $c \in F$. On note $f : x \mapsto c$. Soit $a \in A$. Pour tout $x \in A$, on a :

$$\|f(x) - f(a)\|_F = \|c - c\|_F = 0 \xrightarrow[x \to a]{} 0,$$

donc, f est continue en a car f admet $f(a)$ pour limite en a. Ceci étant vrai pour tout $a \in A$, f est continue sur A.

— Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On note $f = \lambda \mathrm{Id}_E$. Soit $a \in A$. Pour tout $x \in A$, on a :

$$\|f(x) - f(a)\|_E = |\lambda|.\|x - a\|_F = 0 \xrightarrow[x \to a]{} 0,$$

donc, f est continue en a car f admet $f(a)$ pour limite en a. Ceci étant vrai pour tout $a \in A$, f est continue sur A.

c. Continuité et comparaison de normes

Proposition 12.

Soit N_E, N'_E des normes sur E, N_F, N'_F des normes sur F, $a \in A$, $\ell \in F$ et $f : A \to F$.

— On suppose N_E dominée par N'_E et N_F dominée par N'_F.

Si f est continue en a pour N_E et N'_F alors f est continue en a pour N'_E et N_F.

— On suppose N_E, N'_E équivalentes et N_F, N'_F équivalentes.

L'application f est continue en a pour N_E et N'_F si, et seulement si, f est continue en a pour N'_E et N_F.

Autrement dit, la continuité est invariante par passage à des normes équivalentes.

Démonstration.

On applique la proposition 6 avec $\ell = f(a)$. □

Théorème 4.

On suppose E et F de **dimension finie**. L'espace vectoriel $C(A,F)$ est indépendant des normes dont sont munis E et F i.e. si N_E, N'_E sont des normes sur E et N_F, N'_F des normes sur F, alors

$$C_{N_E,N'_F}(A,F) = C_{N'_E,N_F}(A,F).$$

Démonstration.

Comme E et F sont de dimension finie, toutes les normes sur E et F sont équivalentes, d'après la proposition précédente, pour tout $f : A \to F$, on a $f \in C_{N_E,N'_F}(A,F)$ si, et seulement si, $f \in C_{N'_E,N_F}(A,F)$. D'où l'égalité $C_{N_E,N'_F}(A,F) = C_{N'_E,N_F}(A,F)$. □

Remarque 9.

En vertu du théorème précédent, en dimension finie, on pourra parler de continuité sans se soucier des normes dont sont munis les espaces de départ et d'arrivée !

d. Opérations sur les applications continues

Proposition 13. *Espace vectoriel des fonctions continues*

L'ensemble $C(A,F)$, muni de ses opérations usuelles, est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
En particulier, une combinaison linéaire d'applications continues est continue.

Démonstration.

Soit $a \in A$. On note $C_a(A,F)$ l'ensemble des fonctions de A dans F continue en a et $\mathcal{F}_a$ l'ensemble des fonctions de A dans F qui admettent une limite en a. D'après la proposition 7, $\mathcal{F}_a$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
Montrons que $C_a(A,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}_a$.

- L'application nulle $\mathbf{0} : x \mapsto 0_F$ de A dans F appartient à $C_a(A,F)$ d'après l'exemple 7.
- Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $f, g \in C_a(A,F)$. Alors f, g admettent respectivement $f(a)$ et $g(a)$ pour limites en a et, d'après la proposition 7, on a :

$$\lim_{x\to a}(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda \lim_{x\to a} f(x) + \mu \lim_{x\to a} g(x) = (\lambda f + \mu g)(a)$$

  Donc $\lambda f + \mu g$ admet $(\lambda f + \mu g)(a)$ pour limite en a. D'où $\lambda f + \mu g$ appartient à $C_a(A,F)$.

Il en résulte que $C_a(A,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}_a$.
De plus, $\mathcal{F}_a$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(A,F)$ des fonctions de A dans F, donc $C_a(A,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(A,F)$.
On remarque alors que $C(A,F) = \bigcap_{a\in A} C_a(A,F)$, d'où $C(A,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(A,F)$ comme intersection de sous-espaces vectoriels. □

Proposition 14. *Composition d'applications continues*

La composée de deux applications continues est continue.

Démonstration.

Soit $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F), (G, \|\cdot\|_G)$ des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$; $A \subset E$, $B \subset F$.
Soit $f : A \to F$ et $g : B \to G$. On suppose $f(A) \subset B$, f continue sur A et g continue sur B.
Montrons que $g \circ f$ est continue sur A.
Par hypothèse, pour tout $a \in A$, f admet $f(a)$ pour limite en a et, pour tout $b \in B$, g admet pour limite $g(b)$ en b.
Soit $a \in A$. D'après la proposition 9, comme $f(A) \subset B$, $g \circ f$ admet une limite en a et, en notant $b = \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, on a :

$$\lim_{x \to a} g \circ f(x) = \lim_{y \to b} g(y) = g(b) = g \circ f(a).$$

Donc $g \circ f$ est continue en a.
Ceci étant vrai pour tout $a \in A$, $g \circ f$ est continue sur A. □

Exercice 5.

Soit $A \subset E$ et $f : A \to F$ une application continue sur A. Montrer que $x \mapsto \|f(x)\|_F$ est une application continue sur A.

Correction.

L'application $f : A \to F$ est continue sur $A \subset F$ et $\|\cdot\|_F : \left| \begin{array}{ccc} F & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \|y\|_F \end{array} \right.$ est continue sur F (voire Exemple 7) donc par composition, $x \mapsto \|f(x)\|_F$ est continue sur A.

Corollaire 2. *Inverse d'une fonction continue à valeurs scalaires*

Soit $f : A \to \mathbb{K}$. Si f est continue sur A et ne s'annule pas sur A, alors l'application $\dfrac{1}{f} : x \mapsto \dfrac{1}{f(x)}$, définie de A dans $\mathbb{K}$, est continue sur A.

Correction.

On a $\frac{1}{f} = i \circ f$ où $i : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^* & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \frac{1}{t} \end{array} \right.$ est continue sur $\mathbb{K}^*$ donc $\frac{1}{f}$ est continue sur A comme composée d'applications continues.

Exercice 6.

On suppose que F est une algèbre munie d'une norme d'algèbre. Montrer que l'application $i : \left| \begin{array}{ccc} F^\times & \to & F \\ y & \mapsto & y^{-1} \end{array} \right.$ est continue sur $F^\times$, puis en déduire que si $f : A \to F$ est continue sur A et à valeurs dans $F^\times$, alors l'application $f^\times : x \mapsto f(x)^{-1}$ est continue sur A.

Démonstration.

— Soit $y, z \in F^\times$. Tout d'abord, cherchons à comparer $\|i(y) - i(z)\|_F = \|y^{-1} - z^{-1}\|_F$ avec $\|y - z\|_F$. On a, par sous-multiplicativité de la norme :

$$\|y^{-1} - z^{-1}\|_F = \|y^{-1}(z - y)z^{-1}\|_F \leq \|y^{-1}\|_F \|z - y\|_F \|z^{-1}\|_F = \|y^{-1}\|_F \|z^{-1}\|_F \|y - z\|_F.$$

Pour aboutir à la continuité en z, il nous faudrait majorer $\|y^{-1}\|_F$ lorsque y est proche de z. Or, par la seconde inégalité triangulaire et d'après ce qui précède, on a :

$$\|y^{-1}\|_F - \|z^{-1}\|_F \leq \|y^{-1} - z^{-1}\|_F \leq \|y^{-1}\|_F \|z^{-1}\|_F \|y - z\|_F,$$

donc, si $\|y - z\|_F \leq \frac{1}{2\|z^{-1}\|_F}$, on obtient $\|y^{-1}\|_F \leq \|z^{-1}\|_F + \frac{\|y^{-1}\|_F}{2}$, et ainsi $\|y^{-1}\|_F \leq 2\|z^{-1}\|_F$; d'où au final :

$$\|y^{-1} - z^{-1}\|_F \leq 2\|z^{-1}\|_F^2 \|y - z\|_F.$$

Ça y est, on a tout ce qu'il faut pour bien rédiger la continuité de i ! Allons-y.
Soit $z \in F^\times$. Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\delta = \min(\frac{1}{2\|z^{-1}\|_F}, \frac{\varepsilon}{2\|z^{-1}\|_F^2}) > 0$. Pour tout $y \in F^\times$ tel que $\|y - z\|_F \leq \delta$, on a, d'après nos calculs initiaux :

$$\|i(y) - i(z)\|_F = \|y^{-1} - z^{-1}\|_F \leq 2\|z^{-1}\|_F^2 \|y - z\|_F \leq \varepsilon.$$

Par suite, i est continue en z. Ceci étant vrai pour tout $z \in F^\times$, i est continue sur $F^\times$.

— Soit $f : A \to F$. On suppose f continue sur A et à valeurs dans $F^\times$. On a $f^\times = i \circ f$ donc $f^\times$ est continue sur A comme composée d'applications continues.

□

Proposition 15. *Produit de fonctions continues*

— Soit $f : A \to F$, $\varphi : A \to \mathbb{K}$.
Si f et φ sont continues sur A, alors l'application $\varphi.f : x \mapsto \varphi(x).f(x)$ est continue sur A.

— On suppose que F est une algèbre munie d'une norme d'algèbre. Soit $f, g : A \to F$.
Si f et g sont continues sur A, alors l'application $fg : x \mapsto f(x)g(x)$ est continue sur A.

Démonstration.

Si f et φ sont continues sur A, alors, d'après la proposition 8, pour tout $a \in A$, $\varphi.f$ admet $\varphi(a).f(a) = (\varphi.f)(a)$ pour limite en a, donc $\varphi.f$ est continue sur A.
On raisonne de même pour le deuxième point. □

Proposition 16. *Algèbres de fonctions continues*

— L'espace vectoriel $C(E,E)$, muni de la composition, est une algèbre sur $\mathbb{K}$.
— L'espace vectoriel $C(A,\mathbb{K})$, muni de la multiplication terme à terme, est une algèbre sur $\mathbb{K}$.

Démonstration.

— Montrons que $C(E,E)$ est une sous-algèbre de l'algèbre $\mathcal{F}(E,E)$ des fonctions de E dans lui-même.
i) D'après la proposition 13, $C(E,E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E,E)$.
ii) D'après la proposition 14, $C(E,E)$ est stable par composition.
iii) D'après l'exemple 7, l'application Id_E est continue sur E.
Par suite, $C(E,E)$ est une sous-algèbre de l'algèbre $\mathcal{F}(E,E)$ et donc une algèbre.

— Montrons que $C(A,\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de l'algèbre $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$ des fonctions de A dans $\mathbb{K}$.
i) D'après la proposition 13, $C(A,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$.
ii) D'après la proposition 15, $C(A,\mathbb{K})$ est stable par produit.
iii) D'après l'exemple 7, l'application constante $\mathbf{1} : x \mapsto 1$ est continue sur A.
Par suite, $C(A,\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de l'algèbre $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$ et donc une algèbre.

□

Exemple 8.

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de dimension finie et $P \in \mathbb{K}[X]$. L'application $\varphi_P : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \to & \mathcal{A} \\ u & \mapsto & P(u) \end{array} \right.$ appartient à $C(\mathcal{A},\mathcal{A})$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $I_k : u \mapsto u^k = (\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}(u))^k$ donc, comme $\mathrm{Id}_{\mathcal{A}} \in C(\mathcal{A},\mathcal{A})$, l'application I_k appartient à $C(\mathcal{A},\mathcal{A})$ comme produit d'éléments de l'algèbre $C(\mathcal{A},\mathcal{A})$. De plus, $I_0 : u \mapsto 1_{\mathcal{A}}$ appartient à $C(\mathcal{A},\mathcal{A})$ car toute application constante est continue.
Ainsi, en notant $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ (somme finie), on a :

$$\varphi_P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k I_k$$

donc φ_P appartient à $C(\mathcal{A},\mathcal{A})$ comme combinaison linéaire d'éléments de l'espace vectoriel $C(\mathcal{A},\mathcal{A})$.

e. Continuité et espace produit

Proposition 17. *Continuité d'une application dans un produit*

Soit $q \in \mathbb{N}^*$, $(F_1, \|\cdot\|_{F_1}), ..., (F_q, \|\cdot\|_{F_q})$ des espaces vectoriels normés, $F = F_1 \times ... \times F_q$ et $f : A \to F$.

Pour $i \in [\![1, q]\!]$, on note $f_i = \pi_i \circ f : A \to F_i$ où $\pi_i : (y_1, ..., y_q) \in F \mapsto y_i \in F_i$ est la projection du produit sur F_i.

L'application f est continue sur A pour $\|\cdot\|_E$ et la norme produit sur F si, et seulement si, pour tout $i \in [\![1, q]\!]$, f_i est continue sur A pour $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_{F_i}$.

Démonstration.

On a, d'après la proposition 10 :

$$\text{l'application } f \text{ est continue sur } A \text{ pour } \|\cdot\|_E \text{ et la norme produit sur } F$$

si, et seulement si,

$$\text{pour tout } a \in A,\ f \text{ admet } f(a) = (f_1(a), ..., f_q(a)) \text{ pour limite en } a \text{ pour } \|\cdot\|_E \text{ et la norme produit sur } F$$

si, et seulement si,

$$\text{pour tout } a \in A \text{ et pour tout } i \in [\![1, q]\!],\ f_i \text{ admet } f_i(a) \text{ pour limite en } a \text{ pour } \|\cdot\|_E \text{ et } \|\cdot\|_{F_i}$$

si, et seulement si,

$$\text{pour tout } i \in [\![1, q]\!],\ f_i \text{ est continue sur } A \text{ pour } \|\cdot\|_E \text{ et } \|\cdot\|_{F_i}.$$

□

Théorème 5.

Soit $q \in \mathbb{N}^*$. On suppose F est de dimension finie q.
Soit $\mathcal{C}$ une base de F, $f : A \to F$ et $(f_i)_{i \in [\![1,q]\!]}$ les applications composantes de f dans la base $\mathcal{C}$.

L'application f est continue sur A pour $\|\cdot\|_E$ et une norme quelconque sur F si, et seulement si, pour tout $i \in [\![1, q]\!]$, f_i est continue sur A pour $\|\cdot\|_E$ et $|\cdot|$.

Démonstration.

On utilise des arguments analogues à ceux de la proposition précédente en utilisant le théorème 2 pour chaque $a \in A$. □

Exemple 9.

L'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (\cos(t), \sin(t)) \end{array} \right.$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Les applications composantes de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont $f_1 = \cos$ et $f_2 = \sin$ qui sont continues sur $\mathbb{R}$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$ (et ce, pour toute norme sur $\mathbb{R}^2$ car il est de

dimension finie !).

Remarque 10.

Attention ! Le théorème précédent ne fonctionne pas avec les applications partielles dans une base : en effet, celle-ci peuvent être toutes continues sans que la fonction ne le soit ! Voire l'exemple 14 dans la suite.

f. Continuité uniforme

Définition 15. *Continuité uniforme*

Soit $A \subset E$ et $f : A \to F$. On dit que f est **uniformément continue sur A pour $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$** si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in A \quad \|x - y\|_E \leq \delta \ \Rightarrow\ \|f(x) - f(y)\|_F \leq \varepsilon.$$

Proposition 18.

- Toute application uniformément continue est continue.
- Toute application lipschitzienne est uniformément continue.

Démonstration.

Soit $A \subset E$ et $f : A \to F$ une application.

- On suppose f uniformément continue sur A. Ainsi

  $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in A \quad \|x - y\|_E \leq \delta \ \Rightarrow\ \|f(x) - f(y)\|_F \leq \varepsilon.$$

  Par suite, en particulier, pout tout $x \in A$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $y \in A$, $\|x - y\|_E \leq \delta \ \Rightarrow\ \|f(x) - f(y)\|_F \leq \varepsilon$, donc f est continue sur A.
- Soit $A \subset E$ et $f : A \to F$. On suppose que f est k-lipschitzienne sur E pour un certain $k \in \mathbb{R}_+$. Soit $\varepsilon > 0$. On pose, si $k \neq 0$, $\delta = \frac{\varepsilon}{k} > 0$ et si $k = 0$, $\delta = 42 > 0$. Alors, pour tous $x, y \in A$ tels que $\|x - y\|_E \leq \delta$, on a :

  $$\|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E \leq k\delta \leq \varepsilon.$$

  Par suite, f est uniformément continue sur A.

□

Exercice 7. *Rappels de Sup'*

Déterminer une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

1. f est continue sur I mais pas uniformément continue sur I.
2. f est uniformément continue sur I mais pas lipschitzienne sur I.

Correction.

1. Par exemple, la fonction $f : x \mapsto e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
   On rappelle l'inégalité classique : pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$e^x \geq 1 + x \quad \text{et donc} \quad e^x > x.$$
   Montrons que f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Considérons $\varepsilon = 1$. Pour tout $\delta > 0$, on pose $x = \frac{1}{\delta} + \delta$ et $y = \frac{1}{\delta}$; alors $|x - y| = \delta \leq \delta$ et :
   $$|f(x) - f(y)| = |e^x - e^y| = e^{\frac{1}{\delta}}(e^\delta - 1) > \frac{1}{\delta}\delta = 1 = \varepsilon.$$
   Par suite, f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
   On aurait pu aussi considérer la fonction $f : x \mapsto x^2$ (exercice).

2. Par exemple, la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$ mais pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.
   — Montrons tout d'abord que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Pour $x, y \in \mathbb{R}_+$ avec $x \leq y$, on a $\sqrt{xy} \geq x$, donc :
   $$(\sqrt{y} - \sqrt{x})^2 = y - 2\sqrt{xy} + x \leq y - x,$$
   d'où $\sqrt{y} - \sqrt{x} \leq \sqrt{y - x}$ et de même, pour $y \leq x$, $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x - y}$.
   Par suite, pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$:
   $$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}.$$
   Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\delta = \varepsilon^2 > 0$. Alors, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ avec $|x - y| \leq \delta$, on a :
   $$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|} \leq \sqrt{\delta} = \varepsilon.$$
   Il en résulte que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
   — Montrons désormais que f n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Le "problème" se situe au voisinage de 0. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :
   $$\frac{|f(x) - f(0)|}{|x - 0|} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty.$$
   Par suite, f n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

6. Exemples d'applications continues

a. Applications lipschitziennes

Proposition 19.

Toute application lipschitzienne est continue.

Démonstration.

D'après la proposition 18, toute application lipschitzienne est uniformément continue et donc continue. □

En utilisant la proposition précédente, on déduit alors les exemples suivants de l'exemple 6 :

Exemple 10.

- Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $((E_1, \|\cdot\|_1), ..., (E_p, \|\cdot\|_p))$ des espaces vectoriels normés et $E = E_1 \times ... \times E_p$ muni de la norme produit. Les projections sur chaque facteur sont continues sur E pour la norme produit sur E et la norme du facteur considéré.
- Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose E de dimension finie p et on considère $\mathcal{B}$ une base de E. Les applications coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont continues sur E pour n'importe quelle norme sur E.
- L'application $\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & d(x, A) \end{array}$ est continue sur E.

b. Fonctions polynomiales

Dans ce paragraphe, **on suppose E de dimension finie** p. On rappelle qu'alors l'algèbre $C(E, \mathbb{K})$ est indépendante de la norme dont on munit E.

Proposition 20.

L'ensemble $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ des formes linéaires sur E est un sous-espace vectoriel de $C(E, \mathbb{K})$.

Démonstration.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E. D'après l'exemple 10, les applications coordonnées $\mathrm{d}x_1, ..., \mathrm{d}x_p$ dans la base $\mathcal{B}$ appartiennent au sous-espace vectoriel $C(E, \mathbb{K})$ de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(E, \mathbb{K})$ des fonctions de E dans $\mathbb{K}$. Or, on a $\mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = \mathrm{Vect}(\mathrm{d}x_1, ..., \mathrm{d}x_p)$ qui est le plus petit sous-espace vectoriel e $\mathcal{F}(E, \mathbb{K})$ contenant $\mathrm{d}x_1, ..., \mathrm{d}x_p$, d'où $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $C(E, \mathbb{K})$. □

Théorème 6.

