Devoir maison n°2

Exercice 1. *Développement asymptotique d'une suite récurrente*

On considère la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in]0,1] \\ u_{n+1} = \sin(u_n) \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout $x \in]0,1]$, $0 < \sin(x) < x$. En déduire que (u_n) admet une limite $\lambda \in \mathbb{R}$ et la déterminer.
2. Chercher $\alpha > 0$ tel que la suite $\left(u_{n+1}^{-\alpha} - u_n^{-\alpha}\right)$ converge vers une limite non nulle et déterminer cette limite.
3. En déduire un équivalent en $+\infty$ de $\frac{1}{u_n^2}$. Déterminer ainsi un équivalent simple en $+\infty$ de u_n.

Exercice 2. *Développement asymptotique à 3 termes de la série harmonique*

On considère la série harmonique $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note H_n sa somme partielle d'indice n et $d_n = H_n - \ln(n)$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$,
$$d_n - d_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}.$$
puis en déduire que $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
Dans la suite, on notera γ la limite de $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui par ailleurs répond au doux nom de *constante d'Euler*.
2. En comparant les restes des séries (convergentes !) de termes généraux $d_{n-1} - d_n$ et $\frac{1}{2n^2}$, montrer que :
$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$