Corrigé du devoir surveillé n°5

Exercice 1. *E3A 2021*

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul.

Soit φ l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\varphi(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\ dt$.

1. Démontrer que $\mathcal{B} = (1, X-1, X(X-1), \ldots, X^{n-1}(X-1))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. **Généralités sur φ.**
   2.1. Démontrer que φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
   2.2. Déterminer $\mathrm{Im}(\varphi)$ et la dimension du noyau de φ.
3. On considère alors l'application ψ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme Q tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = \int_0^x P(t)dt.$$
   3.1. Justifier que l'application ψ est linéaire.
   3.2. Démontrer que $\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Vect}(X, X^2, \ldots, X^{n+1})$.
   3.3. Démontrer que : $P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \psi(P) \in \mathrm{Vect}(X(X-1), \ldots, X^n(X-1))$.
   3.4. Donner alors une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
4. On note $\mathcal{H} = \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$.
   4.1. Donner la dimension de $\mathcal{H}$.
   4.2. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, soit ψ_k la forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$.
   Démontrer que la famille $(\psi_0, \ldots, \psi_n)$ est une base de $\mathcal{H}$.
   4.3. Déterminer les composantes de φ dans cette base.

Correction.

1. On a $\deg(1) = 0,\ \deg(X-1) = 1, \ldots, \deg(X^k(X-1)) = k+1, \deg(X^{n-1}(X-1)) = n$.
La famille $\mathcal{B} = (1, X-1, X(X-1), \ldots, X^{n-1}(X-1))$ est constituée de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$. Cette famille de polynômes est échelonnée en degré donc est libre.
$\mathcal{B}$ est une famille libre de cardinal $n+1$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$, donc c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
Donc $\boxed{\mathcal{B} = (1, X-1, X(X-1), \ldots, X^{n-1}(X-1)) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$
2. **Généralités sur φ.**
   2.1. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $\varphi(P) \in \mathbb{R}$.
   Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}_n[X]^2$. Par linéarité de l'intégrale :
$$\varphi(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = \int_0^1 (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(t)dt = \lambda_1 \int_0^1 P_1(t)dt + \lambda_2 \int_0^1 P_2(t)dt = \lambda_1 \varphi(P_1) + \lambda_2 \varphi(P_2).$$

Donc φ est linéaire. Ainsi $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$ et $\boxed{\varphi \text{ est une forme linéaire sur } \mathbb{R}_n[X].}$

2.2. $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$ donc $\mathrm{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$. Puisque $\mathbb{R}$ est de dimension 1, $\mathrm{Im}(\varphi)$ est de dimension 0 ou 1. On a $\varphi(1) = \displaystyle\int_0^1 1dt = 1 \neq 0$ donc φ est non nulle, $\mathrm{rg}(\varphi) \neq 0$ donc $\mathrm{rg}(\varphi) = 1$. $\mathrm{Im}(\varphi)$ est de dimension 1 donc $\boxed{\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}.}$
Par le théorème du rang : $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - \mathrm{rg}(\varphi) = (n+1) - 1 = n$.
$\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = n}$ et $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. 3.1. Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}_n[X]^2$. Par linéarité de l'intégrale :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \psi(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(x) = \int_0^x (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(t)dt = \lambda_1 \int_0^x P_1(t)dt + \lambda_2 \int_0^x P_2(t)dt = \lambda_1 \varphi(P_1)(x) + \lambda_2 \varphi(P_2)$$

Donc $\psi(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = \lambda_1 \varphi(P_1) + \lambda_2 \varphi(P_2)$. Ainsi $\boxed{\psi \text{ est linéaire.}}$

3.2. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi(X^k)(x) = \int_0^x t^k dt = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^x = \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

On en déduit que $\psi(X^k) = \dfrac{1}{k+1} X^{k+1}$. Puisque $(1, X, \ldots, X^k, \ldots X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Vect}(\psi(1), \psi(X), \ldots, \psi(X^k), \ldots, \psi(X^n)) &= \mathrm{Vect}\left(X, \frac{1}{2}X^2, \ldots, \frac{1}{k+1}X^{k+1}, \ldots, \frac{1}{n+1}X^{n+1}\right) \\ &= \mathrm{Vect}\left(X, X^2, \ldots, X^{k+1}, \ldots, X^{n+1}\right). \end{aligned}$$

