Devoir maison n°1

Problème 1.

Soit α un complexe. On note $\mathbb{Z}[\alpha] = \{a + b\alpha \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[\alpha]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$ si, et seulement si, α est racine d'un polynôme unitaire de degré égal à 2 et à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

   Dans la suite, on considère un entier naturel n qui n'est pas le carré d'un entier.

2. Déduire de la question précédente que $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ est un anneau. Est-il intègre ?
3. Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ définie par :
$$\varphi : (a, b) \mapsto a + b\sqrt{n},$$
   est bijective.
4. Pour $x = a + b\sqrt{n} \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ on note $\tilde{x} = a - b\sqrt{n}$.
   Montrer que l'application $f : \mathbb{Z}[\sqrt{n}] \to \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ telle que $f : x \mapsto \tilde{x}$ est un isomorphisme d'anneaux qui vérifie de plus $f^2 = \mathrm{Id}$.
5. Pour $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$, on pose $N(x) = x\tilde{x}$.
   Montrer que :
   a) pour tout $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$, $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
   b) pour tous $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$, $N(xy) = N(x)N(y)$.
6. Montrer que x est inversible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ si, et seulement si, $|N(x)| = 1$.
7. Dans cette question on pose $n = 7$.
   a) Montrer que $8 + 3\sqrt{7}$ est inversible et donner son inverse.
   b) Montrer qu'il existe une infinité d'éléments inversibles dans $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$.
8. On revient au cas général sur n.
   On note G l'ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ et G^+ l'ensemble des éléments inversibles positifs de $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$.
   a) Montrer que $(G^+, \times)$ est un groupe.
   b) Soit $x = a + b\sqrt{n} \in G$. Montrer que
$$x \geq 1 \Leftrightarrow (a \geq 1 \text{ et } b \geq 0).$$
   c) Montrer que $\forall M \geq 1$, $G \cap [1, M]$ est fini.
   d) Montrer que $(G^+, \times)$ est monogène.