L'ensemble $\mathcal{P}(E, \mathbb{K})$ des fonctions polynomiale de E dans $\mathbb{K}$ est une sous-algèbre de $C(E, \mathbb{K})$.

En particulier, toute application polynomiale de E dans $\mathbb{K}$ est continue sur E pour n'importe quelle norme sur E.

Démonstration.

D'après la proposition 16, $C(E, \mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(E, \mathbb{K})$ et, de plus, d'après la proposition précédente, $\mathcal{L}(E, \mathbb{K}) \subset C(E, \mathbb{K})$.
Or, d'après la proposition 1, $\mathcal{P}(E, \mathbb{K})$ est la sous-algèbre de $\mathcal{F}(E, \mathbb{K})$ engendrée par $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ et donc la plus petite sous-algèbre de $\mathcal{F}(E, \mathbb{K})$ qui contient $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.
Par suite, $\mathcal{P}(E, \mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $C(E, \mathbb{K})$. □

Exemple 11.

— L'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \to & \mathbb{K} \\ (x,y) & \mapsto & (2x^3+y)^5 \end{array} \right.$ est continue sur $\mathbb{K}^2$.

— L'application $N : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \sqrt{x^2+y^2} \end{array} \right.$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application det : $M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est continue sur $M_n(\mathbb{K})$.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application com : $M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$ qui à une matrice associe sa comatrice, est continue sur $M_n(\mathbb{K})$.

— L'application f est polynomiale sur $\mathbb{K}^2$ car $g : (x,y) \mapsto 2x^3+y$ est polynomiale et, par stabilité des applications polynomiales par produit, $f = g^5$ est polynomiale (on aurait également pu utiliser la formule du binôme de Newton pour prouver directement que f est polynomiale dans la base canonique). Par suite, f est continue sur $\mathbb{K}^2$.

— On a $N = \sqrt{\cdot} \circ f$ où $f : (x,y) \mapsto x^2+y^2$. Comme f est polynomiale sur $\mathbb{R}^2$, elle est continue sur $\mathbb{R}^2$; de plus, $\sqrt{\cdot}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et on remarque que f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, donc N est continue sur $\mathbb{R}^2$ comme composée d'applications continues.
On aurait également pu remarquer plus simplement que $N = \|\cdot\|_2$ qui est continue sur $\mathbb{R}^2$ (voire exemple 7).

— D'après l'exemple 4, l'application det est polynomiale sur $M_n(\mathbb{K})$; elle est donc continue sur $M_n(\mathbb{K})$.

— D'après l'exemple 5, les applications coordonnées de l'application com dans la base canonique de $M_n(\mathbb{K})$ sont polynomiales et donc continues sur $M_n(\mathbb{K})$. Ainsi, d'après le théorème 5, com est continue sur $M_n(\mathbb{K})$.

c. Fonctions continues de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$

En vue du chapitre "Calcul différentiel" et de l'application du théorème fondamental du calcul différentiel, nous aurons besoin de déterminer si des fonctions de plusieurs variables sont continues (plus précisément, des fonctions dérivées partielles). L'objet de ce paragraphe est de se familiariser avec des méthodes et des exemples d'étude de la continuité de telles fonctions.

Soit $p, q \in \mathbb{N}^*$. Dans ce paragraphe, nous allons considérer des fonctions de $A \subset \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$. Comme ces espaces vectoriels sont de dimension finie, on rappelle que $C(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ est indépendant des normes dont ils sont munis.

Méthode 1.

Montrer qu'une fonction de $A \subset \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ est continue sur A

Pour montrer qu'une fonction f de A dans $\mathbb{R}^q$ est continue sur A, en vertu du théorème 5, on montre que les applications composantes de f dans une base de $\mathbb{R}^q$ - la plupart du temps, on utilisera la base canonique - sont continues de A dans $\mathbb{R}$.

Exemple 12.

La fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, définie, pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, par :

$$f(x,y,z) = \big(x^2y + z, x\sin(yz)\big)$$

est continue sur $\mathbb{R}^3$.

Dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, les applications composantes de f sont :

$$f_1 : (x, y, z) \mapsto x^2y + z \text{ et } f_2 : (x, y, z) \mapsto x \sin(yz).$$

— La fonction f_1 est polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}^3$;

— On a $g : (x, y, z) \mapsto yz$ est polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}^3$ et sin est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\sin \circ g$ est continue sur $\mathbb{R}^3$ par composition.
Ainsi, f_2 est continue sur $\mathbb{R}^3$ comme produit de la fonction coordonnée $(x, y, z) \mapsto x$ qui est continue sur $\mathbb{R}^3$ et de $\sin \circ g$.

Comme toutes les applications coordonnées de f sont continues sur $\mathbb{R}^3$, f est continue sur $\mathbb{R}^3$.

D'après la méthode précédente, l'étude la continuité d'une fonction de $A \subset \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ peut se faire en étudiant la continuité de q fonctions de A dans $\mathbb{R}$.
Lorsque la définition d'une fonction de A dans $\mathbb{R}$ comporte une "rupture" de formule (voire l'exemple suivant), les théorèmes généraux que l'on a utilisés dans l'exemple précédent, ne s'appliquent plus ; il faut revenir à la définition de la continuité pour s'en sortir.

Méthode 2.

Montrer qu'une fonction de $A \subset \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ est continue en un point.

Pour montrer qu'une fonction de A dans $\mathbb{R}$ est continue en $a \in A$, il suffit très souvent de :

- calculer $|f(x) - f(a)|$;
- majorer $|f(x) - f(a)|$ par $K\|x - a\|^\alpha$ où $K, \alpha > 0$ et la norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^p$ est choisie judicieusement en fonction de l'expression de f.

Une astuce usuelle pour aboutir à la majoration précédente est de remarquer que pour les normes les plus courantes sur $\mathbb{R}^p$ (les normes $1, 2$ et infinie par exemple), on a, pour $(x_1, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p$ et $i \in [\![1, p]\!]$:

$$|x_i| \leq \|(x_1, ..., x_p)\|.$$

Exemple 13.

La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ comme quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$ dont le dénominateur ne s'annule par sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$: en effet, la dénominateur est polynomiale sur $\mathbb{R}^2$ donc continue sur $\mathbb{R}^2$; et le dénominateur est continue sur $\mathbb{R}^2$ comme composée de fonctions continues (voire exemple 11).

Il nous reste à étudier la continuité de f en $(0,0)$. Comme il y a "rupture" de formule entre $(0,0)$ et $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on doit revenir à la définition de la continuité comme précisé dans la méthode précédente.
Le dénominateur de la fraction est égal à la norme 2 sur $\mathbb{R}^2$, utilisons la ! On a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, en utilisant l'astuce proposé dans la méthode, à savoir $|x| \leq \|(x,y)\|_2$ et $|y| \leq \|(x,y)\|_2$:

$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(0,0)| &= \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &\leq \frac{\|(x,y)\|_2.\|(x,y)\|_2}{\|(x,y)\|_2} \\ |f(x,y) - f(0,0)| &\leq \|(x,y)\|_2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 \end{aligned}$$

Donc f est continue en $(0,0)$.
Il en résulte que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8.

Montrer que les fonctions suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} (x+y)\sin\left(\dfrac{1}{x^4+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Correction.

On remarque que, pour $i = 1, 2, \infty$, on a, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|x| \leq \|(x,y)\|_i \text{ et } |y| \leq \|(x,y)\|_i.$$

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme quotient de fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}^2$ dont le dénominateur ne s'annule par sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
   Il nous reste à étudier la continuité de f en $(0,0)$. Le dénominateur de la fraction fait penser à la norme 2 sur $\mathbb{R}^2$, utilisons la ! On a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, en utilisant la remarque initiale :

$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(0,0)| &= \frac{|x|^3|y|^3}{x^2+y^2} \\ &\leq \frac{\|(x,y)\|_2^3.\|(x,y)\|_2^3}{\|(x,y)\|_2^2} \\ |f(x,y) - f(0,0)| &\leq \|(x,y)\|_2^3 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 \end{aligned}$$

   Donc f est continue en $(0,0)$.

2. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$: en effet,

— la fonction $(x,y) \mapsto x+y$ est polynomiale ;
— la fonction $(x,y) \mapsto \sin\left(\frac{1}{x^4+y^2}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme composée de $(x,y) \mapsto x^4+y^2$ qui est polynomiale et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ qui est continue sur $\mathbb{R}^*$ et de sin qui est continue sur $\mathbb{R}$.

Étudions la continuité de g en $(0,0)$. Le $x+y$ fait penser à la norme 1 sur $\mathbb{R}^2$, utilisons la ! On a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$\begin{aligned} |g(x,y) - g(0,0)| &= |x+y|.\left|\sin\left(\frac{1}{x^4+y^2}\right)\right| \\ &\leq (|x|+|y|).1 \\ |g(x,y) - g(0,0)| &\leq \|(x,y)\|_1 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 \end{aligned}$$

Donc g est continue en $(0,0)$.
Il en résulte que g est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Méthode 3.

Montrer qu'une fonction de $A \subset \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas continue en un point.

Soit $f : A \to \mathbb{R}$. En vertu de la proposition 11, pour montrer que f est n'est pas continue en a (étant donnée une valeur pour $f(a)$), il suffit de déterminer une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E tels que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ et

$$f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\not\longrightarrow} f(a).$$

Exemple 14.

La fonction $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ n'est pas continue en $(0,0)$ mais ses applications partielles en $(0,0)$ dans la base canonique sont toutes continues en 0.

On prend, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$. Alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} (0,0)$ et on a :

$$f(u_n) = \frac{\frac{1}{n}.\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0).$$

Ainsi, d'après la caractérisation séquentielle de la continuité, f n'est pas continue en $(0,0)$.

De plus, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, les applications partielles de f en $(0,0)$ sont :

$$f_x : x \mapsto f(x,0) = 0 \text{ et } f_y : y \mapsto f(0,y) = 0$$

qui sont bien continues en 0 (et même sur $\mathbb{R}$) car constantes.

Exercice 9.

Montrer que la fonction suivante ne sont pas continue en $(0,0,0)$:

$$g(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xy+yz}{x^2+2y^2+2z^2} & \text{si } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Correction.

On prend, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$. Alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} (0,0,0)$ et on a :

$$g(u_n) = \frac{\frac{1}{n}.\frac{1}{n}+0}{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+0} = \frac{1}{3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{3} \neq 0 = g(0,0,0).$$

Ainsi, d'après la caractérisation séquentielle de la continuité, g n'est pas continue en $(0,0,0)$.

Remarque 11.

Pour montrer qu'une fonction de $A \subset \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas prolongeable par continuité en a, il suffit donc de trouver deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent vers a et telles que $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne convergent pas vers une même limite (ou que l'une des deux ne converge pas du tout !)

Exercice 10.

Déterminer le domaine de définition de la fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ et montrer qu'elle n'est pas prolongeable par continuité en $(0,0)$.

Correction.

Le dénomniateur $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ ne s'annule qu'en $(0,0)$ donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
On prend, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ et $v_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$. Alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} (0,0)$, $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} (0,0)$ et on a :

$$f(u_n) = \frac{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

et

$$f(v_n) = \frac{\frac{1}{n^2}-0}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}.$$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n)$.
Ainsi, d'après la caractérisation séquentielle de la continuité, f n'est pas prolongeable par continuité en $(0,0)$.

Partie B

Continuité des applications linéaires et multilinéaires

1. Continuité et applications linéaires

a. Notation et caractérisation

On rappelle la notation $\mathcal{L}(E,F)$ pour désigner l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Notation 2.

On note $\mathcal{L}_c(E,F) = \mathcal{L}(E,F) \cap C(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de $(E, \|\cdot\|_E)$ dans $(F, \|\cdot\|_F)$.

Théorème 7. *Caractérisation des applications linéaires continues*

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) f est continue sur E ;

ii) f est continue en 0_E ;

iii) il existe un réel $k \geq 0$ tel que, pour tout $x \in E$,

$$\|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E.$$

iv) f est lipschitzienne sur E.

Démonstration.

Montrons i)⇒ii)⇒iii)⇒iv)⇒i)

- i)⇒ii). Si f est continue sur E, alors f est continue en tout point de E et donc, en particulier, est continue en $0_E \in E$.
- ii)⇒iii). On suppose f est continue en 0_E :

  $$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in E \quad \|x - 0_E\|_E \leq \delta \ \Rightarrow\ \|f(x) - f(0_E)\|_F \leq \varepsilon,$$

  ce qui peut se réécrire, comme $f(0_E) = 0_F$ par linéarité de f :

  $$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in E \quad \|x\|_E \leq \delta \ \Rightarrow\ \|f(x)\|_F \leq \varepsilon,$$

  Prenons $\varepsilon = 1 > 0$. On pose $k = \frac{1}{\delta} > 0$.
  Pour $x = 0_E$, on a $\|f(0_E)\|_F = \|0_F\|_F = 0 \leq 0 = k.\|0_E\|_E$.
  Soit $x \in E$ avec $x \neq 0_E$. On pose $y = \frac{\delta}{\|x\|_E} x \in E$. Par construction, on a $\|y\|_E = \delta \leq \delta$, d'où, par homogénéité de $\|\cdot\|_F$ et linéarité de f :

  $$\frac{\delta}{\|x\|_E}\|f(x)\|_F = \|f(y)\|_F \leq \varepsilon = 1.$$

Par suite, on a :

$$\|f(x)\|_F \leq \frac{1}{\delta}\|x\|_E = k\|x\|_E.$$

Il en résulte que, pour tout $x \in E$:

$$\|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E.$$

- iii)⇒iv). On suppose qu'il existe $k \geq 0$ tel que, pour tout $x \in E$,

$$\|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E.$$

Soit $x, y \in E$. Comme f est linéaire, on a :

$$\|f(x) - f(y)\|_F = \|f(x-y)\|_F \leq k\|x-y\|_E.$$

- iv)⇒i). Toute application lipschitzienne est continue d'après la proposition 19.

□

Exemple 15.

— On considère $E = C([0,1], \mathbb{K})$. L'application $T : \left| \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$ est une application linéaire continue sur E muni de la norme $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ ou $\|\cdot\|_\infty$.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. L'endomorphisme $D_n : P \mapsto P'$ de $\mathbb{K}_n[X]$ est continue sur $\mathbb{K}_n[X]$.

— L'application T est linéaire par linéarité de l'intégrale. Prouvons sa continuité sur E muni de la norme infinie. Pour tout $f \in E$, on a :

$$|T(f)| = \left| \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t = \|f\|_1.$$

Par suite, d'après la caractérisation des applications linéaires continues, T est continue sur E pour $\|\cdot\|_1$.
Comme $\|\cdot\|_1$ est dominée par $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$, d'après la proposition 12, T est continue sur E pour $\|\cdot\|_2$ et pour $\|\cdot\|_\infty$.

— On munit $\mathbb{K}_n[X]$ de la norme $\|\cdot\|$ du maximum des coefficients en valeur absolue. Pour tout $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}_n[X]$, on a :

$$\|D_n(P)\| = \|P'\| = \max_{0\leq k\leq n} (\underbrace{k}_{\leq n} \underbrace{|a_k|}_{\leq \|P\|}) \leq n\|P\|.$$

Par suite, D_n appartient à $\mathcal{L}_c(\mathbb{K}_n[X])$ pour n'importe quel norme sur $\mathbb{K}_n[X]$ au départ et à l'arrivée car celui-ci est de dimension finie.
Remarque : nous pourrons bientôt conclure beaucoup plus vite quant à la continuité de D_n ; en effet, d'après le théorème 8 que nous démontrerons dans la suite, comme l'es-

> *pace de départ $\mathbb{K}_n[X]$ de l'application linéaire D_n est de dimension finie, celle-ci est automatiquement continue sur $\mathbb{K}_n[X]$!*

b. Structures sur l'ensemble des applications linéaires continues

Proposition 21.

L'ensemble $\mathcal{L}_c(E,F)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Démonstration.

On a $\mathcal{L}_c(E,F) = C(E,F) \cap \mathcal{L}(E,F)$ donc $\mathcal{L}_c(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E,F)$ (espace vectoriel des fonctions de E dans F) comme intersection de sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(E,F)$. □

Proposition 22.

On munit de E de sa norme $\|\cdot\|_E$ que ce soit comme espace de départ et comme espace d'arrivée des applications considérées.

L'espace vectoriel $\mathcal{L}_c(E)$, muni de la composition, est une algèbre sur $\mathbb{K}$.

Démonstration.

On a $\mathcal{L}_c(E) = C(E,E) \cap \mathcal{L}(E)$ donc $\mathcal{L}_c(E)$ est une algèbre comme intersections de sous-algèbres de l'algèbre $\mathcal{F}(E,E)$. □

c. Applications linéaires non continues

Proposition 23.

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. L'application f est continue sur E si, et seulement si, l'application de $E \setminus \{0_E\}$ dans $\mathbb{R}$:

$$x \mapsto \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

est bornée sur $E \setminus \{0_E\}$.

Démonstration.

$$f \text{ est continue}$$

si, et seulement si,

$$\text{il existe } k \geq 0 \text{ tel que, pour tout } x \in E,\ \|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E.$$

si, et seulement si,

$$\text{il existe un réel } k \geq 0 \text{ tel que, pour tout } x \in E \setminus \{0_E\},\ \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq k.$$

si, et seulement si,

$$x \mapsto \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \text{ est bornée sur } E \setminus \{0_E\}.$$

□

On utilise très souvent la proposition suivante pour montrer qu'une application linéaire n'est pas continue.

Proposition 24.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. L'application f n'est pas continue sur E si, et seulement si, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $E \setminus \{0_E\}$ telle que

$$\frac{\|f(x_n)\|_F}{\|x_n\|_E} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Démonstration.

Il s'agit de la négation de l'équivalence énoncée par la proposition 23. □

Exemple 16.

L'endomorphisme $D : P \mapsto P'$ de $\mathbb{K}[X]$ n'est pas continue sur $\mathbb{K}[X]$ pour la norme $\|\cdot\| : P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \mapsto \|P\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k|$ dans lui-même muni de la même norme.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P_n = X^n \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. On a alors :

$$\frac{\|D(P_n)\|}{\|P_n\|} = \frac{n}{1} = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Donc D n'est pas continue sur $\mathbb{K}[X]$ pour $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|$.

Remarque : attention, l'inégalité de l'exemple 15 tient toujours, et on aurait pu se faire avoir : ici, $n = deg(P)$ peut être aussi grand que l'on veut sur $\mathbb{K}[X]$!

Exercice 11.

Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$. On considère l'application $\varphi : f \mapsto f(1)$.

1. Montrer que φ est linéaire.
2. Montrer que φ est continue pour $\|\cdot\|_\infty$ mais pas pour $\|\cdot\|_1$.

Correction.

1. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f, g \in E$. On a :
$$\varphi(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)(1) = \lambda f(1) + \mu g(1) = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g);$$
donc φ est linéaire.
2. On a, pour $f \in E$,
$$|\varphi(f)| = |f(1)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = \|f\|_\infty.$$
Donc φ est continue pour $\|\cdot\|_\infty$.
On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto x^n$. On a :
$$\frac{|\varphi(f_n)|}{\|f_n\|_1} = n + 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$
Par suite, $f \mapsto \frac{|\varphi(f)|}{\|f\|_1}$ n'est pas bornée. Donc φ n'est pas continue pour $\|f\|_1$.

d. Continuité de l'identité et comparaison de normes

Proposition 25.

Soit N, N' des normes sur E.

— La norme N est dominée par N' si, et seulement si, $Id_E : (E, N') \to (E, N)$ est continue sur E pour N' au départ et N à l'arrivée.

— Les normes N et N' sont équivalentes si, et seulement si,
$$Id_E : (E, N') \to (E, N)$$
et
$$Id_E : (E, N) \to (E, N').$$
sont continues sur E.

Démonstration.

— L'application $Id_E : (E, N') \to (E, N)$ est linéaire sur E donc, d'après la caractérisation des applications linéaires continues, elle est continue sur E pour N' au départ et N à l'arrivée si, et seulement si, il existe un réel $k \geq 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $N(x) \leq kN'(x)$ i.e. N est dominée par N'.

— On applique le point précédent en remarquant que deux normes sont équivalentes si, et seulement si, l'une domine l'autre et l'autre domine l'une.