D'où $\boxed{\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Vect}\left(X, X^2, \ldots, X^{k+1}, \ldots, X^{n+1}\right).}$

3.3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$\begin{aligned} P \in \mathrm{Ker}(\varphi) &\Leftrightarrow \varphi(P) = 0 \\ &\Leftrightarrow \int_0^1 P(t)dt = 0 \\ &\Leftrightarrow \Psi(P)(1) = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 \text{ est racine du polynôme } \psi(P) \\ &\Leftrightarrow (X-1) \text{ divise le polynôme } \psi(P). \end{aligned}$$

Montrons l'équivalence demandée.
$\boxed{\Leftarrow}$ Si $\psi(P) \in \mathrm{Vect}\,(X(X-1), \ldots, X^n(X-1))$, alors $(X-1)$ divise $\psi(P)$ donc $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.
$\boxed{\Rightarrow}$ Réciproquement, si $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, alors $(X-1)$ divise $\psi(P)$. De plus, $\psi(P)(0) = 0$ donc X divise $\psi(P)$. On en déduit que $X(X-1)$ divise $\psi(P)$ avec $\psi(P) \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$, donc $\psi(P) \in X(X-1)\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Ainsi $\psi(P) \in \mathrm{Vect}\,(X(X-1), \ldots, X^n(X-1))$.
Finalement, on a montré que : $\boxed{P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \quad \Leftrightarrow \quad \psi(P) \in \mathrm{Vect}\,(X(X-1), \ldots, X^n(X-1)).}$

3.4. Pour $1 \leq k \leq n$, on pose $R_k(X) = (k+1)X^k - kX^{k-1}$.
On remarque que $\deg(R_k) = k$ donc la famille $(R_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une famille de $\mathbb{R}_n[X]$, échelonnée en degré donc libre. De plus

$$\psi(R_k) = (k+1)\psi(X^k) - k\psi(X^{k-1}) = (k+1)\frac{X^{k+1}}{k+1} - k\frac{X^k}{k} = X^{k+1} - X^k = X^k(X-1).$$

Donc $\psi(R_k) \in \text{Vect}\,(X(X-1),\dots,X^n(X-1))$. D'après la question **3.3.**, $R_k \in \text{Ker}(\varphi)$.
D'après la question **2.2.**, $\text{Ker}(\varphi)$ est de dimension n.
$(R_k)_{1\leq k\leq n}$ est une famille libre de cardinal n dans $\text{Ker}(\varphi)$ qui est de dimension n, donc une base de $\text{Ker}(\varphi)$.
$\boxed{(R_k)_{1\leq k\leq n} = \left((k+1)X^k - kX^{k-1}\right)_{1\leq k\leq n} \text{ est une base de } \text{Ker}(\varphi).}$

4. 4.1. On a $\dim\mathcal{H} = \dim\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X],\mathbb{R}) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) \times \dim(\mathbb{R}) = (n+1)\times 1$. Donc $\boxed{\dim(\mathcal{H}) = n+1.}$

4.2. Pour $(k,\ell) \in [\![0,n]\!]^2$, calculons $\psi_k(X^\ell)$. On pose $P(X) = X^\ell$.

$$\begin{cases} \text{Si } k \leq \ell-1 : & P^{(k)}(X) = \ell(\ell-1)\dots(\ell-k+1)X^{\ell-k}. & \psi_k(P) = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!} = 0. \\ \text{Si } k = \ell : & P^{(\ell)}(X) = \ell!\,. & \psi_k(P) = \dfrac{P^{(\ell)}(0)}{\ell!} = 1. \\ \text{Si } k \geq \ell+1 : & P^{(k)}(X) = 0. & \psi_k(P) = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!} = 0. \end{cases}$$

Ainsi $\boxed{\psi_k(X^\ell) = \delta_{k,\ell} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = \ell \\ 0 & \text{si } k \neq \ell \end{cases}.}$

