Corrigé du devoir surveillé n°6

1. Exercice pour tous

Exercice 1. *CCinP 2014*

Soit n un entier supérieur à 2 et E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n. On appelle projecteur de E, tout endomorphisme p de E vérifiant $p \circ p = p$.

II.1. Soit p un projecteur de E.

II.1.a Démontrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont supplémentaires dans E.

II.1.b En déduire que la trace de p (notée $\mathrm{Tr}(p)$) est égale au rang de p (noté $\mathrm{rg}(p)$).

II.1.c Un endomorphisme u de E vérifiant $\mathrm{Tr}(u) = \mathrm{rg}(u)$ est-il nécessairement un projecteur de E ?

II.2. Donner un exemple de deux matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de rang 1 telles que A soit diagonalisable et B ne soit pas diagonalisable. Justifier la réponse.

II.3. Soit u un endomorphisme de E de rang 1.

II.3.a Démontrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E telle que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ de u dans $\mathcal{B}$ soit de la forme :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{où } a_1, \cdots, a_n \text{ sont } n \text{ nombres réels.}$$

II.3.b Démontrer que u est diagonalisable si, et seulement si, la trace de u est non nulle.

II.3.c On suppose que $\mathrm{Tr}(u) = \mathrm{rg}(u) = 1$. Démontrer que u est un projecteur.

II.3.d Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer que A est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^3$ dont on déterminera l'image et le noyau.

Correction.

II.1.

II.1.a Soit $x \in E$. Alors on a $x = \underbrace{x - p(x)}_{\in \mathrm{Ker}(p)} + \underbrace{p(x)}_{\in \mathrm{Im}(p)}$. En effet, il est clair que $p(x) \in \mathrm{Im}(p)$ et

$$p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = p(x) - p(x) = 0_E.$$

donc $x - p(x) \in \mathrm{Ker}(p)$.
Par suite, on a $E = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Im}(p)$.
De plus, pour $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p)$, on a, pour y un antécédent de x par p (y existe car

$x \in \mathrm{Im}(p))$:

$$x = p(y) = p^2(y) = p(p(y)) = p(x) = 0_E.$$

Par suite, $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{0_E\}$; donc $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont en somme directe.

Il en résulte que $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont supplémentaires dans E.

On aurait pu également utiliser le lemme de décomposition des noyaux en remarquant que $X(X-1)$ est un polynôme annulateur de p et que $Ker(p - Id_E) = Im(p)$.

II.1.b Notons $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de $\mathrm{Im}(p)$, où $r = \mathrm{rg}(p)$ et $(e_{r+1}, \ldots, e_n)$ une base de $\mathrm{Ker}(p)$.

Alors $e = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et d'après le lemme, la matrice de p dans la base e se décompose par blocs selon $\mathrm{mat}(p, e) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{r,r} \end{pmatrix}$, où $0_{p,q}$ désigne la matrice nulle à p lignes et q colonnes.

Ainsi $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{Tr}(\mathrm{mat}(p, e)) = r = \mathrm{rg}(p)$.

II.1.c Prenons f une base de E et considérons l'endomorphisme u de E défini par :

$$\mathrm{mat}(u, f) = M = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & \\ 0 & -1 & 0_{2,n-2} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0_{n-2,2}} & 0_{n-2,n-2} \end{array}\right) \text{ (on a bien } n \geq 2).$$

Alors $\mathrm{Tr}(u) = 2 = \mathrm{rg}(u)$, mais $M^2 \neq M$, donc u n'est pas un projecteur. Ainsi un endomorphisme u de E vérifiant $\mathrm{Tr}(u) = \mathrm{rg}(u)$ n'est pas nécessairement un projecteur de E.

II.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonale, donc diagonalisable, et son rang vaut 1.

Posons $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi B est aussi de rang 1.

Si B était diagonalisable, comme $\mathrm{ch}i_B = X^3$, B serait semblable à la matrice nulle, donc on aurait $B = 0$ ce qui est faux. Ainsi B n'est pas diagonalisable.

II.3.

II.3.a D'après la formule du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = n - 1$, donc il existe une base de $\mathrm{Ker}(u)$ de la forme $(e_1, \cdots, e_{n-1})$. On peut la compléter en une base $\beta = (e_1, \cdots, e_n)$ de E.

Pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $u(e_i) = 0$, donc en posant $u(e_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$,

on a bien $\mathrm{Mat}_\beta(u) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$.

