Corrigé du devoir surveillé n°2

1. Intégration

Exercice 1.

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ **2.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}$

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t^\alpha}dt$ en fonction de la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$

Correction.

1. Ici, on ne connait pas de primitive de e^{-t^2} qui s'exprime facilement à l'aide des fonctions usuelles (en fait, c'est même impossible). On doit donc comparer. Commençons par remarquer que $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Le problème de convergence de l'intégrale ne se pose donc qu'au voisinage de $+\infty$. Mais il est facile de voir que
$$\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x^2} = \lim_{u\to+\infty} ue^{-u} = 0.$$
Autrement dit, $e^{-x^2} = o(1/x^2)$. Ainsi, puisque $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge, il en est de même de $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$.
2. En 1, la fonction est équivalente à $\frac{1}{1-t}$, fonction de signe constant dont l'intégrale est divergente (en 1). Ainsi, l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}}dt$ diverge.
3. La fonction $t \mapsto \frac{t-\sin t}{t^\alpha}$ est continue sur $]0, +\infty[$. En $+\infty$, elle est équivalente à $\frac{1}{t^{\alpha-1}}$. Ainsi, l'intégrale est convergente au voisinage de $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 2$. Au voisinage de 0, il faut faire un développement limité du sinus pour trouver un équivalent du numérateur. On a
$$t - \sin t = t - t + \frac{t^3}{6} + o(t^3)$$
et donc la fonction est équivalente à $\frac{1}{6t^{\alpha-3}}$. L'intégrale est convergente en 0 si et seulement si $\alpha - 3 < 1$, donc si et seulement si $\alpha < 4$. On en déduit que l'intégrale entre 0 et $+\infty$ est convergente si et seulement si $\alpha \in]2, 4[$.

Exercice 2. *E3A 2015*

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ existe. On admet alors que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

2. (a) Montrer que pour tout α strictement positif et pour tout x réel, l'application $t \mapsto \dfrac{1-\cos \alpha t}{t^2} e^{-itx}$ est prolongeable par continuité en 0.

   (b) Montrer que : $\forall \alpha > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto \dfrac{1-\cos \alpha t}{t^2} e^{-itx}$ ainsi prolongée est intégrable sur $\mathbb{R}$.

3. On note, $\forall \alpha > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos \alpha t}{t^2} e^{-itx} dt.$$

   (a) Montrer que I est réelle.

   (b) Soit $A > 0$ et $B > 0$. On admet l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{\cos Bx}{x^2} dx$.
   Montrer que :

$$\int_A^{+\infty} \frac{\cos Bx}{x^2} dx = \frac{\cos AB}{A} - B \int_{AB}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

   (c) En déduire le calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos Bx}{x^2} dx$ pour $B > 0$ puis pour B quelconque

   (d) En déduire le calcul de l'intégrale I .

Correction.

1. La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

   Sur $]0, 1]$ On a $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

   donc la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est prolongeable par continuité en 0

   donc intégrable sur $[0, 1]$ d'où l'existence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x$

   Sur $[1, +\infty[$ Soit $A > 1$

   On effectue une intégration par parties avec des fonctions de classe C^1 sur le segment $[1, A]$:

   On obtient (1) : $\displaystyle\int_1^A \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x = \left[\frac{-\cos x}{x}\right]_1^A - \int_1^A \frac{+\cos x}{x^2} \, \mathrm{d}x = \cos(1) - \frac{\cos A}{A} - \int_1^A \frac{\cos x}{x^2} \, \mathrm{d}x$

Or $\lim\limits_{A\to+\infty} \dfrac{\cos A}{A} = 0$ (2)

et la fonction $x \mapsto \dfrac{\cos x}{x^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$

et $\forall x \in [1, +\infty[$, $\left|\dfrac{\cos x}{x^2}\right| \leq \dfrac{1}{x^2}$

Or la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ car $2 > 1$

Par comparaison à une fonction positive $x \mapsto \dfrac{\cos x}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$

d'où l'existence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

Par passage à la limite dans (1) (avec (2)) on obtient l'existence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$

En conclusion $\boxed{\text{L'intégrale } \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \text{ existe}}$

2. (a) Quand $t \longrightarrow 0$, on a $\alpha t \longrightarrow 0$

donc $\cos(\alpha t) = 1 - \frac{\alpha^2 t^2}{2} + \omega(t^2)$

ainsi $1 - \cos(\alpha t) = \frac{\alpha^2 t^2}{2} + \omega(t^2) \sim \frac{\alpha^2 t^2}{2}$ car $\alpha \neq 0$

donc $\dfrac{1-\cos(\alpha t)}{t^2} e^{-\iota t x} \sim \frac{\alpha^2 t^2}{2t^2} 1$

donc $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1-\cos(\alpha t)}{t^2} e^{-\iota t x} = \dfrac{\alpha^2}{2}$

donc $\boxed{\text{l'application } t \mapsto \dfrac{1-\cos(\alpha t)}{t^2} e^{-\iota t x} \text{ est prolongeable par continuité en } 0}$

(b) L'application $t \mapsto \dfrac{1-\cos(\alpha t)}{t^2} e^{-\iota t x}$ ainsi prolongée est continue sur $\mathbb{R}$.