Montrons que la famille $(\psi_k)_{0\leq k\leq n}$ est libre. Soit $(\lambda_k)_{0\leq k\leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k\psi_k = 0$. Soit $\ell \in [\![0,n]\!]$.

$$0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k\psi_k\right)(X^\ell) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k\psi_k(X^\ell) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k\delta_{k,\ell} = \lambda_\ell.$$

On a $\forall \ell \in [\![0,n]\!]$, $\lambda_\ell = 0$ donc la famille est libre.
La famille $(\psi_k)_{0\leq k\leq n}$ est une famille libre de cardinal $n+1$ dans $\mathcal{H}$ qui est de dimension $n+1$, donc c'est une base de $\mathcal{H}$. $\boxed{(\psi_0,\dots,\psi_n) \text{ est une base de } \mathcal{H}.}$

4.3. φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ donc $\varphi \in \mathcal{H}$.
Soient $(\lambda_k)_{0\leq k\leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ les coordonnées de φ dans la base $(\psi_0,\dots,\psi_n)$ de $\mathcal{H}$: $\varphi = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k\psi_k$. Soit $\ell \in [\![0,n]\!]$.

$$\varphi(X^\ell) = \int_0^1 t^\ell dt = \frac{1}{\ell+1} = \left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k\psi_k\right)(X^\ell) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k\psi_k(X^\ell) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k\delta_{k,\ell} = \lambda_\ell.$$

Donc $\forall \ell \in [\![0,n]\!]$, $\lambda_\ell = \dfrac{1}{\ell+1}$. Ainsi $\boxed{\varphi = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\psi_k.}$

Exercice 2.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $E = M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrés à coefficients réels de taille $n \times n$ et on considère l'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales de E i.e.

$$O_n(\mathbb{R}) = \{M \in E \mid {}^tMM = I_n\}.$$

Le but de cet exercice est d'étudier la compacité et la connexité par arcs de $O_n(\mathbb{R})$.

Partie A : Compacité

1. On munit l'espace vectoriel E de la norme $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire canonique sur E c'est-à dire, pour $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}, B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in E$,

$$(A|B) = \mathrm{Tr}({}^tAB) \quad \text{et} \quad \|A\| = \sqrt{(A|A)}.$$

   a. Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in E$. Montrer que :

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2}.$$

   b. Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est une partie bornée de $(E, \|\cdot\|)$.

   c. En déduire que $O_n(\mathbb{R})$ est une partie bornée de E muni d'une norme quelconque.

2. Dans cette question, on cherche à montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de E muni d'une norme quelconque.

   a. Montrer que l'application $D : E \to E \times E$ définie par :

$$D : M \mapsto (M, M)$$

   est continue sur E.

   b. Montrer que l'application $\varphi : E \times E \to E$ définie par :

$$\varphi : (M, N) \mapsto {}^tMN$$

   est une application bilinéaire continue sur $E \times E$.

   c. En utilisant les questions 2.a et 2.b, montrer que l'application $f : E \to E$ telle que

$$f : M \mapsto {}^tMM$$

   est une application continue sur E.

   d. En déduire que $O_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée de E.

3. Déduire des questions 1. et 2. que $O_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de E (et ce pour n'importe quelle norme sur E).

Partie B : Application de la compacité

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On considère l'application $f_A : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie, pour $M \in M_n(\mathbb{R})$, par

$$f_A(M) = \mathrm{Tr}({}^tMA)$$

1. Montrer qu'il existe $M_0, N_0 \in O_n(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $M \in O_n(\mathbb{R})$,

$$f_A(M_0) \leq f_A(M) \leq f_A(N_0).$$

2. Montrer que, pour tout $M \in O_n(\mathbb{R})$, $-n \leq f_{I_n}(M) \leq n$ et que ces inégalités sont optimales.

Partie C : Connexité par arcs

1. Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$. Quelle(s) valeur(s) peut prendre $\det(M)$? Donner des exemples de matrices de $O_n(\mathbb{R})$ pour chacune des valeurs trouvées *(on prendra des exemples avec des matrices de taille $n \times n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque !)*.
2. En déduire que $O_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs. *On rappelle que l'application* $\det : E \to \mathbb{R}$ *est continue sur E (pour n'importe quelle norme).*

Correction.