II.3.b Supposons d'abord que $\mathrm{Tr}(u) = 0$. Alors $a_n = 0$ et la matrice de u étant triangulaire supérieure, $\mathrm{ch}i_u(X) = X^n$, donc $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$. Alors si u était diagonalisable, il existerait une base dans laquelle la matrice de u serait nulle, ce qui est faux car $rg(u) = 1$. Ainsi u n'est pas diagonalisable.

Supposons maintenant que $\mathrm{Tr}(u) \neq 0$. Alors $a_n \neq 0$ et $\mathrm{ch}i_u(X) = X^{n-1}(X - a_n)$, donc il existe un vecteur propre f_n associé à a_n. Les sous-espaces propres étant en somme directe, on sait alors que $(e_1, \ldots, e_{n-1}, f_n)$ est une base de vecteurs propres de E, donc u est diagonalisable.

II.3.c Avec les notations de la question précédente, $a_n = 1 \neq 0$

et $\mathrm{mat}(u, (e_1, \ldots, e_{n-1}, f_n)) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right) = M$. On a $M^2 = M$, donc u est un projecteur.

II.3.d Les trois colonnes de A étant 2 à 2 colinéaires et non nulles, $\mathrm{rg}(A) = 1$ et $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

De plus $\mathrm{Tr}(A) = 1$, donc d'après la question précédente, A est une matrice de projecteur.

Par la formule du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 2$, or on vérifie que A annule les deux vecteurs indépendants $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

2. Un problème ET UN SEUL, AU CHOIX

CCinP

Problème 1.

Notations pour l'ensemble du sujet :
$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On désigne, pour n entier naturel, $n \geq 2$:

- $M_n(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- $D_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices diagonales de $M_n(\mathbb{R})$.

PROBLEME - Théorème de décomposition de Dunford

On admet le théorème suivant que l'on pourra utiliser librement :

> Si A est une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ telle que son polynôme caractéristique χ_A soit scindé sur $\mathbb{K}$, alors
> il existe un unique couple (D, N) de matrices de $M_n(\mathbb{K})$ vérifiant les quatre propriétés :
> (1) $A = D + N$;
> (2) D est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{K})$ (pas nécessairement diagonale) ;
> (3) N est nilpotente ;
> (4) $DN = ND$.
> De plus, D et N sont des polynômes en A et $\chi_A = \chi_D$.
> Le couple (D, N) s'appelle la décomposition de Dunford de A.

Partie I - Quelques exemples

Q2. Donner le couple de la décomposition de Dunford d'une matrice A de $M_n(\mathbb{K})$ lorsque A est diagonalisable, puis lorsque la matrice A de $M_n(\mathbb{K})$ est nilpotente.
Justifier qu'une matrice trigonalisable vérifie l'hypothèse du théorème, admettant ainsi une décomposition de Dunford.
Le couple de matrices $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est-il la décomposition de Dunford de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$?

Q3. Donner un exemple d'une matrice de $M_2(\mathbb{R})$ n'admettant pas de décomposition de Dunford dans $M_2(\mathbb{R})$.

Q4. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.
Calculer son polynôme minimal χ_A, puis donner le couple (D, N) de la décomposition de Dunford de A (on utilisera le fait que $\chi_A = \chi_D$).

Q5. Application
Pour $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\exp(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$ est l'exponentielle de la matrice A.
Déduire de la question précédente l'exponentielle de la matrice A définie en **Q4**.
On pourra utiliser sans démonstration que si M et N sont deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent,
$\exp(M + N) = (\exp M)(\exp N)$.

Q6. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2(A - I_n) = 0$.
Justifier que le polynôme $X(X - 1)$ est annulateur de la matrice A^2.
Démontrer que le couple (D, N) de la décomposition de Dunford de la matrice A est donné par :
$D = A^2$ et $N = A - A^2$.

Partie II - Un exemple par deux méthodes

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.
On notera Id l'application identité de $\mathbb{R}^3$.

Q7. La matrice A est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$?
Démontrer qu'on a la somme directe : $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id})^2$.

Q8. Déterminer une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que :
$\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\{e_1\},\ \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\{e_2\},\ \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id})^2 = \mathrm{Vect}\{e_2, e_3\}$.
Ecrire la matrice B de u dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.

Q9. Déterminer le couple de la décomposition de Dunford de la matrice B et en déduire le couple (on calculera ces matrices) de la décomposition de Dunford de la matrice A.