<u>Sur $[1, +\infty[$</u> on a pour $t \geq 1$, $\left|\dfrac{1-\cos(\alpha t)}{t^2} e^{-\iota t x}\right| \leq \dfrac{1 + |\cos(\alpha t)|}{t^2} |e^{-\iota t x}| \leq \dfrac{2}{t^2}$

Comme en 1., on obtient l'intégrabilité de $t \mapsto \dfrac{1-\cos(\alpha t)}{t^2} e^{-\iota t x}$ sur $[1, +\infty[$

<u>Sur $]-\infty, -1]$</u> de façon analogue $t \mapsto \dfrac{1-\cos(\alpha t)}{t^2} e^{-\iota t x}$ est intégrable sur $]-\infty, -1]$

$\boxed{\text{Le prolongement par continuité de } t \mapsto \dfrac{1-\cos(\alpha t)}{t^2} e^{-\iota t x} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}}$

3. (a) On a $I \in \mathbb{C}$.

Et $\overline{I} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\left(\frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2} e^{-\iota t x}\right)} \,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2} e^{\iota t x} \,\mathrm{d}t$

On effectue le changement de variable affine $u = -t$; $-\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$ (C^1 , bijectif, strictement décroissante)

ainsi $\overline{I} = -\displaystyle\int_{+\infty}^{-\infty} \frac{1-\cos(-\alpha u)}{(-u)^2} e^{-\iota u x} \,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2} e^{-\iota t x} \,\mathrm{d}t = I$

Ce qui prouve que $\boxed{I \text{ est réelle}}$

(b) On effectue un changement de variable affine $t = Bx$; $\frac{\mathrm{d}t}{B} = \mathrm{d}x$ à partir d'une intégrale convergente

Ainsi $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{\cos(Bx)}{x^2} \,\mathrm{d}x = \int_{AB}^{+\infty} \frac{B^2\cos(t)}{t^2} \frac{\mathrm{d}t}{B} = B \int_{AB}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} \,\mathrm{d}t$

On effectue ensuite une intégration par parties (sous réserves d'existences) avec des fonctions de classe C^1

ainsi $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{\cos(Bx)}{x^2} \,\mathrm{d}x = B\left[-\frac{\cos(t)}{t}\right]_{t=AB}^{t\to+\infty} - B\int_{AB}^{+\infty} \frac{+\sin(t)}{t} \,\mathrm{d}t$

Comme l'intégrale de gauche existe bien ainsi que l'expression entre crochets

on peut conclure à l'existence $\boxed{\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{\cos(Bx)}{x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{\cos(AB)}{A} - B\int_{AB}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \,\mathrm{d}t}$

(c) On suppose $B > 0$.

Soit $A > 0$. On a $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_x^{x\to+\infty} = \frac{1}{A}$

donc $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{1-\cos(Bx)}{x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{1-\cos(AB)}{A} + B\int_{AB}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \,\mathrm{d}t$

Par un calcul asymptotique comme en 2(a), on a $\displaystyle\lim_{A\to 0} \frac{1-\cos(AB)}{A} = 0$

à l'aide de 1 on a $\displaystyle\lim_{u\to 0} \int_u^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$

et donc par passage à la limite on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(Bx)}{x^2} \,\mathrm{d}x = B\frac{\pi}{2}$

si $B < 0$, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(Bx)}{x^2} \,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(-Bx)}{x^2} \,\mathrm{d}x = -B\frac{\pi}{2}$

si $B = 0$, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(Bx)}{x^2} \,\mathrm{d}x = 0$

donc $\boxed{\text{dans le cas général on a } \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(Bx)}{x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{|B|\pi}{2}}$

(d) Comme I est réelle, on a $I = \mathrm{Re}(I) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2} \cos(tx) \,\mathrm{d}t$

puis par parité $I = 2\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx) - \cos(tx)\cos(\alpha t)}{t^2} \,\mathrm{d}t$

En utilisant la formule $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$

on obtient $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\cos(tx) - \cos(t(x+\alpha)) - \cos(t(x-\alpha))}{t^2} \,\mathrm{d}t$