Partie A : Compacité

1. a. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in E$. On a :

$$ {}^tAA = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} \right)_{1 \leq i,j \leq n}, $$

donc

$$ \|A\|^2 = \mathrm{Tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2. $$

b. Pour tout $M \in O_n(\mathbb{R})$, on a :

$$ \|M\| = \sqrt{\mathrm{Tr}({}^tMM)} = \sqrt{\mathrm{Tr}(I_n)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1} = \sqrt{n}. $$

Par suite, $O_n(\mathbb{R})$ est borné dans $(E, \|\cdot\|)$.

2. a. Pour tous $M, N \in E$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a :

$$ D(\lambda M + \mu N) = (\lambda M + \mu N, \lambda M + \mu N) = \lambda(M, M) + \mu(N, N) = \lambda D(M) + \mu D(N). $$

donc D est une application linéaire de E dans E^2. Or E est un espace vectoriel normé de dimension finie (égale à n^2), donc, D étant linéaire, elle est continue (et ce pour n'importe quelle norme).
Si on avait oublié l'argument précédent, on pouvait montrer que, pour tout $M \in E$, on a (en notant $\|\cdot\|_{E^2}$ la norme produit sur E) :

$$ \|D(M)\|_{E^2} = \|(M, M)\|_{E^2} = \max(\|M\|_\infty, \|M\|_\infty) = \|M\|_\infty. $$

Ainsi, D est une application linéaire continue sur E.

b. Pour tous $A, M, N \in E$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a :

$$ \varphi(\lambda M + \mu N, A) \mapsto {}^t\lambda M + \mu NA = \lambda {}^tMA + \mu {}^tNA = \lambda\varphi(M, A) + \mu\varphi(N, A) $$

et

$$ \varphi(A, \lambda M + \mu N) \mapsto {}^tA(\lambda M + \mu N) = \lambda {}^tAM + \mu {}^tAN = \lambda\varphi(A, M) + \mu\varphi(A, N), $$

donc φ est une application bilinéaire. Or E est un espace vectoriel normé de dimension finie (égale à n^2), donc, φ étant bilinéaire sur $E \times E$, elle est continue (et ce pour n'importe quelle norme).
Si on avait oublié l'argument précédent, on pouvait montrer que, pour tous $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}, B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in E$, on a :

$$\begin{aligned}
\|\varphi(A,B)\|_\infty &= \|{}^tAB\|_\infty \\
&= \left\| \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki} b_{kj} \right)_{1\leq i,j\leq n} \right\|_\infty \\
&= \max_{1\leq i,j\leq n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ki} b_{kj} \right| \\
&\leq \max_{1\leq i,j\leq n} \left(\sum_{k=1}^{n} \underbrace{|a_{ki}|}_{\leq \|A\|_\infty} \underbrace{|b_{kj}|}_{\leq \|B\|_\infty} \right) \\
&\leq \max_{1\leq i,j\leq n} \left(\sum_{k=1}^{n} \|A\|_\infty \|B\|_\infty \right) \\
\|\varphi(A,B)\|_\infty &\leq n\|A\|_\infty \|B\|_\infty.
\end{aligned}$$

Donc φ est une application bilinéaire continue sur E^2.

c. On remarque que :

$$f = \varphi \circ D$$

donc f est une application continue sur E comme composée d'applications continues.

d. On a :

$$O_n(\mathbb{R}) = \{M \in E \mid {}^tMM = I_n\} = \{M \in E \mid f(M) = I_n\} = f^{-1}(\{I_n\})$$

Or f est continue sur E et $\{I_n\}$ est un fermé de E donc $O_n(\mathbb{R})$ est un fermé de E comme image réciproque d'un fermé par une application continue.