□

e. Applications linéaires continues en dimension finie

Comme on l'a vu précédemment, si les espaces de départ et d'arrivée sont de dimension finie, la continuité d'une application ne dépend pas de la norme.
Dans le cas particulier des applications linéaires, comme on va le voir ci-dessous, nous allons obtenir un

résultat encore plus frappant : si l'espace de départ est de dimension finie, une application linéaire est automatiquement continue !

Théorème 8.

Si E est de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est continue sur E pour toutes normes sur E et F.

Autrement dit, si E est de dimension finie, $\mathcal{L}_c(E,F) = \mathcal{L}(E,F)$.

Démonstration.

On suppose que E est de dimension finie p. Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E. On munit E de la norme infinie $\|x\|_{\infty,\mathcal{B}}$ dans la base $\mathcal{B}$ i.e. pour $x = \sum_{i=p}^{n} x_i e_i \in E$, $\|x\|_{\infty,\mathcal{B}} = \max(|x_1|, ..., |x_p|)$. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrons que f est continue sur E pour $\|x\|_{\infty,\mathcal{B}}$ et $\|\cdot\|_F$.

— *1ère preuve : directe.*

On pose $k = \sum_{i=1}^{p} \|f(e_i)\|_F \geq 0$ (*a posteriori* bien sûr !).

Pour tout $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \in E$. On a, par linéarité de f et par inégalité triangulaire puis homogénéité pour $\|\cdot\|_F$:

$$\|f(x)\|_F = \|\sum_{i=1}^{p} x_i f(e_i)\|_F \leq \sum_{i=1}^{p} \underbrace{|x_i|}_{\leq \|x\|_{\infty,\mathcal{B}}} \|f(e_i)\|_F \leq \left(\sum_{i=1}^{p} \|f(e_i)\|_F\right) \|x\|_{\infty,\mathcal{B}} = k\|x\|_{\infty,\mathcal{B}}.$$

Par suite, f est continue sur E pour $\|\cdot\|_{\infty,\mathcal{B}}$ et $\|\cdot\|_F$.

— *2nde preuve : par continuité des formes linéaires.*

Comme f est linéaire et E est de dimension finie, $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie et notons $q \in \mathbb{N}$ sa dimension. Si $q = 0$, alors f est constante en 0_F donc continue sur E.

Supposons $q \geq 1$. Soit $\mathcal{C}$ une base de $\mathrm{Im}(f)$. Alors les q applications composantes de f dans la base $\mathcal{C}$ sont continues de E dans $\mathbb{K}$ d'après la proposition 20 car ce sont des formes linéaires sur E qui est de dimension finie (en effet, d'après la proposition 1, pour tout $i \in [\![1, q]\!]$, $f_i = \mathrm{d}y_i \circ f$ est linéaire de E dans $\mathbb{K}$ comme composée d'applications linéaires).

Par suite, d'après la proposition 14, $f : E \to \mathrm{Im}(f)$ est continue sur E pour $\|\cdot\|_{\infty,\mathcal{B}}$ et la norme induite $\|\cdot\|_F$ de F sur $\mathrm{Im}(f)$.

A fortiori, f est donc continue sur E pour $\|\cdot\|_{\infty,\mathcal{B}}$ et $\|\cdot\|_F$ (il suffit pour cela de simplement réécrire la définition de la continuité pour s'en convaincre).

Il en résulte que f est continue sur E pour n'importe quelle norme sur E, d'après la proposition 12, car E est dimension finie et pour n'importe quelle norme sur F car nous raisonnions avec une norme quelconque sur F dans nos preuves.

Ainsi, pour toutes normes sur E et sur F, $\mathcal{L}(E,F) \subset \mathcal{L}_c(E,F)$ et donc $\mathcal{L}(E,F) = \mathcal{L}_c(E,F)$. □

Exemple 17.

— On suppose E de dimension finie. Les projecteurs et symétries de E sont continus sur E.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $\mathrm{Tr} : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ qui à une matrice associe sa trace, et

l'application ${}^t : M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$ qui à une matrice associe sa transposée, sont continues sur $M_n(\mathbb{K})$.

Il suffit de remarquer que toutes les applications proposées sont linéaires d'espace de départ de dimension finie.

Exercice 12.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'application $M \mapsto M^{-1}$ est continue sur $GL_n(\mathbb{K})$ en utilisant la formule liant l'inverse d'une matrice carrée inversible à sa comatrice.

Correction.

Pour $M \in GL_n(\mathbb{K})$, on rappelle que $M^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)} {}^t\mathrm{com}(M)$.
Ainsi, si on note $i : M \mapsto M^{-1}$, $\varphi : M \mapsto \frac{1}{\det}$ et $f = {}^t\cdot \circ \mathrm{com} : M \mapsto {}^t\mathrm{com}(M)$, on a $i = \varphi.f$.
De plus,

- l'application φ est continue sur $GL_n(\mathbb{K})$ car det est polynomiale sur $M_n(\mathbb{K})$ donc continue sur $M_n(\mathbb{K})$ (voire Exemple 6) et à valeurs dans $\mathbb{K}^*$ sur $GL_n(\mathbb{K})$.
- l'application f est continue comme composée de l'application com qui est continue sur $M_n(\mathbb{K})$ car $M_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie et ses applications composantes dans la base canonique de $M_n(\mathbb{K})$ sont polynomiales (voire Exemple 5) ; et de l'application transposée qui est continue sur $M_n(\mathbb{K})$ car linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$ qui est de dimension finie.

Par suite, $i = \varphi.f$ est continue sur $M_n(\mathbb{K})$ comme produit de fonctions continues sur $M_n(\mathbb{K})$ (voire Proposition 15).

Remarque : dans l'exercice 6, on avait déjà prouvé, avec la définition de la continuité, que le passage à l'inverse dans une algèbre munie d'une norme sous-multiplicative est continue sur l'ensemble des inversibles. Comme $M_n(\mathbb{K})$ est une algèbre admettant des normes sous-multiplicatives et est de dimension finie, ceci prouve d'une manière plus directe que $M \mapsto M^{-1}$ est continue sur $GL_n(\mathbb{K})$ pour n'importe quelle norme.

Remarque 12.

En dimension infinie, un projecteur n'est pas forcément continu comme en atteste l'exercice suivant.

Exercice 13.

On note $E = \mathbb{K}[X]$ et on munit E de la norme $\|\cdot\| : P \mapsto \|P\| = \displaystyle\int_0^1 |P(t)|\,\mathrm{d}t$.
On considère l'application $p : E \to E$ définie, pour $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in E$, par :

$$p(P) = a_0 \text{ (polynôme constant en } a_0).$$

Montrer que p est un projecteur de E qui n'est pas continue sur E pour $\|\cdot\|$ au départ et à l'arrivée.

Correction.

Tout d'abord, p est une application linéaire car, pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k, Q = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k \in E$, on a $\lambda P + Q = \sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda a_k + b_k) X^k$ et ainsi :

$$p(\lambda P + Q) = \lambda a_0 + b_0 = \lambda p(P) + p(Q).$$

De plus, p est un projecteur car $p \in \mathcal{L}(E)$ et, pour tout $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in E$,

$$p^2(P) = p(a_0) = p(a_0 X^0 + 0.X^1 + 0.X^2 + ...) = a_0 = p(P),$$

d'où $p^2 = p$.
Montrons que P n'est pas continue sur E.
On considère la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par $P_n = (1-X)^n$. On a :

$$\frac{\|p(P_n)\|}{\|P_n\|} = \frac{1}{\frac{1}{n+1}} = n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Il en résulte que p est un projecteur sur E qui n'est pas continue sur E pour $\|\cdot\|$ au départ et à l'arrivée.

2. Continuité et applications multilinéaires

a. Caractérisation des applications multilinéaires continues

Théorème 9. *Caractérisation des applications bilinéaires continues*

Soit E, F, G des espaces vectoriels normés et $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire où $E \times F$ est muni de la norme produit. On a équivalence entre les assertions suivantes :

i) B est continue sur $E \times F$;

ii) B est continue en $(0_E, 0_F)$;

iii) il existe un réel $k \geq 0$ telle que, pour tout $(x, y) \in E \times F$:

$$\|B(x,y)\|_G \leq k\|x\|_E.\|y\|_F.$$

Démonstration.

La technique pour la démonstration de ii) implique iii) est analogue à celle utilisée pour la caractérisation des applications linéaires continues.

On montre i)⇒ii)⇒iii)⇒i)

- i)⇒ii). Si B est continue sur $E \times F$, alors f est continue en $(0_E, 0_F) \in E \times F$.
- ii)⇒iii) On suppose B continue en $(0_E, 0_F)$.

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $(x, y) \in E \times F$,

$$\|(x, y)\| \leq \delta \ \Rightarrow \ \|B(x, y)\|_G \leq \varepsilon.$$

Pour $\varepsilon = 1$, il existe $\delta > 0$ vérifiant la proposition ci-dessus. Notons $k = \frac{1}{\delta^2} > 0$. Soit $(x, y) \in E \times F$ avec $x \neq 0_E$ et $y \neq 0_F$. On pose :

$$x' = \frac{\delta}{\|x\|_E} x \quad \text{et} \quad y' = \frac{\delta}{\|y\|_F} y.$$

Alors $\|(x, y)\| = \max(\|x'\|_E, \|y'\|_F) = \delta$, donc

$$\|B(x', y')\|_G \leq \varepsilon = 1.$$

De plus, par bilinéarité, $\|B(x', y')\|_G = \frac{\delta^2}{\|x\|_E \|y\|_F} \|B(x, y)\|_G$, donc

$$\|B(x, y)\|_G \leq k\|x\|_E \|y\|_F.$$

Et on remarque que cette inégalité est également vraie pour $x = 0_E$ ou $y = 0_F$.

- iii)⇒i). On suppose iii). Soit $(x_0, y_0) \in E \times F$. Soit $\varepsilon > 0$. On pose :

$$\delta = \frac{1}{2k} \max\left(\sqrt{\varepsilon}, \frac{\varepsilon}{(\|x_0\|_E + \|y_0\|_F)}\right).$$

Alors, on a, pour tout $(x, y) \in E \times F$ tel que $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leq \delta$:

$$\begin{aligned}
\|B(x, y) - B(x_0, y_0)\|_G &\leq \|B(x, y) - B(x, y_0)\|_G + \|B(x, y_0) - B(x_0, y_0)\|_G \\
&\leq \|B(x, y - y_0)\|_G + \|B(x - x_0, y_0)\|_G \\
&\leq k(\|x\|_E . \|y - y_0\|_F + \|x - x_0\|_E . \|y_0\|_F) \\
&\leq k(\underbrace{\|x\|_E}_{\leq \|x_0\|_E + \delta} + \|y_0\|_F) \|(x, y) - (x_0, y_0)\| \\
\|B(x, y) - B(x_0, y_0)\|_G &\leq k(\delta^2 + \delta(\|x_0\|_E + \|y_0\|_F)) \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Donc B est continue sur $E \times F$ muni de la norme produit.

□

Exemple 18.

Soit E un espace préhilbertien, $(\cdot|\cdot)$ un produit scalaire sur E.
Le produit scalaire $(\cdot|\cdot) : E \times E \to \mathbb{K}$ est continue sur $E \times E$ où E est muni de la norme $\|\cdot\|$ associée à ce produit scalaire et $E \times E$ est muni de la norme produit.

Par définition, $(\cdot|\cdot)$ est bilinéaire sur $E \times E$ et, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a, pour tout $(x, y) \in E \times E$:

$$|(x|y)| \leq \|x\| . \|y\|.$$

Par suite, d'après la caractérisation des applications bilinéaires continues (Théorème 9), $(\cdot|\cdot)$ est

continue sur $E \times E$.

Théorème 10. *Caractérisation des applications multilinéaires continues*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E_1, ..., E_n, G$ des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$ et $M : E \to G$ une application n-linéaire où $E = E_1 \times ... \times E_n$ est muni de la norme produit. On a équivalence entre les assertions suivantes :

i) M est continue sur E ;

ii) M est continue sur en 0_E ;

iii) il existe un réel $k \geq 0$ tel que, pour tout $(x_1, ..., x_n) \in E$:

$$\|M(x_1, ..., x_n)\|_G \leq k\|x_1\|_{E_1}...\|x_n\|_{E_n}.$$

Démonstration.

On raisonne de la même manière que dans la démonstration du théorème 9 pour i) implique ii) et ii) implique iii). Pour iii) implique ii), on raisonne par récurrence, même si, bien sûr, certaines idées sont similaires à celles du cas "bilinéaire".

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}_n$ ="pour tous $E_1, ..., E_n, G$ espaces vectoriels normés, pour tout $M : E \to G$ application n-linéaire où $E = E_1 \times ... \times E_n$ est muni de la norme produit, iii) implique ii)".
Montrons, par récurrence sur $\mathbb{N}^*$, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

- **Initialisation.** Il s'agit de iii) implique i) dans le théorème 7 (caractérisation des applications linéaires continues).
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie. Montrons $\mathcal{P}_{n+1}$.
  Soit $E_1, ..., E_{n+1}, G$ des espaces vectoriels normés, $M : E \to G$ une application $n+1$-linéaire où $E = E_1 \times ... \times E_{n+1}$ est muni de la norme produit $\|\cdot\|$.
  On suppose qu'il existe un réel $k \geq 0$ tel que tel que, pour tout $(x_1, ..., x_{n+1}) \in E$, $\|M(x_1, ..., x_{n+1})\|_G \leq k\|x_1\|_{E_1}...\|x_{n+1}\|_{E_{n+1}}$.
  Montrons que M est continue sur E. Soit $a = (a_1, ..., a_{n+1}) \in E$ et un réel $\varepsilon > 0$.
  Pour tout $x = (x_1, ..., x_{n+1}) \in E$, on a :

$$\begin{aligned} M(x) - M(a) &= M(x) - M(x_1, ..., x_n, a_{n+1}) + M(x_1, ..., x_n, a_{n+1}) - M(a) \\ &= M(x_1, ..., x_n, x_{n+1} - a_{n+1}) + M(x_1, ..., x_n, a_{n+1}) - M(a_1, ..., a_n, a_{n+1}). \end{aligned}$$

  — L'application $M_{a_{n+1}} : (x_1, ..., x_n) \mapsto M(x_1, ..., x_n, a_{n+1})$ est n-linéaire de $E_1 \times E_n$ dans G et, en posant $k' = k\|a_{n+1}\|_{E_{n+1}} \geq 0$, on a, pour tout $(x_1, ..., x_n) \in E_1 \times ... \times E_n$:

$$\begin{aligned} \|M_{a_{n+1}}(x_1, ..., x_n)\|_G &= \|M(x_1, ..., x_n, a_{n+1})\|_G \leq k\|x_1\|_{E_1}...\|x_n\|_{E_n}\|a_{n+1}\|_{E_{n+1}} \\ &= k'\|x_1\|_{E_1}...\|x_n\|_{E_n}. \end{aligned}$$

  Par suite, par hypothèse de récurrence, $M_{a_{n+1}}$ est continue sur $F = E_1 \times ... \times E_n$ muni de la norme produit que l'on note $\|\cdot\|_F$.
  Ainsi, il existe $\delta_1 > 0$ tel que, pour tout $(x_1, ..., x_n) \in F$ tel que $\|(x_1, ..., x_n) - (a_1, ..., a_n)\|_F \leq \delta_1$, on a :

$$\|M_{a_{n+1}}(x_1, ..., x_n) - M_{a_{n+1}}(a_1, ..., a_n)\|_G \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

— Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $x = (x_1, ..., x_{n+1}) \in E$ tel que $\|x - a\| \leq t$, comme, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ $\|x_i\|_{E_i} - \|a_i\|_{E_i} \leq \|x_i - a_i\|_{E_i} \leq \|x - a\| \leq t$, on a :

$$\begin{aligned}\|M(x_1, ..., x_n, x_{n+1} - a_{n+1})\|_G &\leq k \underbrace{\|x_1\|_{E_1}}_{\leq \|a_1\|_{E_1} + t} ... \underbrace{\|x_n\|_{E_n}}_{\leq \|a_1\|_{E_1} + t} \underbrace{\|x_{n+1} - a_{n+1}\|_{E_{n+1}}}_{\leq t} \\ &\leq kt \prod_{i=1}^{n} (\|a_i\|_{E_i} + t).\end{aligned}$$

La fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ qui à $t \mapsto t \prod_{i=1}^{n} (\|a_i\|_{E_i} + t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ car polynomiale sur $\mathbb{R}$; à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}_+^*$ et vaut 0 en 0, donc il existe un réel $\delta_2 > 0$ tel que :

$$k\delta_2 \prod_{i=1}^{n} (\|a_i\|_{E_i} + \delta_2) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

(si $k = 0$, tout réel $\delta_2 > 0$ convient).

On pose alors $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$. Par suite, pour tout $x = (x_1, ..., x_{n+1}) \in E$ tel que $\|x - a\| \leq \delta$, comme $\|(x_1, ..., x_n) - (a_1, ..., a_n)\|_F \leq \|x - a\| \leq \delta_1$ et $\|x - a\| \leq \delta_2$, on a :

$$\begin{aligned}\|M(x) - M(a)\|_G &= \|M(x_1, ..., x_n, x_{n+1} - a_{n+1}) + M(x_1, ..., x_n, a_{n+1}) - M(a_1, ..., a_n, a_{n+1})\|_G \\ &\leq \|M(x_1, ..., x_n, x_{n+1} - a_{n+1})\|_G + \|M_{a_{n+1}}(x_1, ..., x_n) - M_{a_{n+1}}(a_1, ..., a_n)\|_G \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ \|M(x) - M(a)\|_G &\leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Il en résulte que M est continue en a pour la norme produit sur E. Comme ceci est vrai pour tout $a \in E$, M est continue sur E pour la norme produit sur E.
Ainsi, $\mathbb{P}_{n+1}$ est vraie.

Par suite, on a montré, par récurrence sur $\mathbb{N}^*$, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.
D'où iii) implique i).

□

Exemple 19.

On suppose que E est une algèbre munie d'une norme $\|\cdot\|$ sous-multiplicative. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
L'application $M : \left| \begin{array}{ccc} E^n & \to & E \\ (x_1, ..., x_n) & \mapsto & x_1 ... x_n \end{array} \right.$ est une application n-linéaire continue sur E^n muni de la norme produit.

L'application M est multilinéaire par bilinéarité de l'application $(x, y) \mapsto xy$ de E^2 dans E. De plus, pour tout $(x_1, ..., x_n) \in E^n$, par sous-multiplicativité de la norme, on a :

$$\|M(x_1, ..., x_n)\| = \|x_1 .... x_n\| \leq \|x_1\| ... \|x_n\|.$$

Donc, d'après la caractérisation des applications multilinéaires continues, M est continue sur E^n pour la norme produit.

b. Applications multilinéaires continues en dimension finie

On généralise ici le résultat obtenu précédemment pour les applications linéaires continues en dimension finie.

Théorème 11.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E_1, ..., E_n$, G des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$.

Si $E_1, ..., E_n$ sont de dimension finie, toute application n-linéaire de $E = E_1 \times ... \times E_n$ dans G est continue sur E pour toutes normes sur E et G.

Démonstration.

On traite tout d'abord le cas $n = 2$ pour plus de clarté (tous les arguments y sont pour le cas général). On remarquera qu'on généralise directement ce qu'on avait fait pour la 1ère preuve du théorème 8.
On suppose E de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ et F de dimension $q \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_q)$ une base de F. On munit E et F des normes $\|\cdot\|_{\infty,\mathcal{B}}$ et $\|\cdot\|_{\infty,\mathcal{C}}$.
Soit $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire. On pose $k = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} x_i y_j \|B(e_i, \varepsilon_j)\|_G \geq 0$.
Pour tout $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \in E$ et $y = \sum_{j=1}^{q} y_j \varepsilon_j \in F$, on a, par bilinéarité de B :

$$B(x, y) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} x_i y_j f(e_i, \varepsilon_j);$$

d'où, par inégalité triangulaire et homogénéité pour $\|\cdot\|_G$:

$$\|B(x, y)\|_G \leq k\|x\|_{\infty,\mathcal{B}}\|y\|_{\infty,\mathcal{C}}.$$

Par suite, d'après la caractérisation des application bilinéaires continues, B est continue sur $E \times F$ muni de la norme produit.
Il en résulte que B est continue sur $E \times F$ pour n'importe quelle norme sur E, d'après la proposition 12, car $E \times F$ est dimension finie et pour n'importe quelle norme sur G car nous raisonnions avec une norme quelconque sur G dans nos preuves.