Q10. Décomposer en éléments simples la fraction $\dfrac{1}{(X-1)(X-2)^2}$ et en déduire deux polynômes U et V tels que :

$$(X - 1)U(X) + (X - 2)^2 V(X) = 1 \text{ avec } \deg(U) < 2 \text{ et } \deg(V) < 1.$$

Q11. On pose les endomorphismes : $p = V(u) \circ (u - 2\mathrm{Id})^2$ et $q = U(u) \circ (u - \mathrm{Id})$.
Calculer $p(x) + q(x)$ pour tout x vecteur de $\mathbb{R}^3$.
Démontrer que p est le projecteur sur $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id})^2$ et q est le projecteur sur $\mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id})^2$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$.

Q12. On pose $d = p + 2q$. Ecrire la matrice de d dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ (de la question **Q8**).
Déterminer le couple de la décomposition de Dunford de la matrice A en exprimant D et N comme polynômes de la matrice A (sous forme développée).

Partie III - Une preuve de l'unicité de la décomposition

Q13. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables de E qui commutent. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de u et pour tout $1 \leq i \leq p$, $E_{\lambda_i}(u)$ le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ_i.
Démontrer que tout sous-espace propre de u est stable par v.
En déduire qu'il existe une base commune de diagonalisation pour u et v.
Pour tout $1 \leq i \leq p$, on pourra noter v_i l'endomorphisme induit par v sur $E_{\lambda_i}(u)$.

Q14. Soient A et B deux matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent. Démontrer que la matrice $A - B$ est diagonalisable.

Q15. Soient A et B deux matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent, démontrer que la matrice $A - B$ est nilpotente.

Q16. Déterminer les matrices de $M_n(\mathbb{K})$ qui sont à la fois diagonalisables et nilpotentes.

Q17. Dans cette question, on admet, pour toute matrice carrée A de $M_n(\mathbb{K})$ à polynôme caractéristique scindé, l'existence d'un couple (D, N) vérifiant les conditions (1), (2), (3), (4) et tel que D et N soient des polynômes en A.
Etablir l'unicité du couple (D, N) dans la décomposition de Dunford.

Partie IV - Non continuité de l'application $A \mapsto D$

Q18. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{C})$ qui sont <u>diagonalisables</u>.
$\mathcal{D}$ est-il un espace vectoriel ?
Si P est une matrice inversible de $M_n(\mathbb{C})$, justifier que l'application de $M_n(\mathbb{C})$ vers $M_n(\mathbb{C})$, $M \mapsto PMP^{-1}$ est continue.

Q19. Démontrer que $\mathcal{D}$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.

Q20. Si (D, N) est le couple de la décomposition de Dunford d'une matrice A, on note φ l'application de $M_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{D}$ qui à la matrice A associe la matrice $\mathcal{D}$.
Justifier que φ est l'application identité sur $\mathcal{D}$ et en déduire que l'application φ n'est pas continue.

Correction.

Q1. PROBLEME - Théorème de décomposition de Dunford

Partie I - Quelques exemples

Q2. Soit $A \in M_n(K)$.

- $\boxed{\text{Si } A \text{ est diagonalisable, } (D,N)=(A,0)}$ est la décomposition de Dunford de A .
  En effet, $D = A$ est diagonalisable, $N = 0$ est nilpotente, $DN = ND = 0$ et $A = A + 0 = D + N$.
- $\boxed{\text{Si } A \text{ est nilpotente, } (D,N)=(0,A)}$ est la décomposition de Dunford de A .
  En effet, $D = 0$ est diagonalisable, $N = A$ est nilpotente, $DN = ND = 0$ et $A = 0 + A = D + N$.
- Soit A une matrice trigonalisable dans $M_n(\mathbb{K})$. Alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ inversible et $T \in M_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure, telles que $P^{-1}AP = T$. Les matrices A et T sont semblables donc ont même polynôme caractéristique : $\chi_A = \chi_T$.
  Notons $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ les coefficients diagonaux de la matrice T.
  Puisque T est triangulaire, $\chi_T(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$ est scindé sur $\mathbb{K}$. Donc $\chi_A = \chi_T$ est scindé sur $\mathbb{K}$.
  $\boxed{\text{Une matrice trigonalisable dans } M_n(\mathbb{K}) \text{ vérifie l'hypothèse du théorème}}$ donc admet une décomposition de Dunford.
- Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
  D' est diagonalisable (car diagonale), N' est nilpotente (car $(N')^2 = 0$), $A = D' + N'$, cependant D' et N' ne commutent pas :
  $$D'N' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq N'D' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
  $\boxed{\text{Non, } \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \text{ n'est pas la décomposition de Dunford de } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$ car ces deux matrices ne commutent pas. De plus, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ possède deux valeurs propres distinctes 1 et 2, donc est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$, donc $(D,N) = (A,0)$ est la décomposition de Dunford de A.