3. E est une espace vectoriel de dimension finie égale à n^2 donc toutes les normes sont équivalentes sur E. Ainsi, d'après la questions 1.b., $O_n(\mathbb{R})$ est bornée dans E pour toute norme et d'après la question 2.d, $O_n(\mathbb{R})$ est fermé dans E pour toute norme. De plus, en dimension finie les fermés bornés sont compacts, donc il en résulte que $O_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de E.

Partie C : Connexité par arcs

1. Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$. On a, pour tout $A, B \in E$, $\det({}^tA) = \det(A)$ et $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, donc, on obtient :

$$\det(M)^2 = \det({}^tM)\det(M) = \det({}^tMM) = \det(I_n) = 1.$$

Ainsi, $\det(M) \in \{\pm 1\}$.
De plus, on $\det(I_n) = 1$ et $\begin{vmatrix} -1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & I_{n-1} \end{vmatrix} = -1$ et ces deux matrices sont orthogonales.

2. D'après la question précédente, $\det(O_n(\mathbb{R})) = \{-1, 1\}$. Or l'image directe d'une partie connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs, donc, comme det est continue sur E et $\{-1, 1\}$ n'est pas connexe par arcs, $O_n(\mathbb{R})$ n'est as connexe par arcs.

Problème 1. *E3A 2006*

Notations

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq 0 < b$. On note $I = [a, b]$.
$C^0(I)$ désigne l'espace vectoriel réel des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$; $C^1(I)$ l'espace vectoriel réel des fonctions de classe C^1 de I et on note, pour $f \in C^0(I)$:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)| \quad \|f\|_1 = \int_I |f(t)|dt \text{ et } \|f\|_2 = \sqrt{\int_I |f(t)|^2 dt}.$$

Partie I

1. Soit f dans $C^0(I)$ et c un réel strictement positif. On considère l'équation différentielle :
$$(E) \quad y' + cy = f$$
Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E) puis vérifier que la fonction notée $\varphi(f)$, dérivable sur I, définie par :
$$\forall x \in I,\ \varphi(f)(x) = e^{-cx} \int_0^x e^{ct} f(t)dt,$$
est solution de (E) et que $\varphi(f)(0) = 0$.
On admettra que $\varphi(f)$ est l'unique solution de (E) qui s'annule en 0.
2. Exprimer $(\varphi(f))'$ en fonction de f et $\varphi(f)$ et démontrer que $\varphi(f)$ est de classe C^1 sur I.
3. Calculer $\varphi(f)$ pour :
   a. $f : t \mapsto e^{-ct}$.
   b. $f : t \mapsto K$ où K est un réel.
   c. $f : t \mapsto t$ *on pourra penser à effectuer une intégration par parties.*
4. Prouver que l'application $\varphi : f \mapsto \varphi(f)$ est linéaire sur $C^0(I)$.

Partie II

1. Démontrer qu'il existe des réels positifs M_1 et M_2 tels que :
$$\forall f \in C^0(I), \|f\|_1 \leq M_1 \|f\|_2 \leq M_2 \|f\|_\infty.$$
2. Démontrer qu'il existe un réel positif M_0 tel que :
$$\forall f \in C^0(I), \|\varphi(f)\|_\infty \leq M_0 \|f\|_\infty.$$
3. Démontrer qu'il existe un réel A positif tel que :
$$\forall f \in C^0(I), \forall x \in I, |\varphi(f)(x)| \leq A\|f\|_1.$$
4. Démontrer qu'il existe un réel B positif tel que :
$$\forall f \in C^0(I), \forall x \in I, |\varphi(f)(x)| \leq B\|f\|_2.$$
En déduire :
$$\exists K \in \mathbb{R}^+, \forall f \in C^0(I), \|\varphi(f)\|_2 \leq K\|f\|_2.$$
5. L'application φ de $C^0([a, b])$ dans lui-même est-elle continue
   a. lorsque $C^0([a, b])$ est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$?
   b. lorsque $C^0([a, b])$ est muni de la norme $\|\cdot\|_1$?
   c. lorsque $C^0([a, b])$ est muni de la norme $\|\cdot\|_2$?