On produit tout de même la preuve du cas général $n \in \mathbb{N}^*$, qui repose sur les mêmes arguments que le cas $n = 2$, le seule "difficulté" étant de bien rédiger les indices :)
On suppose $E_1, ..., E_n$ de dimension finie respective $p_1, ..., p_n \in \mathbb{N}^*$ (on peut prendre directement dans $\mathbb{N}^*$ car, si l'un d'entre eux est de dimension nulle, toute application n-linéaire de E dans G est l'application constante en 0_G qui est continue sur E).
Soit, pour chaque $j \in [\![1, n]\!]$, $\mathcal{B}_k = (e_{j,1}, ..., e_{j,p_j})$ une base de E_j et $\|\cdot\|_{\infty,\mathcal{B}_j}$ la norme infinie sur E_j dans la base $\mathcal{B}_j$.
Soit $M : E \to G$ une application m-linéaire. On pose $k = \sum_{i_1=1}^{p_1} ... \sum_{i_n=1}^{p_n} \|M(e_{1,i_1}, ..., e_{n,i_n})\|_G \geq 0$.
Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, pour tout $x_j = \sum_{i_j=1}^{p_j} x_{j,i_j} e_{j,i_j} \in E_j$, on a :

$$M(x_1, ..., x_n) = \sum_{i_1=1}^{p_1} ... \sum_{i_n=1}^{p_n} x_{i_1}...x_{i_n} M(e_{1,i_1}, ..., e_{n,i_n}).$$

d'où, par inégalité triangulaire et homogénéité pour $\|\cdot\|_G$:

$$\|M(x_1, ..., x_n)\|_G \leq k\|x_1\|_{\infty,\mathcal{B}_1}...\|x_n\|_{\infty,\mathcal{B}_n}$$

Par suite, d'après la caractérisation des application multilinéaires continues, M est continue sur E muni de la norme produit.
Il en résulte que M est continue sur E pour n'importe quelle norme sur E, d'après la proposition 12, car E est dimension finie et pour n'importe quelle norme sur G car nous raisonnions avec une norme quelconque sur G dans nos preuves. □

Exemple 20.

- On suppose E de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. L'application n-linéaire $\det_{\mathcal{B}} : E^p \to \mathbb{K}$ est continue sur E^p.
- L'application $(u, v) \mapsto u \wedge v$ de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à un couple de vecteurs associe leur produit vectoriel est continue sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $M \mapsto {}^tMM$ de $M_n(\mathbb{R})$ dans lui-même est continue sur $M_n(\mathbb{R})$.

- L'application $\det_{\mathcal{B}} : E^p \to \mathbb{K}$ est n-linéaire sur E^p avec E de dimension finie donc elle est continue sur E^p.
- L'application "produit vectoriel" est bilinéaire sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ donc elle est continue sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.
- Notons $f : M \mapsto {}^tMM$. Alors $f = B \circ d$ où $B : (M, N) \mapsto {}^tMN$ et $d : M \mapsto (M, M)$. L'application B est bilinéaire sur $M_n(\mathbb{R})^2$ par linéarité de la transposition et par bilinéarité du du produit, donc elle est continue sur $M_n(\mathbb{R})^2$ car $M_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie ; et d est linéaire de $M_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})^2$ donc elle est continue sur $M_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie.
  Par suite, f est continue sur $M_n(\mathbb{R})$ comme composée d'applications continues.

Remarque : on aurait également pu montrer la continuité des ses trois applications en remarquant que leur applications composantes dans une base sont polynomiales.

3. Normes d'opérateur (ou normes subordonnées)

Dans ce paragraphe $\mathcal{L}_c(E, F)$ désigne l'espace des applications linéaires continues de E muni d'une norme $\|\cdot\|_E$ dans F muni d'une norme $\|\cdot\|_F$.

a. Définition et caractérisations

Lemme 1.

Soit $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$. L'ensemble $\{k \in \mathbb{R}_+ \mid \forall\, x \in E,\ \|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E\}$ est un partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$.

Correction.

On note $K = \{k \in \mathbb{R}_+ \mid \forall\, x \in E,\ \|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E\}$. Comme f est une application linéaire continue, d'après le théorème 7, il existe $k_0 \geq 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E$. Ainsi, k_0 appartient à K donc ce dernier est non vide. De plus, il est minoré par 0, d'où le résultat.

Le lemme précédent permet de justifier l'existence de la norme d'opérateur définie ci-après :

Définition 16.

Soit $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$. On appelle **norme d'opérateur** de f associée aux normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ ou encore **norme subordonnée** de f aux normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ et on note $|||f|||$, ou encore $\|f\|_{\text{op}}$, la quantité :

$$|||f||| = \inf\{k \in \mathbb{R}_+ \mid \forall\, x \in E,\ \|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E\}.$$

Proposition 26.

Soit $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$. Pour tout $x \in E$, on a :

$$\|f(x)\|_F \leq |||f|||.\|x\|_E$$

Démonstration.

On pose $K = \{k \in \mathbb{R}_+ \mid \forall\, x \in E,\ \|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E\}$. D'après le lemme 1, K est non vide et, par définition, minoré par $|||f|||$.
Soit $x \in E$. Pour tout $k \in K$, on a :

$$\|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E.$$

Ainsi, par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, en faisant tendre k vers $|||f|||$, on obtient :

$$\|f(x)\|_F \leq |||f|||.\|x\|_E$$

□

Proposition 27. *Caractérisation de la norme d'opérateur*

Soit $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$. On a :

i) $|||f||| = \sup\limits_{\|x\|_E \neq 0} \dfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$;

ii) $|||f||| = \sup\limits_{\|x\|_E \leq 1} \dfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$;

iii) $|||f||| = \sup\limits_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F$.

Démonstration.

On note $A = \{k \in \mathbb{R}_+ \mid \forall\, x \in E,\ \|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E\}$.

i) On a note $B = \left\{\dfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \mid x \in E \setminus \{0_E\}\right\}$. Montrons tout d'abord que B admet une borne supérieure. Comme E n'est pas réduit à 0_E, il existe $x_0 \in E \setminus \{0_E\}$, ainsi B est

non vide car $\frac{\|f(x_0)\|_F}{\|x_0\|_E}$ appartient à B.
De plus, comme f est continue sur E, il existe $k \geq 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E$. Ainsi, en particulier, pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$,

$$\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq k$$

Par suite, B est une partie non vide et majorée (par k) de $\mathbb{R}$ donc elle admet une borne supérieure. Notons b cette borne supérieure.

Montrons que $b = |||f|||$. Commençons par montrer que $b \geq |||f|||$. Comme b est un majorant de B, on a, pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, $\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq b$ et donc pour tout $x \in E$,

$$\|f(x)\|_F \leq b\|x\|_E$$

(cette inégalité étant bien vérifiée pour 0_E également). Ainsi, b appartient à A. Or $|||f|||$ étant la borne inférieure de A et donc en particulier un minorant de A, on a $b \geq |||f|||$.
De plus, si $k \in A$, on a, pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$:

$$\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq k$$

donc k est un majorant de B, d'où, b étant son plus petit majorant, $k \geq b$. Ceci étant vrai pour tout $k \in A$, b est un minorant de A. Or $|||f|||$ étant son plus grand minorant, on obtient $|||f||| \geq b$.
Il en résulte que $b = |||f|||$.

ii) On note $C = \left\{ \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \mid \|x\|_E \leq 1 \right\}$. Alors $C \subset B \cup \{0\}$ (le 0 provient du fait que 0_E fait partie des vecteurs de normes plus petites que 1 mais pas de $E \setminus \{0_E\}$). De plus, on peut remarquer que B et $B \cup \{0\}$ ont la même borne supérieure car 0 est un minorant de B. Donc, par inclusion, C possède une borne supérieure c et $c \leq b$. Montrons l'inégalité dans l'autre sens.
Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$. On pose $y = \frac{x}{\|x\|_E}$. Alors on a $\|y\|_E = 1$ et par linéarité de f et par homogénéité de la norme $\|\cdot\|_F$:

$$\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right) \right\|_F = \|f(y)\|_F = \frac{\|f(y)\|_F}{\|y\|_E}.$$

Or $\|y\|_E = 1 \leq 1$ donc $\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$ appartient à C. D'où $B \subset C$ et ainsi, $b \leq c$.
Ainsi, $b = c$.

iii) Par un raisonnement similaire à celui du point précédent, on peut prouver que $\{\|f(x)\|_F \mid \|x\|_E = 1\} = B$ et donc que leurs bornes supérieures sont égales.

□

b. Propriétés de la norme d'opérateur

La proposition suivante justifie la terminilogie de "norme" pour la norme d'opérateur :

Proposition 28.

L'application $|||\cdot||| : \mathcal{L}_c(E,F) \to \mathbb{R}_+$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$.

Démonstration.

D'après le lemme 1, l'application $|||\cdot|||$ est bien définie sur $\mathcal{L}_c(E,F)$.
Soit $f, g \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

— Positivité : on a $|||f||| = \sup_{\|x\|_E=1} \underbrace{\|f(x)\|_F}_{\geq 0} \geq 0$.

— Séparation : on suppose $|||f||| = 0$. Alors, pour tout $x \in E$,

$$\|f(x)\|_F \leq 0\|x\|_E = 0$$

Ainsi, par positivité et séparation de la norme $\|\cdot\|_F$, pour tout $x \in E$, $f(x) = 0_F$. Par suite, $f = \mathbf{0}$.

— Homogénéité : on a, par homogénéité de $\|\cdot\|_F$ et les propriétés usuelles de la borne supérieure :

$$|||\lambda f||| = \sup_{\|x\|_E=1} \underbrace{\|\lambda f(x)\|_F}_{=|\lambda|.\|f(x)\|_F} = |\lambda|.|||f|||.$$

— Inégalité Triangulaire : on a, par inégalité triangulaire de $\|\cdot\|_F$ et les propriétés usuelles de la borne supérieure :

$$|||f+g||| = \sup_{\|x\|_E=1} \underbrace{\|f(x)+g(x)\|_F}_{\leq \|f(x)\|_F + \|g(x)\|_F} \leq |||f||| + |||g|||.$$

□

Proposition 29.

Soit $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}_c(F,G)$. L'application $g \circ f$ appartient à $\mathcal{L}_c(E,G)$ et on a :

$$|||g \circ f||| \leq |||g|||.|||f|||.$$

Démonstration.

Soit $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}_c(F,G)$. Alors $g \circ f$ est linéaire continue comme composée d'applications linéaires et continues. On remarque que, pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$, on a :

$$\|f(x)\|_F \leq |||f|||.\|x\|_E \text{ et } \|g(y)\|_G \leq |||g|||.\|y\|_F.$$

Donc, pour tout $x \in E$,

$$\|g \circ f(x)\|_G = \|g(f(x))\|_G \leq |||g|||.\|f(x)\|_E \leq |||g|||.|||f|||.\|x\|_E.$$

D'où $|||g \circ f||| \leq |||g|||.|||f|||$. □

Corollaire 3.

On munit de E de sa norme $\|\cdot\|_E$ que ce soit comme espace de départ et comme espace d'arrivée des applications considérées.

L'application $|||\cdot||| : \mathcal{L}_c(E) \to \mathbb{R}_+$ est une norme d'algèbre sur $\mathcal{L}_c(E)$.

Démonstration.

D'après la proposition 22, $\mathcal{L}_c(E)$ est une algèbre et, d'après la proposition 28, $|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E)$. Il résulte donc de la proposition précédente que $|||\cdot|||$ est sous-multiplicative sur $\mathcal{L}_c(E)$. □

c. Calculs pratiques d'une norme d'opérateur

Méthode 4.

Calculer une norme subordonnée :
On considère une application linéaire $f : E \to F$ où E et F sont munis de $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ respectivement.

On cherche le "meilleur" $k \geq 0$ possible tel que, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E$. (voire i))

Ensuite, on démontre que notre k est bien le meilleur d'une des façons suivantes :

- on cherche $x_0 \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $\|f(x_0)\|_F = k\|x_0\|_E$ ou même $x_0 \in E$ avec $\|x_0\|_E = 1$ tel que $\|f(x_0)\|_F = k$. Dans ce cas, on conclut que $|||f||| = k$. (voire ii))
- on cherche une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $E \setminus \{0_E\}$ tel que $\frac{\|f(x_n)\|_F}{\|x_n\|_E} \xrightarrow[n\to+\infty]{} k$. Dans ce cas, on conclut que $|||f||| = k$. (voire iii))

i) En effet, f est continue en vertu du Théorème 7 et comme $|||f|||$ est la borne inférieure de $A = \{k' \in \mathbb{R}_+ \mid \forall\, x \in E,\ \|f(x)\|_F \leq k'\|x\|_E\}$ et que k appartient à A, $|||f||| \leq k$.

ii) En effet, on a $\frac{\|f(x_0)\|_F}{\|x_0\|_E} = k$; or k étant un majorant de $B = \left\{\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \mid x \in E \setminus \{0_E\}\right\}$ car $|||f||| \leq k$; on a $k = \max B = \sup B = |||f|||$.

iii) En effet, k est un majorant de $B = \left\{\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \mid x \in E \setminus \{0_E\}\right\}$ car $|||f||| \leq k$, et on a trouvé une suite à valeurs dans B qui converge vers k. Ainsi, par caractérisation séquentielle de la borne supérieure $k = \sup B = |||f|||$.

Exemple 21.

- On considère l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ définie, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par $f(x, y) = (x + y, x - y)$. La norme d'opérateur de f associée aux normes $\|\cdot\|_2$ (pour l'espace de départ) et $\|\cdot\|_2$ (pour l'espace d'arrivée) est

$$|||f||| = \sqrt{2}.$$

— On considère $E = C([0,1],\mathbb{R})$. L'application $\varphi \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ définie, pour $f \in E$, par :

$$\varphi(f) = \int_0^1 t f(t)\,\mathrm{d}t$$

est continue sur E pour $\|\cdot\|_1$ et sa norme d'opérateur associée aux normes $\|\cdot\|_1$ et $|\cdot|$ est :

$$|||\varphi||| = 1.$$

— On a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\|f(x,y)\|_2 = \sqrt{(x+y)^2+(x-y)^2} = \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2}\|(x,y)\|_2$$

donc en particulier, $\|f(x,y)\|_2 \leq \sqrt{2}\|(x,y)\|_2$ d'où f est continue sur $\mathbb{R}^2$ (mais on le savait déjà car f est linéaire qur $\mathbb{R}^2$ qui est de dimension finie) et $|||f||| \leq \sqrt{2}$ et comme on a égalité pour un certain $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ (en fait pour tous, d'après la première égalité !), on obtient $|||f||| = \sqrt{2}$.

— Pour tout $f \in E$, on a, par inégalité triangulaire et croissance de l'intégrale :

$$|\varphi(f)| = \left|\int_0^1 t f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^1 \underbrace{t}_{\leq 1}|f(t)|\,\mathrm{d}t \leq \|f\|_1.$$

Par suite, φ est continue sur E pour $\|\cdot\|_1$ et $|||\varphi||| \leq 1$.

On pourrait chercher un cas d'égalité avec $f \neq 0_E$ dans l'inégalité précédente mais, malheureusement, si $f \in E$ vérifie l'égalité, alors, d'après ce qui précède, $|f|$ également et ainsi, $\int_0^1 (1-t)|f(t)|\,dt = 0$; or $t \mapsto (1-t)|f(t)|$ est continue positive sur $[0,1]$, d'où $f = \mathbf{0}$ sur $[0,1[$ et donc, sur $[0,1]$ par continuité de f.

Considérons la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $E \setminus \{0_E\}$ définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par $f_n : t \mapsto t^n$. On a :

$$\frac{|\varphi(f_n)|}{\|f_n\|_1} = \frac{\int_0^1 t^{n+1}\,\mathrm{d}t}{\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t} = \frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Il en résulte que $|||\varphi||| = 1$.

Exercice 14.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathbb{R}^n$ et les deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur E. Justifier que l'application identité Id_E est continue sur E de toutes les façons de munir E (au départ et à l'arrivée) et calculer sa norme d'opérateur dans chacun de ces cas.

Correction.

Comme E est de dimension finie et $\mathrm{Id}_E \in \mathcal{L}(E)$, Id_E est continue sur E pour n'importe quelles normes au départ et à l'arrivée.

On a, pour tout $x \in E$:

— $\|\mathrm{Id}_E(x)\|_1 = \|x\|_1$, d'où $|||\mathrm{Id}_E|||_{1,1} = 1$;
— $\|\mathrm{Id}_E(x)\|_\infty = \|x\|_\infty$, d'où $|||\mathrm{Id}_E|||_{\infty,\infty} = 1$;
— $\|\mathrm{Id}_E(x)\|_\infty = \|x\|_\infty \leq \|x\|_1$, d'où $|||\mathrm{Id}_E|||_{1,\infty} \leq 1$ et, comme $\|(1,0,...,0)\|_\infty = \|(1,0,...,0)\|_1$, on obtient $|||\mathrm{Id}_E|||_{1,\infty} = 1$;
— $\|\mathrm{Id}_E(x)\|_1 = \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$, d'où $|||\mathrm{Id}_E|||_{\infty,1} \leq n$ et, comme $\|(1,...,1)\|_1 = \|(1,...,1)\|_\infty$, on obtient $|||\mathrm{Id}_E|||_{\infty,1} = n$;

Exercice 15.

On considère $E = \mathbb{R}[X]$. Dans la suite, l'espace d'arrivée des fonctions étant $\mathbb{R}$, on le munit de sa norme canonique même si on ne le précise pas !

1. On munit E de la norme $\|P\| = \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)|$ et on considère la forme linéaire $f : P \mapsto P(0)$.
   Montrer que f est continue et déterminer la norme subordonnée de f.
2. On munit E de la norme $\|P\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{|P^{(n)}(1)|}{n!}$ et on considère la forme linéaire $g : P \mapsto P(\frac{1}{2})$.
   Après avoir prouvé que $\|\cdot\|$ est bien une norme, montrer que g est continue et déterminer la norme subordonnée de g.

Correction.

1. Pour tout $P \in E$, on a :
$$|f(P)| = |P(0)| \leq \|P\|$$
donc f est continue sur E muni de $\|\cdot\|$ et $|||f||| \leq 1$. De plus, on a, pour P le polynôme constant en 1 : $|f(P)| = 1 = \|P\|$ donc $|||f||| = 1$.

2. On rappelle ici le formule de Taylor pour les polynômes qui nous servira ici : pour $P \in E$ et $a \in \mathbb{R}$, on a :
$$P = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n \quad \text{(somme finie)}$$
Pour montrer que $\|\cdot\|$, seul l'axiome de séparation peut poser problème ; montrons seulement celui-ci : soit $P \in E$ tel que $\|P\| = 0$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P^{(n)}(1) = 0$. Ainsi, d'après la formule de Taylor pour les polynômes appliquée en $a = 1$, on obtient :
$$P = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(1)}{n!}(X-1)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 0.(X-1)^n = 0$$
D'où l'axiome de séparation.

Passons à la norme subordonnée. Soit $P \in E$. D'après la formule de Taylor pour les polynômes appliquée en 1, on a, en evaluant en $\frac{1}{2}$:
$$P\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(1)}{n!}\left(\frac{1}{2}-1\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(1)}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Donc

$$|g(P)| = \left|P\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{|P^{(n)}(1)|}{n!}}_{\leq \|P\|} \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \|P\| = 2\|P\|.$$

Par suite, $|||g||| \leq 2$.
De plus, considérons la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes non nuls où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \sum_{k=0}^{n}(1-X)^k$. Alors, comme $\|P_n\| = 1$ car, pour tout entier naturel $k \leq n$, $P^{(k)}(1) = (-1)^k k!$, on a :

$$\frac{|g(P_n)|}{\|P_n\|} = \frac{\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k}{1} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2.$$

Ainsi, $|||g||| = 2$.