Q3. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Son polynôme caractéristique $\chi_A(X) = X^2 + 1$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.
Supposons par l'absurde que A admet une décomposition de Dunford (D,N). D'après le théorème, on a de plus $\chi_A = \chi_D$.
Puisque D est diagonalisable, D est semblable à une matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Son polynôme caractéristique vaut $\chi_A(X) = \chi_D(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$. Donc χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, ce qui est absurde.

$\boxed{\text{La matrice } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \text{ n'admet pas de décomposition de Dunford dans } M_2(\mathbb{R}).}$

Q4. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Calculons son polynôme caractéristique, en dévelop-

pant par rapport à la deuxième colonne :

$$\begin{array}{rcl} \chi_A(X) = \det(XI_3 - A) & = & \begin{vmatrix} X-3 & 0 & -8 \\ -3 & X+1 & -6 \\ 2 & 0 & X+5 \end{vmatrix} = (X+1)\begin{vmatrix} X-3 & -8 \\ 2 & X+5 \end{vmatrix} \\ & = & (X+1)(X^2+2X+1) = (X+1)^3. \end{array}$$

Ainsi $\boxed{\chi_A(X) = (X-1)^3.}$
χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème de l'énoncé, A admet une décomposition de Dunford. Soit (D, N) le couple de sa décomposition de Dunford.
D est diagonalisable et $\chi_D(X) = \chi_A(X) = (X+1)^3$ donc $\mathrm{Sp}(D) = \{-1\}$. D est semblable à la matrice diagonale avec des -1 sur sa diagonale, donc D est semblable à $-I_3$.
Ainsi $\exists P \in GL_3(\mathbb{R})$, $P^{-1}DP = -I_3$, d'où $D = P(-I_3)P^{-1} = -I_3$. On a $\boxed{D = -I_3}$, d'où

$$N = A - D = A + I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que (D, N) est la décomposition de Dunford de A (sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) :

- (1) $A = D + N$.
- (2) $D = -I_3$ est diagonale donc diagonalisable.
- (3) Par le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0 = (A + I_3)^3 = N^3$ donc N est bien nilpotente. De plus :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = 0.$$

  Donc N est nilpotente d'indice 2.
- (4) $D = -I_3$ est scalaire donc commute avec N : $DN = ND = -N$.

Ainsi $\boxed{\left(D = -I_3, N = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}\right) \text{ est la décomposition de Dunford de } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}.}$

Q5. On a montré que $A = D + N$ où (D, N) est la décomposition de Dunford de A.

- Puisque D et N commutent, $\exp(A) = \exp(D + N) = \exp(D)\exp(N)$.
- $D = -I_3$ donc $\forall k \in \mathbb{N},\ D^k = (-1)^k I_3$. On reconnaît le développement en série entière de exp en -1 :

$$\exp(D) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} D^k = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\right) I_3 = e^{-1} I_3.$$

- Puisque N est nilpotente d'indice 2, on a $\forall k \geq 2, N^k = 0$ et $\exp(N)$ est une somme finie :

$$\exp(N) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} N^k = \sum_{k=0}^{1} \frac{1}{k!} N^k = I_n + N = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & 6 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

- On conclut que

$$\boxed{\exp(A) = \exp(D)\exp(N) = e^{-1}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & 6 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.}$$

Q6. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2(A - I_n) = 0$.
Posons $P(X) = X(X-1)$. $P(A^2) = A^2(A^2 - I_n) = A^2(A - I_n)(A + I_n) = 0(A + I_n) = 0$.
Donc $\boxed{\text{le polynôme } X(X-1) \text{ annule la matrice } A^2.}$
Le polynôme $X(X-1)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$ et annule A^2, donc $\boxed{A^2 \text{ est diagonalisable dans } M_n(\mathbb{K}).}$
Posons $D = A^2$ et $N = A - A^2$. Vérifions que (D, N) est la décomposition de Dunford de A :

- (1) $A = D + N$ par construction.
- (2) $D = A^2$ est diagonalisable.
- (3) $N^2 = (A - A^2)^2 = A^2(I_n - A)^2 = A^2(A - I_n)(A - I_n) = 0$ car $A^2(A - I_n) = 0$.
  $N^2 = 0$ donc N est nilpotente.
- (4) D et N sont des polynômes en A donc commutent : $DN = ND = A^3 - A^4$.

Donc $\boxed{(D = A^2, N = A - A^2) \text{ est la décomposition de Dunford de la matrice } A.}$

Partie II - Un exemple par deux méthodes

Q7. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Calculons son polynôme caractéristique. On effectue $C_2 \leftarrow C_2 + C_3$.