Correction.

1. Le problème de Cauchy $\left\{\begin{array}{c} y'+cy=f \\ y(0)=0 \end{array}\right.$, associé à une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1 résolue en y', à coefficients continus sur I, admet une solution unique sur I qu'on peut calculer, par exemple, par la méthode de variation de la constante.

   On peut aussi remarquer que $g : x \mapsto \varphi(f)(x).e^{cx}$ est dérivable sur I et que $\forall x \in I,\ g'(x) = e^{cx}(c\varphi(f)(x) + \varphi(f)'(x) = e^{cx}f(x)$.

   Comme $g(0) = 0 : \forall x \in I,\ g(x) = \displaystyle\int_0^x e^{ct}f(t)\ dt$; ce qui montre la formule annoncée.
2. $\varphi(f)' = f - c\varphi(f)$ est continue, donc $\varphi(f)$ est de classe C^1 sur I.
   La linéarité découle de la formule du I1 et de la linéarité de l'intégrale. On peut aussi la démontrer à l'aide du principe de superposition.
3. (a) On a, pour tout $x \in I$:
$$\varphi(f)(x) = e^{-cx}\int_0^x 1dt = xe^{-cx}.$$
   (b) On a, pour tout $x \in I$:
$$\varphi(f)(x) = e^{-cx}\int_0^x Ke^{ct}dt = e^{-cx}\frac{K}{c}(e^{cx}-1) = \frac{K}{c}(1-e^{-cx}).$$
   (c) On a, pour tout $x \in I$:
$$\varphi(f)(x) = e^{-cx}\underbrace{\int_0^x te^{ct}dt}_{=[t\frac{e^{ct}}{c}]_0^x - \int_0^x \frac{e^{ct}}{c}dt} = e^{-cx}(x\frac{e^{cx}}{c} - \frac{1}{c^2}(e^{cx}-1)) = \frac{1}{c}(x - \frac{1}{c} + \frac{1}{c}e^{-cx})$$
4. Par linéarité de l'intégrale, f est linéaire sur C^0.

Partie II

1. Vu en cours : $\forall f \in C^0(I), \|f\|_1 \leq \sqrt{b-a}\|f\|_2$ et $\|f\|_2 \leq \sqrt{b-a}\|f\|_\infty$.
2. Soit $x \in I$.
   $|\varphi(f)(x)| \leq e^{-cx}\displaystyle\int_{[0,x]} e^{ct}|f(t)|\ dt \leq e^{-cx}|\int_0^x e^{ct}\ dt|\|f\|_\infty = \frac{1}{c}|1-e^{-cx}|\|f\|_\infty \leq \frac{\max(|1-e^{-ca}|, |1-e^{-cb}|}{c}\|f\|_\infty$.

   Donc $\|\varphi(f)\|_\infty \leq \dfrac{\max(|1-e^{-ca}|, |1-e^{-cb}|)}{c}\|f\|_\infty$.
3. $|\varphi(f)(x)| \leq e^{-cx}\displaystyle\int_{[0,x]} e^{ct}|f(t)|\ dt \leq e^{-ca}\int_{[0,x]} e^{cb}|f(t)|\ dt \leq e^{c(b-a)}\int_{[a,b]} |f(t)|\ dt = e^{c(b-a)}\|f\|_1$.
   Par intégration, on en déduit que $\|\varphi(f)\|_1 \leq (b-a).e^{c(b-a)}\|f\|_1$.
4. En combinant les questions II 1 et 4, on obtient $|\varphi(f)(x)| \leq \sqrt{b-a}\ e^{c(b-a)}\|f\|_2$.
   On en déduit que $\|\varphi(f)\|_2 \leq \sqrt{b-a}.\sqrt{b-a}\ e^{c(b-a)}\|f\|_2$.
5. Comme φ est une application linéaire, les inégalités établies aux questions 2, 3 et 4 assurent que l'application φ de $C^0([a,b])$ dans lui-même est continue lorsque $C^0([a,b])$ est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, de la norme $\|\cdot\|_1$ ou de la norme $\|\cdot\|_2$.