Partie C

Fonctions vectorielles de la variable réelle

Dans cette partie, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un singleton ; $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$ et $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ désignent des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$ de dimension finie respectives $p, q \in \mathbb{N}^*$.

1. Dérivation des fonctions vectorielles de la variable réelle

a. Définitions et premières propriétés

Définition 17. *Dérivabilité et vecteur dérivé*

Soit $f : I \to E$ une fonction et $t_0 \in I$.

On dit que f est **dérivable** en t_0 si l'application $\tau_{t_0} : I \setminus \{t_0\} \to E$, appelée **taux d'accroissement de f en** t_0 et définie par :

$$\tau_{t_0} : t \mapsto \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0},$$

admet une limite $\ell \in E$ en t_0.

Dans ce cas, cette limite est appelée **vecteur dérivé** de f en t_0 et est notée :

$$f'(t_0) \quad \text{ou encore} \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t_0).$$

Remarque 13.

Comme I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un singleton et $t_0 \in I$, on a bien $t_0 \in \overline{I \setminus \{t_0\}}$ car $\overline{I \setminus \{t_0\}} = I$; on peut donc envisager d'étudier **la** limite de τ_{t_0} en toute légitimité !

Exemple 22.

Soit $u, v \in E$. L'application $f : t \mapsto u + tv$ est de $\mathbb{R}$ dans E est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, $f'(t_0) = v$.

On a, pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{t_0\}$:

$$t_{t_0} : \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \frac{(u + tv) - (u + t_0 v)}{t - t_0} = \frac{(t - t_0)v}{t - t_0} = v \xrightarrow[t \to t_0]{} v.$$

par suite, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, $f'(t_0) = v$.

Proposition 30. *Développement limité à l'ordre 1*

Soit $f : I \to E$ et $t_0 \in I$.
La fonction f est dérivable en t_0 si, et seulement si, elle admet une développement limité à l'ordre 1 en t_0 i.e. s'il existe un vecteur $\ell \in E$ telle que, pour $t \in I$:

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)\ell + \underset{t \to t_0}{o}(t - t_0).$$

Dans ce cas, on a $f'(t_0) = \ell$.

Démonstration.

($\Rightarrow$) Si f est dérivable en t_0, alors on a, pour tout $t \in I$:

$$f(t) = f(t) - f(t_0) + f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) - (t - t_0)f'(t_0) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + \varepsilon(t)$$

où $\varepsilon(t) = f(t) - f(t_0) - (t - t_0)\ell$.
La fonction ε vaut 0_E en t_0 et, pour $t \in I \setminus \{t_0\}$, on a :

$$\frac{\varepsilon(t)}{t - t_0} = \tau_{t_0} - f'(t_0) \xrightarrow[t \to t_0]{} f'(t_0) - f'(t_0) = 0_E.$$

D'où $f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + \underset{t \to t_0}{o}(t - t_0)$ avec $\ell = f'(t_0) \in E$.

($\Leftarrow$) On suppose qu'il existe un vecteur $\ell \in E$ telle que, pour $t \in I$, $f(t) = f(t_0) + (t - t_0)\ell + \underset{t \to t_0}{o}(t - t_0)$.
Pour $t \in I \setminus \{t_0\}$, on a :

$$\tau_{t_0}(t) = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \ell + \underset{t \to t_0}{o}(1) \xrightarrow[t \to t_0]{} \ell.$$

Par suite, f est dérivable en t_0 et $f'(t_0) = \ell$.

□

Proposition 31.

Soit $f : I \to E$ et $t_0 \in I$. Si f est dérivable en t_0, alors f est continue en t_0.

Démonstration.

On suppose f dérivable en t_0. D'après la proposition précédente, f admet un développement limité à l'ordre 1 i.e. pour $t \in I$:

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + \underset{t \to t_0}{o}(t - t_0) \xrightarrow[t \to t_0]{} f(t_0).$$

Donc f est continue en t_0. □

Proposition 32.

Soit $f : I \to E$, $t_0 \in I$ et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E. La fonction f est dérivable en t_0 si, et seulement si, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, la i-ème fonction composante f_i de f dans la base $\mathcal{B}$ est dérivable en t_0.

Dans ce cas, on a :

$$f'(t_0) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(t_0) e_i.$$

Démonstration.

Pour $i \in [\![1, p]\!]$, on note τ_{i,t_0} le taux d'accroissement de f_i en t_0.
Pour tout $t \in I \setminus \{t_0\}$, on a :

$$\begin{aligned}
\tau_{t_0}(t) &= \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \\
&= \frac{1}{t - t_0} \left(\sum_{i=1}^{p} f_i(t) e_i - \sum_{i=1}^{p} f_i(t_0) e_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{p} \frac{f_i(t) - f_i(t_0)}{t - t_0} e_i \\
\tau_{t_0}(t) &= \sum_{i=1}^{p} \tau_{i,t_0}(t) e_i.
\end{aligned}$$

Par suite, les applications composantes de τ_{t_0} dans la base $\mathcal{B}$ sont les τ_{i,t_0} pour $i \in [\![1, n]\!]$.
Ainsi, d'après le théorème 2, on a :

$$\text{la fonction } f \text{ est dérivable en } t_0$$

si, et seulement si,

$$\text{l'application } \tau_{t_0} \text{ admet } \ell = \textstyle\sum_{i=1}^{p} \ell_i e_i \in E \text{ pour limite en } t_0$$

si, et seulement si,

$$\text{pour tout } i \in [\![1, p]\!],\ \tau_{i,t_0} \text{ admet } \ell_i \in \mathbb{K} \text{ pour limite en } t_0$$

si, et seulement si,

$$\text{pour tout } i \in [\![1, p]\!],\ f_i \text{ est dérivable en } t_0.$$

Et dans ce cas, on a $f'(t_0) = \ell = \sum_{i=1}^{p} \ell_i e_i = \sum_{i=1}^{n} f_i'(t_0) e_i$. □

Exemple 23.

Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ définie par $f : t \mapsto (\arctan(t), \arcsin(t))$. Alors f est dérivable en tout point

de $]-1,1[$ et on a, pour $t_0 \in]-1,1[$,

$$f'(t_0) = \left(\frac{1}{1+t_0^2}, \frac{1}{\sqrt{1-t_0^2}}\right).$$

Les applications composantes de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont $f_1 = \arctan$ et $f_2 = \arcsin$ qui sont dérivables sur, respectivement, $\mathbb{R}$ et $]-1,1[$. Donc, d'après la proposition précédente, f est dérivable sur $]-1,1[= \mathbb{R} \cap]-1,1[$ et on a, pour tout $t_0 \in]-1,1[$:

$$f'(t_0) = (f_1'(t_0), f_2'(t_0)) = \left(\frac{1}{1+t_0^2}, \frac{1}{\sqrt{1-t_0^2}}\right).$$

Exercice 16.

On considère la fonction $f : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t^2) & \sin\left(\frac{1}{2-t}\right) \\ 2^{t^3+1} & \frac{1}{\ln(t^2)^2} \end{pmatrix}$.

Quelle est le domaine de définition de f ? Sur quel ensemble $\mathcal{D}$ cette fonction est-elle dérivable et quel est le vecteur dérivée en chaque point de $\mathcal{D}$?

Correction.

Les applications composantes de f dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$ sont

$$f_{1,1} : t \mapsto \cos(t^2)\ f_{1,2} : t \mapsto \sin(\frac{1}{2-t})\ f_{2,1} : t \mapsto 2^{t^3+1} \text{ et } f_{2,2} : t \mapsto \frac{1}{\ln(t^2)^2}.$$

Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f_{1,1}} \cap \mathcal{D}_{f_{1,2}} \cap \mathcal{D}_{f_{2,1}} \cap \mathcal{D}_{f_{2,2}} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \setminus \{2\} \cap \mathbb{R} \cap \{-1,0,1\} = \mathbb{R} \setminus \{-1,0,1,2\}$.
Chaque fonction composante est dérivable sur son domaine de définition donc f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ et on a, pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0,1,2\}$:

$$f'(t) = \begin{pmatrix} f_{1,1}(t) & f_{1,2}(t) \\ f_{2,1}(t) & f_{2,2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t\sin(t^2) & \frac{1}{(2-t)^2}\cos\left(\frac{1}{2-t}\right) \\ 3t^2\ln(2)2^{t^3+1} & -\frac{4}{t\ln(t^2)^3} \end{pmatrix}.$$

Définition 18. *Vecteur dérivée à gauche/à droite*

Soit $f : I \to E$, $t_0 \in I$. On dit que f est **dérivable à gauche (resp. à droite) en** t_0 si le taux d'accroissement τ_{t_0} de f admet une limite à gauche (resp. à droite) en t_0.
Cette limite est appelée **vecteur dérivé à gauche (resp. à droite)** de f en t_0 et est notée

$$f_g'(t_0) \quad (\text{resp. } f_d'(t_0)).$$

Définition 19. *Fonction dérivée*

Soit $f : I \to E$. On dit que f est **dérivable sur** I si elle est dérivable en tout point de I. On note alors f' (ou encore $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$) la fonction de I dans E définie par :

$$f' : t \mapsto f'(t).$$

On note $D(I, E)$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I.

Proposition 33.

Soit $f : I \to E$.

La fonction f est dérivable sur I et f' est la fonction nulle sur **l'intervalle** I si, et seulement si, f est constante sur I.

Démonstration.

L'implication réciproque découle de l'exemple 22.

Pour l'implication directe, on utilise les résultats sur les fonctions à valeurs scalaires pour justifier le résultat.
On suppose fonction f dérivable sur I et $f' = \mathbf{0}$ sur I.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E et $f_1, ..., f_p$ les applications composantes de f dans la base $\mathcal{B}$.
D'après la proposition 32, $f_1, ..., f_p$ sont dérivables sur I et on a $\mathbf{0} = f' = \sum_{i=1}^{n} f_i' e_i$.
Ainsi, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, on a, en notant $\mathrm{d}x_i$ la i-ème application coordonnée dans la base $\mathcal{B}$:

$$f_i' = \mathrm{d}x_i \circ f' = \mathrm{d}x_i \circ \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

d'où, f_i est une fonction de I dans $\mathbb{K}$ dérivable et de dérivée nulle sur l'intervalle I donc f_i est constante sur I (on rappelle que c'est une conséquence de l'inégalité des accroissements finis pour les fonctions de I dans $\mathbb{K}$) disons en $\lambda_i \in \mathbb{K}$.
Il en résulte que $f : t \mapsto \sum_{i=1}^{p} f_i(t) e_i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$ est constante sur I. □

b. Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition 34. *Combinaisons linéaires*

Soit $f, g : I \to E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Si f et g sont dérivables sur I, alors $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur I et on a, pour tout $t \in I$:

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'.$$

Démonstration.

On suppose f et g sont dérivables sur I. pour tout $t_0 \in I$ et pour $t \in I$, on a :

$$\begin{aligned}(\lambda f+\mu g)(t) &= \lambda f(t)+\mu g(t)\\ &= \lambda\left(f(t_0)+(t-t_0)f'(t_0)+\underset{t\to t_0}{o}(t-t_0)\right)+\mu\left(g(t_0)+(t-t_0)g'(t_0)+\underset{t\to t_0}{o}(t-t_0)\right)\\ &= \lambda f(t_0)+\mu g(t_0)+(t-t_0)(\lambda f'(t_0)+\mu g'(t_0))+\underset{t\to t_0}{o}(t-t_0)\\ (\lambda f+\mu g)(t) &= (\lambda f+\mu g)(t_0)+(t-t_0)(\lambda f'+\mu g')(t_0)+\underset{t\to t_0}{o}(t-t_0);\end{aligned}$$

par suite, $\lambda f+\mu g$ admet un développement limité à l'ordre 1 et donc est dérivable en t_0 de vecteur dérivé $(\lambda f+\mu g)'(t_0)=\lambda f'+\mu g')(t_0)=\lambda f'(t_0)+\mu g'(t_0)$.
Ceci étant vrai pour tout $t_0 \in I$, $\lambda f+\mu g$ est dérivable sur I et $(\lambda f+\mu g)'=\lambda f'+\mu g'$. □

Corollaire 4.

L'ensemble $D(I,E)$ des fonctions de I dans E dérivables sur I est un espace vectoriel sur K et que l'application $f \mapsto f'$ est une application linéaire de $D(I,E)$ vers $\mathcal{F}(I,E)$.

Démonstration.

Montrons que $D(I,E)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(I,E)$ des fonctions de I dans E.

- L'application nulle $\mathbf{0} : t \mapsto 0_E = t.0_E + 0_E$ de I dans E appartient à $D(I,E)$ d'après l'exemple 22.
- D'après la proposition précédente, $D(I,E)$ est stable par combinaison linéaire.

Il en résulte que $D(I,E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,E)$ et donc est un espace vectoriel.

De plus, toujours d'après la proposition précédente, pour tous $f,g : I \to E$ et tous $\lambda,\mu \in \mathbb{K}$, $(\lambda f+\mu g)'=\lambda f'+\mu g'$ donc l'application $f \mapsto f'$ est linéaire. □

Proposition 35. *Composition de fonctions*

Soit $f : I \to E$, $\varphi : J \to \mathbb{R}$ et $t_0 \in J$ avec $\varphi(t_0) \in I$. Si φ est dérivable en t_0 et f est dérivable en $\varphi(t_0)$, alors $f \circ \varphi$ est dérivable en t_0 et on a :

$$(f\circ\varphi)'(t_0)=\varphi'(t_0).f'(\varphi(t_0)).$$

De plus, si φ est dérivable sur J avec $\varphi(J) \subset I$ et f est dérivable sur I, alors on a $(f\circ\varphi)' = \varphi'.f'\circ\varphi$.

Démonstration.

On suppose φ dérivable en t_0 et f dérivable en $\varphi(t_0)$. Alors, pour $t \in J$, en posant $t' = \varphi(t_0)+$

$(t-t_0)\varphi'(t_0)+\underset{t\to t_0}{o}(t-t_0)\xrightarrow[t\to t_0]{}\varphi(t_0)$, on a $\underset{t\to t_0}{o}(t'-\varphi(t_0))=\underset{t\to t_0}{o}(t-t_0)$ et donc :

$$\begin{aligned}
f\circ\varphi(t) &= f\left(\varphi(t_0)+(t-t_0)\varphi'(t_0)+\underset{t\to t_0}{o}(t-t_0)\right)\\
&= f(t')\\
&= f(\varphi(t_0))+(t'-\varphi(t_0))f'(\varphi(t_0))+\underset{t\to t_0}{o}(t'-\varphi(t_0))\\
&= f(\varphi(t_0)+((t-t_0)\varphi'(t_0)+\underset{t\to t_0}{o}(t-t_0))f'(\varphi(t_0))+\underset{t\to t_0}{o}(t-t_0)\\
&= f(\varphi(t_0)+(t-t_0)\varphi'(t_0)f'(\varphi(t_0))+\underset{t\to t_0}{o}(t-t_0)
\end{aligned}$$

Ainsi, $f\circ\varphi$ admet est dérivable en t_0 car elle admet un développement limité à l'ordre 1 en t_0 et on a $(f\circ\varphi)'(t_0)=\varphi'(t_0).f'(\varphi(t_0))$. □

Proposition 36. *Composition par une application linéaire*

Soit F un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$, $f:I\to E$, $L:E\to F$ une application linéaire et $t_0\in I$. Si f est dérivable en t_0, alors $L\circ f$ est dérivable en t_0 et on a :

$$(L\circ f)'(t_0)=L(f'(t_0)).$$

De plus, si f est dérivable sur I, alors on a $(L\circ f)'=L\circ f'$.

Démonstration.

On suppose f dérivable en t_0. Notons τ_{t_0} le taux d'accroissement de f. Comme E est de dimension finie, L est continue sur E ; ainsi, pour tout $t\in I$ avec $t\neq t_0$, par linéarité et continuité de L, on a :

$$\frac{L\circ f(t)-L\circ f(t_0)}{t-t_0}=L\left(\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}\right)\xrightarrow[t\to t_0]{}L(f'(t_0)).$$

D'où le résultat. □

Proposition 37.

Soit E,F des espaces vectoriels normés de dimension finie, G un espace vectoriel normé, $B:E\times F\to G$ une application bilinéaire et $f:I\to E$, $g:I\to F$ des fonctions.

Si f et g sont dérivables sur I, alors $B(f,g):t\mapsto B(f(t),g(t))$ est dérivable sur I et on a :

$$(B(f,g))'=B(f',g)+B(f,g').$$

Démonstration.

Soit $t_0\in I$. On suppose que f et g sont dérivables en t_0. Alors on a, par bilinéarité de B, pour tout $t\in I$ avec $t\neq t_0$:

$$\begin{aligned} B(f,g)(t) - B(f,g)(t_0) &= B(f(t),g(t)) - B(f(t_0),g(t)) + B(f(t_0),g(t)) - B(f(t_0),g(t_0)) \\ &= B(f(t)-f(t_0),g(t)) + B(f(t_0),g(t)-g(t_0)). \end{aligned}$$

Comme E et F sont de dimension finie, l'application bilinéaire B est continue. Par suite, on a :

$$\begin{aligned} \frac{B(f,g)(t) - B(f,g)(t_0)}{t-t_0} &= \underbrace{B(\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}, g(t))}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} B(f'(t_0),g(t_0))} + \underbrace{B(f(t_0), \frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0})}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} B(f(t_0),g'(t_0))} \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} B(f'(t_0),g(t_0)) + B(f(t_0),g'(t_0)). \end{aligned}$$

Par suite, $B(f,g)$ est dérivable en t_0 et $(B(f,g))'(t_0) = B(f'(t_0),g(t_0) + B(f(t_0),g'(t_0))$.
Ceci étant vrai pour tout $t_0 \in I$, $B(f,g)$ est dérivable sur I et $(B(f,g))' = B(f',g) + B(f,g')$.
Remarque : on aurait pu également passer par la caractérisation de la dérivabilité en terme de de développement à l'ordre 1 *(exercice !).* □

Exemple 24. *Produit scalaire de fonctions*

Soit E un espace euclidien sur $\mathbb{K}$ de produit scalaire noté $(\cdot|\cdot)$ et $f, g : I \to E$ des fonctions dérivables sur I.
L'application $(f|g) : t \mapsto (f(t)|g(t))$ est dérivable sur I et

$$(f|g)' = (f'|g) + (f|g').$$

Le produit scalaire est une forme bilinéaire sur $E \times E$ avec E de dimension finie donc, d'après la proposition précédente, on a le résultat.

Exercice 17.

Soit E un espace euclidien de produit scalaire noté $(\cdot|\cdot)$, de norme associée notée $\|\cdot\|$ et $f : I \to E$ une fonction dérivable sur I.

1. Discuter de la dérivabilité de la fonction $\|f\| : t \mapsto \|f(t)\|$ et déterminer sa dérivée aux points de dérivabilité.
2. On suppose que pour tout $t \in I$, $f(t) \in S(0,1)$. Montrer que, pour tout $t \in I$, $f(t)$ et $f'(t)$ sont orthogonaux.

Correction.

1. On a $\|f\| = \sqrt{(f|f)} = \sqrt{\cdot} \circ (\cdot|\cdot) \circ f$, d'où, comme f est dérivable sur I et $(\cdot|\cdot)$ est bilinéaire positive, $(f|f)$ est dérivable sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$; et, de plus, $\sqrt{\cdot}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc, par composition, $\|f\|$ est dérivable sur $I \setminus \{t \in I \mid f(t) = 0_E\}$. Et on a, pour tout

$t \in I$ tel que $f(t) \neq 0_E$:

$$\frac{\mathrm{d}\|f\|}{\mathrm{d}t}(t) = 2(f'(t)|f(t)).\frac{1}{2\sqrt{(f(t)|f(t))}} = \frac{(f'(t)|f(t))}{\|f(t)\|}.$$

2. On suppose que pour tout $t \in I$, $f(t) \in S(0,1)$. Par suite, la fonction $\|f\|$ est constante en 1 et donc de dérivée nulle sur I. Ainsi, d'après la question précédente, pour tout $t \in I$,

$$0 = \frac{\mathrm{d}\|f\|}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{(f'(t)|f(t))}{\|f(t)\|} = (f'(t)|f(t)),$$

d'où $f(t)$ et $f'(t)$ sont orthogonaux.