Pour utiliser : $\forall B \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(Bt)}{t^2} \,\mathrm{d}t = \frac{|B|\pi}{2}$

on écrit $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1-\cos(t(x+\alpha))) + (1-\cos(t(x-\alpha))) - 2(1-\cos(tx))}{t^2}\,\mathrm{d}t$

donc $\boxed{I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2} e^{-\imath tx}\,\mathrm{d}t = \frac{|x+\alpha| + |x-\alpha| - 2|x|}{2}\pi}$

2. Normes et distances

Exercice 3.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $M_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$, c'est-à-dire, pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\|X\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|.$$

On pose, pour $A \in M_n(\mathbb{R})$:

$$\|A\| = \sup\left\{\frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} \mid X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}\right\}.$$

1. (a) Justifier, pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, l'existence de $\|A\|$.
   (b) Montrer que pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$,
   $$\|A\| = \sup\left\{\|AX\|_\infty \mid X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ et } \|X\|_\infty = 1\right\}.$$
   (c) Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $M_n(\mathbb{R})$.
2. (a) Montrer que pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$ et pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$
   $$\|AX\|_\infty \leq \|A\|.\|X\|_\infty$$
   (b) En déduire que pour tous $A, B \in M_n(\mathbb{R})$,
   $$\|AB\| \leq \|A\|.\|B\|$$
3. Montrer que, pour tout $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n} \in M_n(\mathbb{R})$:
   $$\|A\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right).$$

Correction.

1. (a) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, on pose $\mathcal{A} = \left\{\frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} \mid X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}\right\}$.
   Tout d'abord, l'ensemble $\mathcal{A}$ est bien défini car pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}$, $\|X\|_\infty \neq 0$ par l'axiome de séparation de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

L'ensemble $\mathcal{A}$ est une partie de $\mathbb{R}$ et elle est non vide car, en notant A_1 la première colonne de A et $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}$, on a :

$$\|A_1\|_\infty = \frac{\|AE_1\|_\infty}{\|E_1\|_\infty} \in \mathcal{A}.$$

De plus, pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}$, on a :

$$\begin{aligned} \|AX\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \right| \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|. \underbrace{|x_k|}_{\leq \|X\|_\infty} \\ &\leq \left(\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| \right) . \|X\|_\infty \end{aligned}$$

Par suite, en posant $C = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|$, on a :

$$\frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} \leq C.$$

Ainsi, $\mathcal{A}$ est majorée par C.
Il en résulte que $\mathcal{A}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, donc elle possède une borne supérieure ; ce qui justifie l'existence de $\|A\|$.

(b) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{B} = \sup \{\|AX\|_\infty \mid X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ et } \|X\|_\infty = 1\}$. Alors, comme pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\|X\|_\infty = 1$, on a $\|AX\|_\infty = \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}$, on a $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. De plus, $\mathcal{B}$ est non vide (même démonstration que pour $\mathcal{A}$), donc $\mathcal{B}$ admet une borne supérieure car un sous-ensemble d'un ensemble majoré est majoré. Notons provisoirement s_A la borne supérieure de $\mathcal{B}$.
Toujours en conséquence de l'inclusion $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, on a $s_A \leq \|A\|$. Montrons l'inégalité dans l'autre sens. Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}$. On pose $Y = \frac{X}{\|X\|_\infty}$. Alors $\|Y\|_\infty = 1$ et on a, par homogénéité de la norme $\| \cdot \|_\infty$:

$$\frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} = \|AY\|_\infty \leq s_A$$

Ainsi, $\mathcal{A}$ est majoré par s_A et $\|A\|$ étant le plus petit de ses majorants, on obtient $s_A \geq \|A\|$.
Par suite, $\|A\| = s_A$. ‘

(c) Montrons que $\| \cdot \|$ est une norme sur $M_n(\mathbb{R})$. Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

— (Positivité). On a $\|A\| = \sup\limits_{X \neq 0_{n,1}} \underbrace{\dfrac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}}_{\geq 0} \geq 0$.

— (Séparation). On suppose $\|A\| = 0$. Alors, pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $AX = 0_{n,1}$ car $\frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} \leq \|A\| = 0$. Par suite, $A = 0_n$; en effet, considérons $(E_j)_{j \in [\![1,n]\!]}$ est la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$; la j-ième colonne de A notée A_j vérifie alors $A_j = AE_j = 0_{n,1}$; donc toutes les colonnes de A sont nulles, d'où A est nulle.

