Corrigé du devoir surveillé n°1

Exercice 1.

Calculer les intégrales suivantes :

$$\text{a)} \int_2^{33} \frac{1}{(t-1)^2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{b)} \int_0^1 \frac{1}{e^{2x}+e^x}\,\mathrm{d}x$$

Remarque : pour la seconde intégrale, on pourra utiliser un changement de variable

Correction.

a) On a :

$$\int_2^{33} \frac{1}{(t-1)^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t-1}\right]_2^{33} = -\frac{1}{32} + \frac{1}{1} = \frac{31}{32}.$$

b) On effectue le changement de variable $u = e^x$ qui est bien licite car exp est C^1 strictement croissante sur $[0,1]$:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{e^{2x}+e^x}\,\mathrm{d}x = \int_1^e \frac{1}{u^2+u} \times \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \int_1^e \frac{1}{u^2(u+1)}\,\mathrm{d}u.$$

Or, par décomposition en éléments simples, on obtient :

$$\frac{1}{u^2(u+1)} = \frac{1}{u^2} - \frac{1}{u} + \frac{1}{u+1}$$

d'où :

$$I = \left[-\frac{1}{u} - \ln(u) + \ln(1+u)\right]_1^e = \ln(1+e) - \frac{1}{e} - \ln(2).$$

Exercice 2.

On considère la fonction $f : x \mapsto \arctan(x)$.

1. (a) Donner le développement limité en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ à l'ordre 4.

   (b) En déduire le développement limité en 0 de f à l'ordre 5

   (c) Calculer la limite suivante :

   $$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-x}{\sin(x)-x}.$$

2. Montrer que f est une fonction concave sur $\mathbb{R}_+$ et convexe sur $\mathbb{R}_-$
3. En déduire l'inégalité suivante, pour tout $x \in [0,1]$:

$$\frac{\pi}{4}x \leq f(x) \leq \frac{3}{4}(x - \frac{1}{\sqrt{3}}) + \frac{\pi}{6}$$

Correction.

1. (a) On a $\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4)$ au voisinage de 0.

   (b) On sait que, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ donc en intégrant le DL précédent, on obtient, au voisinage de 0 :

$$f(x) - f(0) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5).$$

   Sachant que $f(0) = 0$, on a donc :

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5).$$

   (c) pour x au voisinage de 0, d'après ce qui précède, on a $f(x) - x = -\frac{x^3}{3} + o(x^3)$ et on sait que $\sin(x) - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3)$.
   Ainsi :

$$\frac{f(x) - x}{\sin(x) - x} \sim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{3}}{-\frac{x^3}{6}} = 2.$$

   Il en résulte que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - x}{\sin(x) - x} = \dfrac{1}{2}$.

2. La fonction f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

   Donc f'' est positive sur $\mathbb{R}_-$ et négative sur $\mathbb{R}_+$, d'où le résultat.

3. Comme f est concave sur $\mathbb{R}_+$, son graphe est au dessus de ses cordes et en dessous de ses tangentes.
   En particulier, il est au dessus de la corde entre les points d'abscisses 0 et $\pi/4$ qui est d'équation $\frac{\pi}{4}x$ (car $f(0) = 0$ et $f(1) = \pi/4$) ; et il est en dessous de sa tangente en $\frac{1}{\sqrt{3}}$ qui est d'équation

$$y = \frac{3}{4}(x - \frac{1}{\sqrt{3}}) + \frac{\pi}{6}$$

   car $f'(\frac{1}{\sqrt{3}}) = 3/4$ et $f(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \pi/6$.

Exercice 3.

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $x \in [1, 2]$, on a : $f(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1}$.

2. Déduire de la question précédente la valeur de l'intégrale $J = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x$.

3. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Correction.

1. Soit $x \in [1,2]$. On a
$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} = \frac{(a+b)x+a}{x(x+1)}.$$
Ainsi, on a
$$\begin{aligned}
& f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}, \quad \text{pour tout } x \in [1,2] \\
\iff \quad & \frac{1}{x(x+1)} = \frac{(a+b)x+a}{x(x+1)}, \quad \text{pour tout } x \in [1,2] \\
\iff \quad & 1 = (a+b)x + a, \quad \text{pour tout } x \in [1,2] \\
\iff \quad & a = 1 \quad \text{et} \quad a+b = 0 \\
\iff \quad & a = 1 \quad \text{et} \quad b = -1.
\end{aligned}$$

2. On en déduit que l'on a
$$\begin{aligned}
J = \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} \mathrm{d}x &= \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) \mathrm{d}x \\
&= \Big[\ln(x) \Big]_1^2 - \Big[\ln(x+1) \Big]_1^2 \\
&= \ln(2) - (\ln(3) - \ln(2)) \\
&= 2\ln(2) - \ln(3).
\end{aligned}$$

3. Par la méthode d'intégration par parties, on a
$$\begin{aligned}
I = \int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2} \mathrm{d}t &= \int_1^2 \underbrace{\frac{1}{t^2}}_{u'(t)} \underbrace{\ln(1+t)}_{v(t)} \mathrm{d}t \quad \text{avec } u(t) = -\frac{1}{t} \\
&= \Big[u(t)v(t) \Big]_1^2 - \int_1^2 u(t)v'(t)\mathrm{d}t \\
&= \Big[-\frac{\ln(1+t)}{t} \Big]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{t(1+t)} \mathrm{d}t \\
&= -\frac{\ln(3)}{2} + \ln(2) + J \\
&= 3\ln(2) - \frac{3\ln(3)}{2}.
\end{aligned}$$

Exercice 4.

Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i}.$$

Correction.

La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est concave car elle est deux fois dérivable sur cet intervalle et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} \leq 0$. Ainsi, d'après l'inégalité de Jensen, on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lambda_1 = ... = \lambda_n = \frac{1}{n}$ (et donc de somme égale à 1) :

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(a_i).$$

Or,

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} a_i} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i},$$

et

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f(a_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{a_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i}.$$

Ainsi, en multipliant l'inégalité par $\sqrt{n} \geq 0$, on obtient le résultat, à savoir :

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i}.$$

‘