On a plus généralement, pour une application multilinéaire :

Proposition 38.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E_1, ..., E_n$ des espaces vectoriels normés de dimension finie, G un espace vectoriel normé, $M : E = E_1 \times ... \times E_n \to G$ une application n-linéaire et, pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, $f_i : I \to E_i$.
Si, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, f_i est dérivable sur I, alors $M(f_1, ..., f_n) : t \mapsto M(f_1(t), ..., f_n(t))$ est dérivable sur I et on a :

$$(M(f_1, ..., f_n))' = \sum_{i=1}^{n} M(f_1, ..., f_{i-1}, f_i', f_{i+1}, ..., f_n).$$

Démonstration.

On montre cela par récurrence sur le nombre de facteurs (on pourrait proposer une preuve directe sans récurrence ; nous en verrons une, adaprable dans ce cas, dans le chapitre "Calcul différentiel" et la démonstration de la différentiabilité des applications multilinéaires).
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}_n$ ="pour tous $E_1, ..., E_n$ espaces vectoriels normés de dimension finie, pour tout G espace vectoriel normé, pour tout $M : E \to G$ application n-linéaire où $E = E_1 \times ... \times E_n$ et, pour $i \in [\![1, n]\!]$, $f_i : I \to E_i$.
Si, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, f_i est dérivable sur I, alors $M(f_1, ..., f_n) : t \mapsto M(f_1(t), ..., f_n(t))$ est dérivable sur I et on a : $(M(f_1, ..., f_n))' = \sum_{i=1}^{n} M(f_1, ..., f_{i-1}, f_i', f_{i+1}, ..., f_n)$.".
Montrons, par récurrence sur $\mathbb{N}^*$, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

- **Initialisation.** Il s'agit de la proposition 36
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie. Montrons $\mathcal{P}_{n+1}$.
  Soit $E_1, ..., E_n$ des espaces vectoriels normés de dimension finie, G un espace vectoriel normé, $M : E \to G$ une application $n+1$-linéaire où $E = E_1 \times ... \times E_{n+1}$ et, pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, $f_i : I \to E_i$.
  On suppose que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, f_i est dérivable sur I.
  Montrons que $M(f_1, ..., f_{n+1})$ est dérivable sur I et on a : $(M(f_1, ..., f_{n+1}))' = \sum_{i=1}^{n+1} M(f_1, ..., f_{i-1}, f_i', f_{i+1}, ..., f_n)$..

Soit $t_0 \in I$. Pour tout $t \in I$, on a :

$$M(f_1(t),...,f_{n+1}(t)) - M(f_1(t_0),...,f_{n+1}(t_0))$$

$$=$$

$$M(f_1(t),...,f_{n+1}(t)) - M(f_1(t),...,f_n(t),f_{n+1}(t_0)) + M(f_1(t),...,f_n(t),f_{n+1}(t_0)) - M(f_1(t_0),...,f_{n+1}(t_0))$$

$$=$$

$$M(f_1(t),...,f_n(t),f_{n+1}(t) - f_{n+1}(t_0)) + M(f_1(t),...,f_n(t),f_{n+1}(t_0)) - M(f_1(t_0),...,f_{n+1}(t_0))$$

— L'application $M_n : (x_1,...,x_n) \mapsto M(x_1,...,x_n,f_{n+1}(t_0))$ est n-linéaire de $E_1 \times E_n$ dans G. Donc, par hypothèse de récurrence, $M_n(f_1,...,f_n)$ est dérivable sur I, et on a :

$$(M_n(f_1,...,f_{n+1}))' = \sum_{i=1}^{n+1} M_n(f_1,...,f_{i-1},f_i',f_{i+1},...,f_n).$$

— Pour $t \in I$, on a, par continuité de M (car $E_1,...,E_{n+1}$ sont de dimension finie) et continuité de $f_1,...,f_n$ (car ces fonctions sont dérivables en t_0) :

$$\begin{aligned} \frac{M(f_1(t),...,f_n(t),f_{n+1}(t) - f_{n+1}(t_0))}{t-t_0} &= M\left(f_1(t),...,f_n(t),\frac{f_{n+1}(t) - f_{n+1}(t_0)}{t-t_0}\right) \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} M(f_1(t_0),...,f_n(t_0),f_{n+1}'(t_0)). \end{aligned}$$

Par suite, on a :

$$\frac{(M(f_1(t),...,f_{n+1}(t)) - M(f_1(t_0),...,f_{n+1}(t_0)))}{t-t_0}$$

$$=$$

$$M\left(f_1(t),...,f_n(t),\frac{f_{n+1}(t) - f_{n+1}(t_0)}{t-t_0}\right) + \frac{M(f_1(t),...,f_n(t),f_{n+1}(t_0)) - M(f_1(t_0),...,f_{n+1}(t_0))}{t-t_0}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{}$$

$$M(f_1,...,f_n,f_{n+1}')(t_0) + \sum_{i=1}^{n+1} M_n(f_1,...,f_{i-1},f_i',f_{i+1},...,f_n)(t_0)$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} M_n(f_1,...,f_{i-1},f_i',f_{i+1},...,f_{n+1})(t_0)$$

Il en résulte que $M(f_1,...,f_{n+1})$ est dérivable en t_0. Ceci étant vrai pour tout $t_0 \in I$, $M(f_1,...,f_{n+1})$ est dérivable sur I et on a :

$$(M(f_1,...,f_{n+1}))' = \sum_{i=1}^{n+1} M(f_1,...,f_{i-1},f_i',f_{i+1},...,f_{n+1}).$$

Ainsi, $\mathbb{P}_{n+1}$ est vraie.

Par suite, on a montré, par récurrence sur $\mathbb{N}^*$, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$ est vraie. □

Exemple 25.

— Soit $f_1, ..., f_p$ des fonctions de I dans E, dérivables sur I et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E. L'application $t \mapsto \det_{\mathcal{B}}(f_1(t), ..., f_p(t))$ de I dans $\mathbb{K}$ est dérivable sur I et on a, pour tout $t \in I$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det_{\mathcal{B}}(f_1(t), ..., f_p(t)) = \sum_{i=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(f_1(t), ..., f_{i-1}(t), f_i'(t), f_{i+1}(t), ..., f_n(t)).$$

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M : I \to M_n(\mathbb{K})$ une application dérivable sur I. On note, pour $i \in [\![1, n]\!]$, $C_i : t \mapsto C_i(t)$ la fonction qui, à $t \in I$, associe la i-ème colonne de $A(t)$.
L'aaplication $t \mapsto \det(A(t))$ de I dans $\mathbb{K}$ est dérivable sur I et on a, pour tout $t \in I$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det(A(t)) = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} C_1(t) & \dots & C_{i-1}(t) & C_i'(t) & C_{i+1}(t) & \dots & C_n(t) \end{vmatrix}$$

— L'application $\det_{\mathcal{B}}$ est p-linéaire sur E^p. On applique alors la proposition précédente.

— L'application $\det : (C_1, ..., C_n) \mapsto \begin{pmatrix} C_1(t) & \dots & C_n(t) \end{pmatrix}$ est n-linéaire sur $M_{n,1}(\mathbb{K})^n$.

c. Fonctions de classe C^n

Définition 20. *Fonctions de classe C^n*

Soit $f : I \to E$.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f est de **classe C^n sur I** si f est dérivable n fois sur I et si sa fonction n-ième dérivée, notée $f^{(n)}$, est continue sur I.

— On dit que f est de **classe C^∞ sur I** si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe C^n sur I.

Pour $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on note $C^n(I, E)$ l'ensemble des fonctions de classe C^n sur I.

Remarque 14.

On a $C^0(I, E) = C(I, E)$ et $C^\infty(I, E) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C^n(I, E)$.

Exemple 26.

Soit $u, v \in E$. L'application $f : t \mapsto u + tv$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f^{(n)} : t \mapsto \begin{cases} v & \text{si } n = 1 \\ 0_E & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

Proposition 39.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $C^\infty(I,E) \subset C^n(I,E) \subset C^{n-1}(I,E) \subset C(I,E)$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $f \in C^n(I,E)$, f est n fois dérivable sur I donc en particulier, $n-1$ fois dérivable sur I et $f^{(n-1)}$ est continue sur I d'après la proposition 31 car dérivable sur I ; d'où $f \in C^{n-1}(I,E)$.

Ainsi, par récurrence sur $\mathbb{N}$, $C^n(I,E) \subset C^0(I,E) = C(I,E)$.

De plus, comme $C^\infty(I,E) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C^n(I,E)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C^\infty(I,E) \subset C^n(I,E)$. □

Proposition 40.

Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. L'ensemble $C^n(I,E)$, muni des opérations usuelles de $\mathcal{F}(I,E)$, est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
De plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $D : f \mapsto f'$ restreinte à $C^n(I,E)$ est une application linéaire de $C^n(I,E)$ dans $C^{n-1}(I,E)$.

Démonstration.

On procède par récurrence sur $\mathbb{N}$:

- **Initialisation.** D'après la proposition 13, $C^0(I,E) = C(I,E)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $C^n(I,E)$ est une espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
  Montrons que $C^{n+1}(I,E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,E)$.
  - L'application nulle est de classe C^{n+1} sur I d'après l'exemple 26.
  - Soit $f,g \in C^{n+1}(I,E)$ et $\lambda,\mu \in \mathbb{K}$. Alors, comme $n+1 \geq 1$, $\lambda f + \mu g \in C^1(I,E)$ donc $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur I et, d'après la proposition 34, $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$. De plus, f', g' appartiennent à $C^n(I,E)$ qui est un espace vectoriel par hypothèse de récurrence, donc $(\lambda f + \mu g)'$ appartient à $C^n(I,E)$.
    Par suite, $\lambda f + \mu g \in C^{n+1}(I,E)$.

  Il en résulte que $C^{n+1}(I,E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,E)$ et donc un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Ainsi, on a montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C^n(I,E)$ est une espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la proposition 34, l'application $D : f \mapsto f'$ de $D(I,E)$ dans $\mathcal{F}(I,E)$ est linéaire et, par définition, sa restriction à l'espace vectoriel $C^n(I,E)$ est à valeurs dans l'espace vectoriel $C^{n-1}(I,E)$.

De plus, on a $C^\infty(I,E) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C^n(I,E)$, d'où $C^\infty(I,E)$ est une sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,E)$ comme intersection de sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(I,E)$, et donc est une espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. □

Proposition 41. *Opérations usuelles*

Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

— *Combinaison linéaire.* Soit $f, g : I \to E$ Si f, g sont de classe C^n sur I, alors, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda f + \mu g$ est de classe C^n sur I et, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a :

$$(\lambda f + \mu g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}.$$

— *Composition avec une application linéaire.* Soit $f : I \to E$. Si f est de classe C^n sur I, alors $L \circ f$ est de classe C^n sur I et, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a :

$$(L \circ f)^{(k)} = L \circ f^{(k)}.$$

— *Composition.* Soit $f : I \to E$ et $\varphi : J \to \mathbb{R}$ avec $\varphi(J) \subset I$. Si f et φ sont de classe C^n sur I, J respectivement, alors $f \circ \varphi$ est de classe C^n sur J ;

Démonstration.

— On suppose f, g de classe C^n sur I. D'après la proposition 40, $\lambda f + \mu g$ est de classe C^n sur I et, par linéarité de $D : f \mapsto f'$, on a, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a :

$$(\lambda f + \mu g)^{(k)} = D^k(\lambda f + \mu g) = \lambda D^k(f) + \mu D^k(g) = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}.$$

A FINIR !

□

Proposition 42. *Formule de Leibniz pour les applications bilinéaires*

Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, G un espace vectoriel normé, $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire et $f : I \to E$, $g : I \to F$.
Si f et g sont de classe C^n sur I, alors $B(f, g)$ est de classe C^n sur I et on a, pour tout $k \leq n$:

$$(B(f, g))^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} B(f^{(i)}, g^{(k-i)}).$$

Corollaire 5.

Soit $f : I \to E$ et $\varphi : I \to \mathbb{K}$. Si f et φ sont de classe C^n sur I, alors $\varphi.f$ est de classe C^n sur I et, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a :

$$(\lambda.f)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \varphi^{(i)}.f^{(k-i)}.$$

2. Intégration des fonctions vectorielles sur un segment

Dans ce paragraphe, I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et a, b désignent des réels de I tels que $a < b$.

Dans la suite, on va chercher à définir l'intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux de la variable réelle à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie.

Pour éviter de recommencer de zéro la construction d'une intégrale sur un segment via la convergence des sommes de Riemann, comme elle a été faite en Sup' pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$, on va ruser et se baser sur cet aquis pour étendre l'intégrale sur un segment aux fonctions de la variable réelle à valeurs vectorielles de manière naturelle, en posant :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{p} \left(\int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t \right) e_i$$

pour $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E et $f_1, ..., f_p$ les applications composantes de f dans la base $\mathcal{B}$.

Le souci avec cette ruse, est, qu'*a priori*, la définition de l'intégrale dépend du choix de la base $\mathcal{B}$.
On va montrer qu'il n'en est rien et que, via cette définition, les principales propriétés de l'intégrale tiennent toujours dans le cas vectoriel.

a. Fonctions continues par morceaux

Définition-Proposition 21. *Fonction continue par morceaux*

Soit $f : I \to E$.

- On dit que f est **continue par morceaux sur le segment** $[a, b]$ s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, ..., a_n \in [a, b]$ avec $a_0 < ... < a_n$ tels que, pour tout $i \in [\![1, n$, $f_{|]a_{i-1}, a_i[}$ est continue sur $]a_{i-1}, a_i[$ et admet des limites dans E en a_{i-1} et en a_i.
- On dit que f est **continue par morceaux sur** I si f est continue par morceaux sur tout segment de I.

On note $C_{pm}([a, b], E)$, respectivement $C_{pm}(I, E)$, l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$, respectivement sur I, et à valeurs dans E.

Proposition 43.

- Toute application continue est continue par morceaux.
- Soit $f : I \to E$ et $g : E \to F$. Si f est continue par morceaux sur I et g est continue sur E, alors $g \circ f$ est continue par morceaux sur I.
- Les ensembles $C_{pm}([a, b], E)$ et $C_{pm}(I, E)$, munis de leurs opérations usuelles, sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

Démonstration.

- Soit $f : I \to E$ continue sur I. Sur tout segment $[a, b]$ de I, on a, pour $n = 1$, $a_0 = a, a_1 = b$, $f_{|]a_0, a_1[}$ est continue sur $]a_0, a_1[$ et admet $f(a)$ et $f(b)$ pour limites en a_0 et en a_1 car f est continue sur $[a, b]$.
  Par suite, f est continue par morceaux sur I.
- On suppose f continue par morceaux sur I et g continue sur E. Soit $[a, b] \subset I$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, ..., a_n \in [a, b]$ avec $a_0 < ... < a_n$ tels que, pour tout $i \in [\![1, n$, $f_{|]a_{i-1}, a_i[}$

est continue sur $]a_{i-1}, a_i[$ et admet des limites dans E en a_{i-1} et en a_i ; et ainsi, comme g est continue sur E par propriétés de la composition pour la continuité et les limites (Propositions 14 et 9), $g \circ f_{|]a_{i-1},a_i[}$ est continue sur $]a_{i-1}, a_i[$ et admet des limites dans F en a_{i-1} et en a_i. D'où $g \circ f$ est continue par morceaux sur $[a, b]$.
Ceci étant vrai pour tout segment de I, $g \circ f$ est continue par morceaux sur I.

— L'application nulle est continue donc continue par morceaux et par propriétés de la limite et de la continuité vis-à-vis des combinaisons linéaires, on montre, que toute combinaison linéaire de fonctions continues par morceaux sur un segment est continue par morceaux sur ce segment en prenant l'union des potentiels points de discontinuité de chaque facteur de la combinaison linéaire.
Ainsi, $C_{pm}([a, b], E)$ et $C_{pm}(I, E)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}([a, b], E)$ et $\mathcal{F}(I, E)$ respectivement, donc sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

□

b. Sommes de Riemann

Exercice 18. *Rappel de Sup'*

Déterminer les limites des suite de termes généraux suivants :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2} \qquad v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2+k^2} \qquad w_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}.$$

Définition 22. *Sommes de Riemann*

Soit $f \in C_{pm}([a, b], E)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle **somme de Riemmann d'ordre** n (associée à la subdivision régulière en $n+1$ points de $[a, b]$), le vecteur de E :

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

Proposition 44.

Soit $f \in C_{pm}([a, b], E)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour toute base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ de E, on a :

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_i\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right) e_i$$

où $f_1, ..., f_p$ sont les applications composantes de f dans la base $\mathcal{B}$.

Démonstration.

Pour tout $t \in [a,b]$, on a, par linéarité de la sommation :

$$\begin{aligned}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) &= \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{p} f_i\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)e_i\right)\\ &= \sum_{i=1}^{p}\left(\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_i\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right)e_i.\end{aligned}$$

□

c. Intégration des fonctions continues par morceaux

Lemme 2.

Soit $f \in C_{pm}([a,b],E)$, $\mathcal{B}=(e_1,...,e_p)$, $\mathcal{C}=(\varepsilon_1,...,\varepsilon_p)$ des bases de E et $(f_1,...,f_p)$ et $(g_1,...,g_p)$ les fonctions composantes de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ respectivement. On a :

$$\sum_{i=1}^{p}\left(\int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t\right)e_i = \sum_{i=1}^{p}\left(\int_a^b g_i(t)\,\mathrm{d}t\right)\varepsilon_i.$$

Démonstration.

On utilise la définition de l'intégrale sur un segment d'une fonction de la variable réelle et à valeurs complexes via les sommes de Riemann : pour une fonction $\varphi \in C([a,b],\mathbb{K})$, on a,

$$\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi\left(a+k\frac{b-a}{n}\right).$$

Ainsi, comme les fonctions composantes sont des fonctions de $I\subset\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$, pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, on a :

$$\int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_i\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \text{ et } \int_a^b g_i(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g_i\left(a+k\frac{b-a}{n}\right).$$

De plus, d'après la proposition 44, on a, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_i\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right)e_i &= \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{p}\left(\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g_i\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right)e_i.\end{aligned}$$

Par suite, par caractérisation de la convergence des suites à valeurs dans un espace vectoriel de

dimension finie via la convergence de ses suites composantes dans une base, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{p}\left(\int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t\right)e_i &= \sum_{i=1}^{p}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f_i\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right)e_i\\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f_i\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right)e_i\\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}g_i\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right)\varepsilon_i\\
&= \sum_{i=1}^{p}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}g_i\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right)\varepsilon_i\\
\sum_{i=1}^{p}\left(\int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t\right)e_i &= \sum_{i=1}^{p}\left(\int_a^b g_i(t)\,\mathrm{d}t\right)\varepsilon_i.
\end{aligned}$$

□

Grâce au lemme précédent, on garantie l'indépendance de la base choisie dans la définition suivante de l'intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux à valeurs vectorielles :

Définition 23. *Intégrale d'une fonction continue par morceaux*

Soit $f \in C_{pm}([a,b],E)$, $\mathcal{B}=(e_1,...,e_p)$ une base de E et $f_1,...,f_p$ les fonctions composantes de f dans la base $\mathcal{B}$.

On appelle **intégrale de a à b de f** et on note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_a^b f$ ou encore $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ le vecteur de E :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{p}\left(\int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t\right)e_i.$$

Exemple 27.