— (Homogénéité). On a, par les propriétés de la borne supérieure et par homogénéité de la norme $\|\cdot\|_\infty$:

$$\|\lambda A\| = \sup_{\|X\|_\infty = 1} \underbrace{\|\lambda AX\|_\infty}_{=|\lambda|.\|AX\|_\infty} = |\lambda|. \sup_{\|X\|_\infty = 1} \|\lambda AX\|_\infty = |\lambda|.\|A\|.$$

— (Inégalité Triangulaire). On a, par les propriétés de la borne supérieure et par inégalité triangulaire de la norme $\|\cdot\|_\infty$:

$$\|A+B\| = \sup_{\|X\|_\infty = 1} \underbrace{\|(A+B)X\|_\infty}_{\leq \|AX\|_\infty + \|BX\|_\infty} \leq \sup_{\|X\|_\infty = 1} \|AX\|_\infty + \sup_{\|X\|_\infty = 1} \|BX\|_\infty = \|A\| + \|B\|.$$

D'où $\|\cdot\|$ est une norme sur $M_n(\mathbb{R})$.

2. (a) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. L'inégalité est bien vérifiée si $X = 0_{n,1}$. Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ avec $X \neq 0_{n,1}$. On a :

$$\frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} \leq \sup_{Y \neq 0_{n,1}} \frac{\|AY\|_\infty}{\|Y\|_\infty} = \|A\|$$

d'où $\|AX\|_\infty \leq \|A\|.\|X\|_\infty$.

(b) Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, on a, d'après la question précédente :

$$\|(AB)X\|_\infty = \|A(BX)\|_\infty \leq \|A\|.\|BX\|_\infty \leq \|A\|.\|B\|.\|X\|_\infty$$

Par suite, pour tout $X \neq 0_{n,1}$, on a :

$$\frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} \leq \|A\|.\|B\|$$

et ainsi, $\|A\|.\|B\|$ est un majorant de $\{\frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} \mid X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}\}$; or sa borne supérieure $\|AB\|$ est le plus petit de ses majorants, donc :

$$\|AB\| \leq \|A\|.\|B\|$$

3. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$. On note $C = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right)$.

La majoration des éléments de $\mathcal{A}$ obtenu à la question 1.a) et le fait que $\|A\|$ soit le plus petit majorant de $\mathcal{A}$ nous donne :

$$\|A\| \leq C.$$

Prouvons l'inégalité dans l'autre sens.
C étant un maximum, celui-ci est atteint, disons pour un certain $i_0 \in [\![1,n]\!]$, et donc $\sum_{j=1}^n |a_{i_0 j}| = C$. On pose, pour $j \in [\![1,n]\!]$:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{i_0 j} \geq 0 \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Alors $\|X\|_\infty = 1$ et pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $a_{i_0 j} x_j = |a_{i_0 j}|$.

Posons $Y = AX$ avec $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$|y_i| = \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n} \underbrace{|a_{ij} x_j|}_{\leq |a_{ij}|} \leq C$$

et

$$y_{i_0} = \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} x_j = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0 j}| = C.$$

Par suite, $y_{i_0} = |y_{i_0}|$ est le maximum des $|y_i|$ et X étant de norme 1, on obtient :

$$\|A\| \geq \|AX\|_\infty = \|Y\|_\infty = C.$$

Il en resulte que :

$$\|A\| = C = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right).$$

Exercice 4. *Bonus (facultatif)*

Soit $E = \mathcal{F}_b([-1, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions bornées de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme infinie : $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [-1,1]} |f(t)|$. On pose $F = C([-1, 1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Justifier que $F \subset E$.
2. Déterminer la distance $d(f, F)$ où :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x \in [-1, 0[\end{cases}$$

Correction.

1. Un fonction continue sur un segment est bornée (et atteint ses bornes) donc $F \subset E$.
2. On remarque tout d'abord que $d(f, \mathbf{0}) = \|f\|_\infty = 1$. Donc $d(f, F) \leq 1$. Montrons que $d(f, F) \geq 1$.
   Soit $g \in F$.
   Pour tout $x \in]0, 1]$, on a $|f(x) - g(x)| = |1 - g(x)|$, donc, par continuité de g en 0, on a :

$$\|f - g\|_\infty \geq |1 - g(x)| \xrightarrow[x \to 0^+]{} |1 - g(0)|.$$

De la même manière, on obtient :

$$\|f-g\|_\infty \geq |-1-g(x)| \xrightarrow[x\to 0^-]{} |-1-g(0)| = |1+g(0)|.$$

Par suite, par inégalité triangulaire

$$2\|f-g\|_\infty \geq |1-g(0)| + |1+g(0)| \geq |1-g(0)+1+g(0)| = 2$$

En simplifiant par 2, on obtient donc que 1 est un minorant de $D = \{d(f,g) \mid g \in F\}$; or $d(f,F)$ étant le plus grand des minorants de D, on a :

$$d(f,F) \geq 1.$$