— On pose $R : t\mapsto\begin{pmatrix}\cos(t) & -\sin(t)\\ \sin(t) & \cos(t)\end{pmatrix}$. Pour $\theta\in\mathbb{R}_+$, on a :

$$\int_0^\theta R(t)\,\mathrm{d}t=\begin{pmatrix}\int_0^\theta\cos(t)\,\mathrm{d}t & \int_0^\theta-\sin(t)\,\mathrm{d}t\\ \int_0^\theta\sin(t)\,\mathrm{d}t & \int_0^\theta\cos(t)\,\mathrm{d}t\end{pmatrix}=R\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)-R\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

— Soit $u\in E$ et $\varphi : I\to\mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. On a :

$$\left(\int_a^b\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right)u=\int_a^b\varphi(t)u\,\mathrm{d}t.$$

— Dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$, on a, pour $t \in \mathbb{R}$:

$$R(t) = \cos(t)E_{1,1} + (-\sin(t))E_{1,2} + \sin(t)E_{2,1} + \cos(t)E_{2,2}.$$

Ainsi, pour $\theta \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^\theta R(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^\theta \cos(t)\,\mathrm{d}tE_{1,1} + \int_0^\theta -\sin(t))\,\mathrm{d}tE_{1,2} + \int_0^\theta \sin(t)\,\mathrm{d}tE_{2,1} + \int_0^\theta \cos(t)\,\mathrm{d}tE_{2,2} \\
&= \begin{pmatrix} \int_0^\theta \cos(t)\,\mathrm{d}t & \int_0^\theta -\sin(t)\,\mathrm{d}t \\ \int_0^\theta \sin(t)\,\mathrm{d}t & \int_0^\theta \cos(t)\,\mathrm{d}t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sin(\theta) & \cos(\theta) - 1 \\ -\cos(\theta) + 1\,\mathrm{d}t & \sin(\theta)\,\mathrm{d}t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\,\mathrm{d}t & \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
\int_0^\theta R(t)\,\mathrm{d}t &= R\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) - R\left(-\frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

— Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E. Étant donnée la décomposition $u = \sum_{i=1}^p u_i e_i$ dans la base $\mathcal{B}$, les fonctions composantes de $f : t \mapsto \varphi(t)u$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $f_1 : t \mapsto \varphi(t)x_i$,...,$f_p : t \mapsto \varphi(t)x_p$ donc, par linéarité de l'intégrale à valeurs dans $\mathbb{K}$ et linéarité de la sommation :

$$\begin{aligned}
\int_a^b \varphi(t)u\,\mathrm{d}t &= \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{i=1}^p \left(\int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t\right) e_i \\
&= \sum_{i=1}^p \left(\int_a^b \varphi(t)x_i\,\mathrm{d}t\right) e_i \\
&= \sum_{i=1}^p x_i \left(\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right) e_i \\
&= \left(\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right) \sum_{i=1}^p x_i e_i \\
\int_a^b \varphi(t)u\,\mathrm{d}t &= \left(\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right) u.
\end{aligned}$$

Théorème 12.

Soit $f \in C_{pm}([a,b],E)$. La suite des sommes de Riemann de f converge vers $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ i.e.

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f.$$

Démonstration.

En reprenant les notations, calculs et arguments de la démonstration du lemme 2, on a :

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t &= \sum_{i=1}^{p}\left(\int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t\right)e_i \\
&= \sum_{i=1}^{p}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_i\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right)e_i \\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_i\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right)e_i \\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right).
\end{aligned}$$

□

Proposition 45.

L'application $f \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est une application linéaire de $C_{pm}([a,b],E)$ dans E.

Démonstration.

Soit $f,g:[a,b]\to I$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$. Soit $\mathcal{B}=(e_1,...,e_p)$ une base de E et on note $f_1,...f_p$ et $g_1,...g_p$ les applications composantes de, respectivement, f et g dans la base $\mathcal{B}$.
Alors les applications composantes de $\lambda f+\mu g$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $\lambda f_1+\mu g_1,...,\lambda f_p+\mu g_p$, et

ainsi, par linéarité de l'intégrale pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}
\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t &= \sum_{i=1}^{p} \left(\int_a^b (\lambda f_i + \mu g_i)(t)\,\mathrm{d}t \right) e_i \\
&= \sum_{i=1}^{p} \left(\left(\lambda \int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t \right) e_i + \left(\mu \int_a^b g_i(t)\,\mathrm{d}t \right) e_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{p} \left(\lambda \int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t \right) e_i + \sum_{i=1}^{p} \left(\mu \int_a^b g_i(t)\,\mathrm{d}t \right) e_i \\
\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t &= \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Par suite, $f \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ étant à valeurs dans E, elle appartient à $\mathcal{L}(C_{pm}([a,b],E),E)$. □

Proposition 46.

Soit $f \in C_{pm}([a,b],E)$. On a les propriétés suivantes de l'intégrale :

- *Intégrale et application linéaire.* Pour tout $L \in \mathcal{L}(E,F)$, $\displaystyle\int_a^b L\circ f(t)\,\mathrm{d}t = L\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)$.
- *Relation de Chasles.* Pour tout $x \in [a,b]$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
- *Inégalité triangulaire.* L'application $\|f\|_E : t \mapsto \|f(t)\|_E$ est continue par morceaux sur $[a,b]$ et on a :
$$\left\| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right\|_E \leq \int_a^b \|f(t)\|_E\,\mathrm{d}t$$
.

Démonstration.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E. On note $f_1, ..., f_p$ les applications composantes de f dans la base $\mathcal{B}$.

- Soit $L \in \mathcal{L}(E,F)$. D'après l'exemple 27, pour $\varphi : I \to \mathbb{K}$ continue par morceaux sur $[a,b]$ et $v \in F$, on a $\left(\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right) v = \int_a^b \varphi(t) v\,\mathrm{d}t$. Ainsi, on a, par linéarité de L, puis par linéarité

de l'intégrale "vectorielle" :

$$\begin{aligned} L\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) &= L\left(\sum_{i=1}^{p}\left(\int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t\right)e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{p}\left(\int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t\right)L(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{p}\left(\int_a^b f_i(t)L(e_i)\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \int_a^b\left(\sum_{i=1}^{p} f_i(t)L(e_i)\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b L\left(\sum_{i=1}^{p} f_i(t)e_i\right)\mathrm{d}t \\ L\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) &= \int_a^b L(f(t))\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

— Soit $x \in [a,b]$. On a, d'après la relation de Chasles pour l'intégrale à valeurs dans $\mathbb{K}$, on a :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t &= \sum_{i=1}^{p}\left(\int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t\right)e_i \\ &= \sum_{i=1}^{p}\left(\int_a^x f_i(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^b f_i(t)\,\mathrm{d}t\right)e_i \\ &= \sum_{i=1}^{p}\left(\int_a^x f_i(t)\,\mathrm{d}t\right)e_i + \sum_{i=1}^{p}\left(\int_x^b f_i(t)\,\mathrm{d}t\right)e_i \\ \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

— L'application $\|\cdot\|_E : E \to \mathbb{R}$ est continue sur E (voire exemple 7), donc $\|f\|_E = \|\cdot\|_E \circ f$ est continue par morceaux sur $[a,b]$ par composée d'une application continue par morceaux par une application continue (Proposition 43). Ainsi, le membre de droite de l'inégalité à montrer est bien défini.

Montrons désormais que cette inégalité est vraie.

- *En utilisant les sommes de Riemann.* Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n(f) \in E$ la somme de Riemann d'ordre n de f et $S_n(\|f\|_E) \in \mathbb{R}$ celle de $\|f\|$. Par inégalité triangulaire, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\|S_n(f)\|_E = \left\|\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right\|_E \leq \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left\|f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right\|_E = S_n(\|f\|_E) \quad (*).$$

L'application $\|\cdot\|_E : E \to \mathbb{R}$ est continue sur E (voire exemple 7), donc :

— comme, d'après le théorème **??**, $S_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, d'après la caractérisation

séquentielle de la continuité, on a :

$$\|S_n(f)\|_E \xrightarrow[n\to+\infty]{} \left\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right\|_E ;$$

— l'application $\|f\|_E = \|\cdot\|_E \circ f$ est continue par morceaux sur $[a,b]$ comme vu initialement, donc on a :

$$S_n(\|f\|_E) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b \|f(t)\|_E\,\mathrm{d}t.$$

Par suite, par passage à la limite dans $(*)$ quand n tend vers l'infini, on obtient :

$$\left\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right\|_E = \lim_{n\to+\infty} \|S_n(f)\|_E \leq \lim_{n\to+\infty} S_n(\|f\|_E) = \int_a^b \|f(t)\|_E\,\mathrm{d}t.$$

□

d. Primitives et intégrales

On rappelle qu'une fonction est continue par morceaux sur I si elle est continue par morceaux sur tout segment de I.

Notation 3. *Intégrale avec bornes dans un ordre quelconque*

Soit $f \in C_{pm}(I,E)$ et $\alpha,\beta \in I$. On note :

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } \alpha < \beta \\ 0 & \text{si } \alpha = \beta \\ \displaystyle -\int_\beta^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } \alpha > \beta. \end{cases}$$

Proposition 47. *Relation de Chasles*

Soit $f \in C_{pm}(I,E)$ et $c \in I$. On a :

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Définition 24. *Primitive d'une fonction continue*

Soit $f : I \to E$ une fonction continue sur I.
On dit qu'une fonction $F : I \to E$ est **une primitive de f sur I** si F est dérivable sur I et $F' = f$.

Proposition 48.

Soit $f \in C(I,E)$ et $F,G : I \to E$. Si F,G sont des primitives de f sur l'**intervalle** I, alors $F-G$ est constante sur I.

Démonstration.

On suppose que F,G sont des primitives de f sur I. Alors F,G sont dérivable sur I et $F' = f = G'$. Ainsi, par combinaison linéaire, $F-G$ est dérivable sur I et $(F-G)' = F' - G' = f - f = \mathbf{0}$. Par suite, d'après la proposition 33, $F-G$ est constante sur I. □

Notation 4.

Pour $F : I \to E$, on note :

$$[F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Théorème 13. *Théorème fondamental de l'Analyse*

Soit $f \in C(I,E)$.

i) L'application $F : I \to E$ définie par :

$$F : t \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est de classe C^1 sur I et $F' = f$ i.e. F est une primitive de f sur I.

ii) Pour toute primitive F de f sur I, on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Démonstration.

i) Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E. On note $f_1, ..., f_p$ les applications composantes de f dans la base $\mathcal{B}$ et $F_1 : x \mapsto \int_a^x f_1(t)\,\mathrm{d}t$,...,$F_p : x \mapsto \int_a^x f_p(t)\,\mathrm{d}t$.
On a alors, pour tout $x \in I$:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^p \left(\int_a^x f_i(t)\,\mathrm{d}t\right) e_i = \sum_{i=1}^p F_i e_i.$$

D'après le théorème fondamental de l'Analyse "à valeurs scalaires", pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, F_i est de classe C^1 sur I et $F_i' = f_i$. Ainsi, par opérations sur les fonctions de classe C^1, (Proposition 41), la fonction $F = \sum_{i=1}^p F_i e_i$ est de classe C^1 sur I et on a, d'après la proposition 32 :

$$F' = \sum_{i=1}^p F_i' e_i = \sum_{i=1}^p f_i e_i = f.$$

ii) Soit F une primitive de f sur I. D'après ce qui précède, la fonction $G : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur I donc, d'après la proposition 48, $F-G$ est constante sur I, disons

en $u \in E$.
Par suite, on a :

$$F(b) - F(a) = (G(b) + u) - (G(a) + u) = G(b) - \underbrace{G(a)}_{=0_E} = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

□

Exercice 19.

Déterminer une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

$$t \mapsto \frac{t^3 + t^2 - 1}{t^2 + 2t + 2} \quad t \mapsto \frac{1}{1 + t^3} \quad t \mapsto \left(\frac{2t}{\sqrt{1 - t^4}}, e^t \cos(t)\right).$$

Correction.

1. La fonction $t \mapsto t^2 + 2t + 2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et on a, par division euclidienne :

$$t^3 + t^2 - 1 = (t^2 + 2t + 2)(t - 1) + 1$$

donc

$$\frac{t^3 + t^2 - 1}{t^2 + 2t + 2} = \frac{(t^2 + 2t + 2)(t - 1) + 1}{t^2 + 2t + 2} = t - 1 + \frac{1}{t^2 + 2t + 2}$$

et de plus, $t^2 + 2t + 2 = 1 + (t + 1)^2$, donc :

$$\int \frac{1}{t^2 + 2t + 2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{1 + (t + 1)^2}\,\mathrm{d}t = \arctan(t + 1)$$

Par suite,

$$\int \frac{t^3 + t^2 - 1}{t^2 + 2t + 2}\,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} - t + \arctan(t + 1) + \text{ constante.}$$

Proposition 49. *Intégration par parties et changement de variable*

— *Intégration par parties.* Soit G un espace vectoriel de dimension finie, $f \in C^1([a, b], E)$, $g \in C^1([a, b], F)$ et $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire. On a :

$$\int_a^b B(f'(t), g(t))\,\mathrm{d}t = [B(f(t), g(t))]_a^b - \int_a^b B(f(t), g'(t))\,\mathrm{d}t.$$

— *Changement de variable.* Soit $\varphi \in C^1([a, b], \mathbb{R})$, $f \in C(J, E)$ où $J = \mathrm{Im}(\varphi)$. On a :

$$\int_a^b \varphi'(t) f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration.

Les démonstrations de ces deux techniques d'intégration très utiles reposent sur les propriétés opératoires de la dérivation et le théorème fondamental de l'Analyse. Elles sont en tout point similaires à celles vues dans le cas de l'intégrale à valeurs scalaires mais on les reproduit tout de même ici.

— Comme f, g sont de classe C^1 sur $[a,b]$ et B est bilinéaire sur $E \times F$, d'après la formule de Leibniz (Proposition 42), l'application $B(f,g) : t \mapsto B(f(t), g(t))$ est de classe C^1 sur $[a,b]$ et on a :

$$B(f,g)' = B(f',g) + B(f,g').$$

où $B(f',g)$ et $B(f,g')$ sont continues sur $[a,b]$ car f, g, f', g' sont continues sur $[a,b]$ et B est continue sur $E \times F$ (du fait que E et F sont de dimension finie).
Par suite, on a, d'après le théorème fondamental de l'Analyse (Théorème 13) et par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
[B(f(t),g(t))]_a^b &= \int_a^b B(f,g)'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b B(f',g)(t) + B(f,g')(t)\,\mathrm{d}t \\
[B(f(t),g(t))]_a^b &= \int_a^b B(f'(t),g(t))\,\mathrm{d}t + \int_a^b B(f(t),g'(t))\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

et donc :

$$\int_a^b B(f'(t),g(t))\,\mathrm{d}t = [B(f(t),g(t))]_a^b - \int_a^b B(f(t),g'(t))\,\mathrm{d}t.$$

— Soit F une primitive de f sur J (qui est bien un intervalle de $\mathbb{R}$ car image d'un intervalle par une fonction continue à valeurs réelles - théorème des valeurs intermédiaires).
Par composition (proposition 43, $F \circ \varphi$ est de classe C^1 sur I et on a $(F\circ\varphi)' = \varphi'.F'\circ\varphi = \varphi'.f\circ\varphi$ donc, d'après le théorème fondamental de l'Analyse (Théorème 13) appliqué deux fois :

$$\begin{aligned}
\int_a^b \varphi'(t) f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t &= \int_a^b (F\circ\varphi)'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= [(F\circ\varphi)(t)]_a^b \\
&= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \\
&= [F(x)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \\
\int_a^b \varphi'(t) f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

□

Théorème 14. *Inégalité des accroissements finis*

Soit $f \in C(I,E)$ une fonction de classe C^1 sur I. Si f' est bornée sur I alors on a :

$$\|f(b) - f(a)\|_E \leq \|f'\|_\infty (b-a).$$

Démonstration.

On suppose que f' est bornée sur I i.e. $\|f'\|_\infty = \sup_{t\in I} \|f'(t)\|_E$ est finie.
La fonction f est dérivable sur I de dérivée f' qui est continue sur I, donc f est une primitive de f'. Ainsi, d'après le théorème fondamental de l'Analyse (Théorème 13), on a $f(b)-f(a) = \displaystyle\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t$, d'où, d'après la proposition 46 et par croissance de l'intégrales à valeurs réelles :

$$\begin{aligned}
\|f(b)-f(a)\|_E &= \left\| \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t \right\|_E \\
&\leq \int_a^b \underbrace{\|f'(t)\|_E}_{\leq \|f'\|_\infty}\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_a^b \|f'\|_\infty\,\mathrm{d}t \\
\|f(b)-f(a)\|_E &\leq \|f'\|_\infty (b-a).
\end{aligned}$$

□

Corollaire 6.

Soit $f : I \to E$. Si f est de classe C^1 sur I et f' est bornée sur I, alors f est lipschitzienne sur I.

Démonstration.

On suppose f de classe C^1 sur I et f' bornée sur I. Alors, d'après le théorème précédent, pour tous $x, y \in I$, $\|f(x)-f(y)\| \leq \|f'\|_\infty |x-y|$. Par suite, f est lipschitzienne sur I. □

3. Formules de Taylor

Dans cette partie, I désigne un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et n désigne un entier naturel.

a. Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 15. *Formule de Taylor avec reste intégral*

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f \in C^{n+1}(I, E)$. Pour $a, b \in I$, on a :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + R_n,$$

où

$$R_n = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration.

On pourrait encore une fois passer par les applications composantes et la formule homononyme pour les fonctions à valeurs scalaires ; mais on reprend la démonstration par récurrence de cette formule qui s'adapte directement dans le cas à valeurs vectorielles.

Montrons, par récurrence sur $\mathbb{N}$, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}_n$ ="pour tout $f \in C^{n+1}(I,E)$ et pour tous $a,b \in I$, $f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n \,\mathrm{d}t$" est vraie.

- **Initialisation.** On a :

$$\sum_{k=0}^{0} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b f'(t)(b-t)^0 \,\mathrm{d}t = f(a) + f(b) - f(a) = f(b),$$

donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}_n$.
Soit $f \in C^{n+2}(I,E)$ et $a,b \in I$. Alors f' est de classe C^{n+1} sur I, donc, par hypothèse de récurrence, pour tous $a,b \in I$, on a :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + R_n \text{ où } R_n = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n \,\mathrm{d}t.$$

Soit $a,b \in I$. La fonction $f^{(n+1)}$ est de classe C^1 sur I car $f \in C^{n+2}(I,E)$ et $t \mapsto (b-a)^n$ également car polynomiale, donc, par intégration par parties (Proposition 49) :

$$\begin{aligned} R_n &= \left[-\frac{f^{(n+1)}(t)(b-t)^{n+1}}{n! \times (n+1)}\right]_a^b - \int_a^b -\frac{f^{(n+2)}(t)(b-t)^{n+1}}{n! \times (n+1)} \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} + \int_a^b \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(b-t)^{n+1} \,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Il én résulte que :

$$\begin{aligned} f(b) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + R_n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} + \int_a^b \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(b-t)^{n+1} \,\mathrm{d}t \\ f(b) &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(b-t)^{n+1} \,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Par suite, on a montré par récurrence sur $\mathbb{N}$, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ est vraie. □

Exercice 20.

Montrer que, dans la formule de Taylor avec reste intégral, pour $n \in \mathbb{N}$ et $a \neq b$, le reste R_n peut s'écrire :

$$R_n = (b-a)^{n+1} \int_0^1 \frac{f^{(n+1)}(a+t(b-a))}{n!}(1-t)^n \, \mathrm{d}t.$$

Correction.

On effectue le changement de variable licite $x = \frac{t-a}{b-a}$ dans l'intégrale R_n.

b. Inégalité de Taylor-Lagrange

L'inégalité de Taylor-Lagrange généralise l'inégalité des accroissements finis :

Théorème 16. *Inégalité de Taylor-Lagrange*

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f \in C^{n+1}(I, E)$. Si $f^{(n+1)}(t)$ est bornée sur I, alors, pour tous $a, b \in I$, on a :

$$\|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\|_E \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}\|f^{(n+1)}\|_\infty.$$

Démonstration.

On suppose $f^{(n+1)}(t)$ bornée sur I. Soit $a, b \in I$ avec $a < b$. D'après la formule de Taylor avec reste intégral, on a :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + R_n \text{ où } R_n = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n \, \mathrm{d}t.$$

On a, par inégalité triangulaire (Proposition 46) et par croissance de l'intégrale à valeurs réelles :

$$\begin{aligned}
\|R_n\|_E &\leq \int_a^b \frac{\|f^{(n+1)}(t)\|_E}{n!}(b-t)^n \, \mathrm{d}t \\
&\leq \int_a^b \|f^{(n+1)}\|_\infty \frac{(b-t)^n}{n!} \, \mathrm{d}t \\
&\leq \|f^{(n+1)}\|_\infty \left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_a^b \, \mathrm{d}t \\
\|R_n\|_E &\leq \|f^{(n+1)}\|_\infty \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

Par suite, on a :

$$\|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\|_E = \|R_n\|_E \leq \|f^{(n+1)}\|_\infty \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

□

c. Formule de Taylor-Young

Théorème 17. *Formule de Taylor-Young*

Soit $n \in \mathbb{N}$, $f \in C^n(I,E)$ et $t_0 \in I$. On a :

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}(t-t_0)^k + \underset{t\to t_0}{o}\left((t-t_0)^n\right).$$

Démonstration.

Pour $n=0$, comme f est continue sur I et donc en t_0, on a $f(t) = f(t_0) + \underset{t\to t_0}{o}(1)$.

On suppose $n \geq 1$. D'après la formule de Taylor avec reste intégral, on a, pour $t \in I$:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}(t-t_0)^k + R_n \text{ où } R_n = \int_{t_0}^{t} \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(t-x)^n \,\mathrm{d}x.$$

On note $g : t \mapsto f^{(n)}(t) - f^{(n)}(t_0)$. On a, par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} R_n &= \int_{t_0}^{t} \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(t-x)^n \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{t_0}^{t} \frac{f^{(n)}(t_0)}{(n-1)!}(t-x)^n \,\mathrm{d}x + \int_{t_0}^{t} \frac{(t-x)^n}{(n-1)!} g(x) \,\mathrm{d}x \\ R_n &= \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n + \int_{t_0}^{t} \frac{(t-x)^n}{(n-1)!} g(x) \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Comme la fonction $f^{(n)}$ est continue sur I et donc en t_0, g admet 0_E pour limite quand t tend vers t_0.
Ainsi, pour $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in I$ avec $|x - t_0| \leq \delta$, $\|g(x)\|_E \leq \varepsilon$, donc g est bornée sur $[t_0-\delta, t_0+\delta]$ et on a, pour tout $t \in I$ avec $|t-t_0| \leq \delta$, comme $[t_0,t] \subset [t_0-\delta, t_0+\delta]$,

$$\|g\|_{\infty,[t_0,t]} = \sup_{x\in[t_0,t]} |g(x)| \leq \varepsilon.$$

Par suite, la fonction $t \mapsto \|g\|_{\infty,[t_0,t]}$ est bien définie sur un voisinage de t_0 (par exemple sur $[t_0-\delta, t_0+\delta]$ avec un $\delta > 0$ obtenu avec $\varepsilon = 1$) et tend vers 0 quand t tend vers t_0 ; ainsi, par inégalité triangulaire, pour t dans ce voisinage :

$$\left\| \int_{t_0}^{t} \frac{(t-x)^n}{(n-1)!} g(x) \,\mathrm{d}x \right\|_E \leq \int_{t_0}^{t} \frac{|t-x|^n}{(n-1)!} \underbrace{\|g(x)\|_E}_{\leq \|g\|_{\infty,[t_0,t]}} \mathrm{d}x \leq |t-t_0|^n . \|g\|_{\infty,[t_0,t]},$$

d'où $\displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{(t-x)^n}{(n-1)!} g(x) \,\mathrm{d}x = \underset{t\to t_0}{o}\left((t-t_0)^n\right)$.

Il en résulte que, pour t au voisinage de t_0, on a :

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}(t-t_0)^k + R_n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}(t-t_0)^k + \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n + \int_{t_0}^{t} \frac{(t-x)^n}{(n-1)!} g(x)\,\mathrm{d}x \\ f(t) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}(t-t_0)^k + \underset{t\to t_0}{o}\left((t-t_0)^n\right). \end{aligned}$$

□

Partie D

Dérivées partielles

Dans cette partie, on suppose E et F de dimensions finies respectives $p, q \in \mathbb{N}^*$.

1. Dérivée suivant un vecteur

a. Définition "rapide" d'une partie ouverte

Dans ce paragraphe, on va donner la définition d'un ouvert d'un espace vectoriel normé, en anticipant un peu le chapitre "Topologie des espaces vectoriels normés" : nous avons besoin ici de cette notion pour s'assurer de la bonne définition de la dérivée d'une fonction suivant un vecteur que nous verrons dans le prochain paragraphe ; en effet, nous aurons besoin que, pour chaque point de l'ensemble de définition de cette fonction, dans toutes les directions autour de ce point, il existe un "intervalle" contenant ce point... ce qui nous amène à considérer la notion d'ouvert - notion déjà étudiée en 1ère année dans $\mathbb{R}^2$!

Définition 25.

Soit U une partie de E. On dit que U est un ouvert de $(E, \|\cdot\|_E)$ si, pour tout $x \in E$, il existe un réel $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$.

Remarque 15.

Nous redonnerons cette définition et on l'étudiera plus longuement dans le chapitre "Topologie des espaces vectoriels normés".
Pour l'instant, on admettra dans la suite que, E étant de dimension finie, la notion d'ouvert est indépendante de la norme choisie sur E, on pourra donc dire "U est un ouvert de E".
Mis à part cela, pour la suite de cette partie, nous aurons seulement besoin, concernant les propriétés des ouverts, du lemme suivant :

Lemme 3.

Soit U un ouvert non vide de E et $a \in U$.

Pour tout $v \in E$, l'ensemble $\{t \in \mathbb{R} \mid a + tv \in U\}$ contient un intervalle ouvert contenant 0.

Démonstration.

Soit $v \in E$. Comme $a \in U$, il existe un réel $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$. Ainsi, si $v = 0_E$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $a + tv \in U$; et si $v \neq 0_E$, pour tout $t \in \left]-\frac{r}{\|v\|}, \frac{r}{\|v\|}\right[$, $\|(a + tv) - a\| = |t|\|v\| < r$, donc, $a + tv \in B(a, r) \subset U$.
Par suite, l'ensemble $\{t \in \mathbb{R} \mid a + tv \in U\}$ contient un intervalle ouvert contenant 0. □

Dans toute la suite de cette partie, U désigne un ouvert non vide de E.

b. Définition et propriétés de la dérivée suivant un vecteur

Le lemme précédent nous assure que la définition suivante a bien du sens :

Définition 26.

Soit $f : U \to F$ une fonction, $a \in U$ et $v \in E$.
On dit que f est **dérivable en a suivant** v si la fonction $t \mapsto f(a+tv)$, définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, est dérivable en 0 i.e. si $t \mapsto \dfrac{1}{t}\left(f(a+tv) - f(a)\right)$ admet une limite en 0. Dans ce cas, on note :

$$D_v f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(f(a+tv) - f(a)\right),$$

et $D_v f(a)$ est appelée la **dérivée de f en a selon** v.

Définition-Proposition 27. *Développement à l'ordre 1*

Soit $f : U \to F$ une fonction, $a \in U$ et $v \in E$.
La fonction f est dérivable en a suivant v si, et seulement si, il existe $\ell \in E$ tel que :

$$f(a+tv) = f(a) + t.\ell + \underset{t\to 0}{o}(t).$$

Et dans ce cas, on a $\ell = D_v f(a)$ et l'égalité :

$$f(a+tv) = f(a) + t.D_v f(a) + \underset{t\to 0}{o}(t)$$

est appelé **développement de f en a suivant le vecteur v à l'ordre** 1.

Démonstration.

La fonction f est dérivable en a suivant v si, et seulement si, la fonction $\varphi : t \mapsto f(a+tv)$ est dérivable en 0 si, et seulement si, celle-ci possède un développement à l'ordre 1 (en tant que fonction de la variable réelle) i.e. il existe $\ell \in E$ tel que $\varphi(t) = \varphi(0) + t.\ell + \underset{t\to 0}{o}(t)$ avec, dans ce cas, $\ell = \varphi'(0)$.
D'où le résultat car $\varphi(0) = f(a)$ et $\varphi'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\varphi(t) - \varphi(0)\right) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(f(a+tv) - f(a)\right)$. □

Exemple 28.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f : (x, y) \mapsto x^2 + 5xy^3$. Alors

$$D_{(1,1)} f(x_0, y_0) = 2x_0 + 5y_0^3 + 15x_0 y_0^2.$$

On a, pour $t \in \mathbb{R}^*$, en posant $a = (x_0, y_0)$ et $v = (1,1)$:

$$\begin{aligned} f(a+tv) - f(a) &= (x_0+t)^2 + 5(x_0+t)(y_0+t)^3 - (x_0^2 + 5x_0y_0^3) \\ &= x_0^2 + 2x_0t + x_0^2 + 5(x_0+t)(y_0^3 + 3y_0^2t + 3y_0t^2 + t^3) - (x_0^2 + 5x_0y_0^3) \\ &= t(2x_0 + 5y_0^3 + 15x_0y_0^2) + t^2(3x_0y_0 + x_0t + 3y_0^2 + 3y_0^2t + t^2) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{t}\left(f(a+tv) - f(a)\right) = (2x_0 + 5y_0^3 + 15x_0y_0^2) + t(3x_0y_0 + x_0t + 3y_0^2 + 3y_0^2t + t^2) \xrightarrow[t\to 0]{} 2x_0 + 5y_0^3 + 15x_0y_0^2.$$

Par suite, f est dérivable en (x_0, y_0) selon le vecteur $(1,1)$ et on a :

$$D_{(1,1)}f(x_0, y_0) = 2x_0 + 5y_0^3 + 15x_0y_0^2.$$

Exercice 21.

Soit $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ tel que $f(M) = M^2$ et $A, V \in M_n(\mathbb{R})$.
Déterminer la dérivée de f en A suivant V.

Correction.

Soit $A, V \in M_n(\mathbb{R})$. Pour $t \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\begin{aligned} f(A+tV) - f(A) &= (A+tV)^2 - A^2 \\ &= A^2 + tAV + tVA + t^2V^2 - A^2 \\ f(A+tV) - f(A) &= t(AV + VA) + t^2V \end{aligned}$$

d'où :

$$\frac{1}{t}\left(f(A+tV) - f(A)\right) = AV + VA + tV \xrightarrow[t\to 0]{} AV + VA$$

donc f est dérivable en A suivant V et on a :

$$D_V f(A) = AV + VA.$$

Proposition 50.

Soit G un espace vectoriel normé, $f : U \to F$, $L \in \mathcal{L}(F, G)$, $a \in U$ et $v \in E$.
Si f est dérivable en a suivant v, alors $L \circ f$ est dérivable en a suivant v et on a :

$$D_v(L \circ f)(a) = L(D_v f(a)).$$

Démonstration.

On suppose f est dérivable en a suivant u.
On applique la proposition 36 à la fonction $\varphi : t \mapsto f(a+tv)$ définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ car U est un ouvert, et dérivable en 0 car f est dérivable en a suivant v, de dérivée $\varphi'(0) = D_v f(a)$. Ainsi $L \circ \varphi : t \mapsto L \circ f(a+tv)$ est dérivable en 0, d'où $L \circ f$ est dérivable en a suivant v et on a :

$$D_v(L \circ f)(a) = (L \circ \varphi)'(0) = L(\varphi'(0)) = L(D_v f(a)).$$

□

2. Dérivées partielles

Définition 28. *Dérivée partielle en un point*

Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E, $f : U \to F$ et $a \in U$.
Pour $j \in [\![1, p]\!]$, on dit que f admet une **j-ème dérivée partielle en a dans la base $\mathcal{B}$** si f admet une dérivée en a suivant e_j. Dans ce cas, on note :

$$\partial_j f(a) = D_{e_j} f(a) \text{ ou encore } \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = D_{e_j} f(a).$$

Définition 29. *Application dérivée partielle*

Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E et $f : U \to F$.
Si f admet une dérivée partielle en tout point x de U dans la base $\mathcal{B}$, alors on appelle **j-ème dérivée partielle de f dans la base $\mathcal{B}$** l'application $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ de U dans F telle que :

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} : x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x).$$

Remarque 16.

Pour $E = \mathbb{R}^3$ par exemple, et $f : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ on notera

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}$$

les dérivées partielles suivant les vecteurs de la base canonique.

Exemple 29.

Pour $f : (x, y, z) \mapsto (x^2 y, 2z^3 + y e^{2x})$ admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ et on a :

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) = (2xy, 2ye^{2x}), \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z) = (x^2, e^{2x}), \quad \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z) = (0, 3z^2)$$

Exercice 22.

Calculer les dérivées partielles de $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ suivant les vecteurs de la base canonique où :

$$f(x,y,z,t) = \frac{xy+z}{1+t^2}$$

Correction.

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y,z,t) = \frac{y}{1+t^2}; \qquad \frac{\partial}{\partial y}f(x,y,z,t) = \frac{x}{1+t^2};$$
$$\frac{\partial}{\partial z}f(x,y,z,t) = \frac{1}{1+t^2}; \qquad \frac{\partial}{\partial t}f(x,y,z,t) = -\frac{2t(xy+z)}{(1+t^2)^2}.$$

Exercice 23.

On considère la fonction $f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$ mais qu'elle admet des dérivées partielles en $(0,0)$ suivant la base canonique.

Correction.

Tout d'abord f n'est pas continue en $(0,0)$: en effet, on a :

$$f(1/n,1/n) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n2}} = \frac{1}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$$

et $(1/n,1/n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (0,0)$.

Ainsi, f n'est pas continue en $(0,0)$ (on peut montrer également qu'elle n'est pas prolongeable par continuité : on aurait pu prendre n'importe quelle valeur pour $f(0,0)$, f n'aurait pas été continue en $(0,0)$).

Malgré cela, on va montrer que f possède des dérivées partielles dans la base canonique (e_1,e_2) de $\mathbb{R}^2$.

On a,

$$\frac{1}{t}(f((0,0)+te_1) - f(0,0)) = \frac{1}{t}(f(1,0) - f(0,0)) = 0 \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

Donc, par définition, f admet une dérivée partielle en $(0,0)$ suivant e_1 et on a :

$$\frac{\partial}{\partial x}f(0,0) = D_{e_1}f(0,0) = 0.$$

Par un calcul similaire, on trouve que f admet une dérivée partielle en $(0,0)$ suivant e_2 et que :

$$\frac{\partial}{\partial y}f(0,0) = D_{e_2}f(0,0) = 0.$$

Ainsi, f admet des dérivées partielles en $(0,0)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$... alors qu'elle n'est pas continue en $(0,0)$...

Remarque 17.

Attention ! Contrairement au cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, une fonction peut admettre des dérivées partielles égales en un point mais ne pas être continue en ce point ! (voire la fonction précédente)

Proposition 51.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E, $f : U \to F$, $L \in \mathcal{L}(F, G)$, $j \in [\![1, p]\!]$ et $a \in U$.
Si f admet une j-ème dérivée partielle en a dans la base $\mathcal{B}$, alors $L \circ f$ également et on a :

$$\frac{\partial(L \circ f)}{\partial x_j}(a) = L\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\right).$$

Démonstration.

On applique la proposition 50 à $u = e_j$. □

3. Matrice jacobienne

Rappel :
Étant donné une fonction $f : U \to F$ et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q)$ une base de F, on a la décomposition, pour chaque $x \in U$,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{q} f_i(x)\varepsilon_i$$

où les fonctions $f_i : U \to \mathbb{R}$ sont les **applications composantes** de f dans la base $\mathcal{C}$.

Exemple : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ telle que :

$$f(x, y, z) = (x + y^2, 2xyz).$$

Dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, les applications composantes de f sont :

$$f_1(x, y, z) = x + y^2 \text{ et } f_2(x, y, z) = 2xyz.$$

Définition 30. *Matrice jacobienne*

Soit $f : U \to F$ une fonction, $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ des bases de E, F respectivement et $a \in U$. On suppose que f admet des dérivées partielles en a dans la base $\mathcal{B}$.
On appelle **matrice jacobienne de f en a dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$** la matrice notée $J_f(a) \in$

$M_{q,p}(\mathbb{R})$ telle que :

$$J_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\leq i\leq q\\ 1\leq j\leq p}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix}.$$

Exemple 30.

Application de passage des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes
L'application $\varphi : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie, pour $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, par :

$$\varphi(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta)),$$

admet pour matrice jacobienne en (r,θ) dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$:

$$J_\varphi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Exercice 24.

Calculer la matrice jacobienne dans les bases canoniques :

1. $f : (x,y) \mapsto (x+y, x^2y)$ en (x,y) puis en $(0,0)$;
2. $g : (x,y,z) \mapsto \left(\dfrac{\cos(xy)}{1+z^2}, z^3e^{xy}\right)$ en (x,y,z) puis en $(-1,\pi,0)$;
3. $h : (x,y,z,t) \mapsto (xy, yz, zt, tx)$ en (x,y,z,t) puis en $(1,1,1,1)$.

Correction.

1. On a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, en posant $f_1(x,y) = x+y$ et $f_2(x,y) = x^2y$:

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2xy & x^2 \end{pmatrix} \text{ donc } J_f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. On a, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, en posant $g_1(x,y,z) = \frac{\cos(xy)}{1+z^2}$ et $g_2(x,y,z) = z^3e^{xy}$:

$$\begin{aligned} J_g(x,y,z) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{y\sin(xy)}{1+z^2} & -\frac{x\sin(xy)}{1+z^2} & -\frac{2z\cos(xy)}{(1+z^2)^2} \\ yz^3e^{xy} & xz^3e^{xy} & 3z^2e^{xy} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc

$$J_g(-1,\pi,0)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

3. On a, pour tout $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$, en posant $h_1(x,y,z,t)=xy$, $h_2(x,y,z,t)=yz$, $h_3(x,y,z,t)=zt$ et $h_4(x,y,z,t)=tx$:

$$J_h(x,y,z,t)=\begin{pmatrix}\frac{\partial h_1}{\partial x}&\frac{\partial h_1}{\partial y}&\frac{\partial h_1}{\partial z}&\frac{\partial h_1}{\partial t}\\\frac{\partial h_2}{\partial x}&\frac{\partial h_2}{\partial y}&\frac{\partial h_2}{\partial z}&\frac{\partial h_2}{\partial t}\\\frac{\partial h_3}{\partial x}&\frac{\partial h_3}{\partial y}&\frac{\partial h_3}{\partial z}&\frac{\partial h_3}{\partial t}\\\frac{\partial h_4}{\partial x}&\frac{\partial h_4}{\partial y}&\frac{\partial h_4}{\partial z}&\frac{\partial h_4}{\partial t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y&x&0&0\\0&z&y&0\\0&0&t&z\\t&0&0&x\end{pmatrix}$$

donc

$$J_h(1,1,1,1)=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\1&0&0&1\end{pmatrix}$$

Exercice 25.

Donner la matrice jacobienne de l'application S de passage des coordonnées sphériques vers les coordonnées cartésiennes dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ au point (r,θ,φ)

Correction.

L'application S de passage des coordonnées sphériques vers les coordonnées cartésiennes dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est l'application $S:\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ définie, pour $(r,\theta,\varphi)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, par :

$$S(r,\theta,\phi)=(r\sin(\theta)\cos(\varphi),r\sin(\theta)\sin(\varphi),r\cos(\theta)).$$

Sa matrice jacobienne en (r,θ,φ) dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donc :

$$\begin{aligned}J_S(r,\theta,\varphi)&=\begin{pmatrix}\frac{\partial S_1}{\partial r}(r,\theta,\varphi)&\frac{\partial S_1}{\partial\theta}(r,\theta,\varphi)&\frac{\partial S_1}{\partial\varphi}(r,\theta,\varphi)\\\frac{\partial S_2}{\partial r}(r,\theta,\varphi)&\frac{\partial S_2}{\partial\theta}(r,\theta,\varphi)&\frac{\partial S_2}{\partial\varphi}(r,\theta,\varphi)\\\frac{\partial S_3}{\partial r}(r,\theta,\varphi)&\frac{\partial S_3}{\partial\theta}(r,\theta,\varphi)&\frac{\partial S_3}{\partial\varphi}(r,\theta,\varphi)\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\sin(\theta)\cos(\varphi)&r\cos(\theta)\cos(\varphi)&-r\sin(\theta)\sin(\varphi)\\\sin(\theta)\sin(\varphi)&r\cos(\theta)\sin(\varphi)&r\sin(\theta)\cos(\varphi)\\\cos(\theta)&-r\sin(\theta)&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$