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) = \det(XI_3 - A) &= \begin{vmatrix} X-3 & 1 & -1 \\ -2 & X & -1 \\ -1 & 1 & X-2 \end{vmatrix} &&= \begin{vmatrix} X-3 & 0 & -1 \\ -2 & X-1 & -1 \\ -1 & X-1 & X-2 \end{vmatrix} \\
&= (X-1)\begin{vmatrix} X-3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & X-2 \end{vmatrix} &&= (X-1)\Big((X-3)(X-1)+1\Big) \\
&= (X-1)(X^2 - 4X + 4) &&= (X-1)(X-2)^2.
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\chi_A(X) = (X-1)(X-2)^2.}$ Donc $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2\}$. On a $\dim(\mathrm{Ker}(A - I_3)) = 1$. Calculons $\dim(\mathrm{Ker}(A - 2I_3))$.

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice $(A - 3I_3)$ est de rang 2. Par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(A - 3I_3)) = 1 < 2$. La dimension du sous-espace propre associé à 2 est strictement inférieure à la multiplicité de 2 en tant que valeur propre dans χ_A, donc $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable dans } M_3(\mathbb{R}).}$
Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. Par le théorème de Cayley-Hamilton, χ_u annule u, or $\chi_u(X) = (X-1)(X-2)^2$. Les polynômes $(X-1)$ et $(X-2)^2$

sont premiers entre eux.

Par le lemme de décomposition des noyaux, $\boxed{\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(\chi_u(u)) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id})^2.}$

Q8. Calculons les noyaux des endomorphismes demandés.

$$\begin{array}{rclrcl}
A - I_3 & = & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. & \mathrm{Ker}(A - I_3) & = & \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \\
A - 2I_3 & = & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. & \mathrm{Ker}(A - 2I_3) & = & \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \\
(A - 2I_3)^2 & = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. & \mathrm{Ker}(A - 2I_3)^2 & = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).
\end{array}$$

Posons alors

$$\boxed{e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

P est la matrice de la famille (e_1, e_2, e_3) dans la base canonique. Or $\det(P) = -1 \neq 0$ donc la famille(e_1, e_2, e_3) est libre et de cardinal $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$. $P \in GL_3(\mathbb{R})$ est alors la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base (e_1, e_2, e_3).

De plus $\boxed{\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(e_1),\ \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(e_2),\ \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id})^2 = \mathrm{Vect}(e_2, e_3).}$

Par construction, on a $u(e_1) = e_1$ et $u(e_2) = 2e_2$. De plus

$$u(e_3) = Ae_3 = A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e_2 + 2e_3.$$

Ecrivons la matrice de u dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$:

$$\boxed{B = \mathrm{Mat}_{(e_1, e_2, e_3)}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

Q9.

- Puisque A et B représentent la matrice du même endomorphisme u dans la base canonique et dans la base $\mathcal{B}$, on a la formule de changement de base $P^{-1}AP = B$ i.e. $A = PBP^{-1}$. De plus on obtient l'inverse de P en remarquant que :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -e_1 + e_2 + e_3, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1 - e_3, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_3. \quad \boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

- Montrons que :

$$\boxed{\left(D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \text{ est la décomposition de Dunford de } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

En effet : $B = D_1 + N_1$; D_1 est diagonale donc diagonalisable ; $N_1^2 = 0$ donc N_1 est nilpotente ; D_1 et N_1 commutent car $D_1N_1 = N_1D_1 = 2N_1$.

- On pose $\boxed{D = PD_1P^{-1} \text{ et } N = PN_1P^{-1}.}$ Alors (D, N) est la décomposition de Dunford de A :

$\star$ (1) $A = PBP^{-1} = P(D_1 + N_1)P^{-1} = PD_1P^{-1} + PN_1P^{-1} = D + N$.

$\star$ (2) $D = PD_1P^{-1}$ est semblable à la matrice diagonale D_1 donc D est diagonalisable.

$\star$ (3) $N^2 = (PN_1P^{-1})^2 = PN_1^2P^{-1} = 0$ donc N est nilpotente.

$\star$ (4) D et N commutent car D_1 et N_1 commutent :

$$DN = (PD_1P^{-1})(PN_1P^{-1}) = P(D_1N_1)P^{-1} = P(N_1D_1)P^{-1} = (PN_1P^{-1})(PD_1P^{-1}) = ND.$$

Donc (D, N) est la décomposition de Dunford de A. Calculons ces matrices :

$$D = PD_1P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Puis :

$$N = PN_1P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalement $\boxed{\left(D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \text{ est la décomposition de Dunford de } A.}$

Q10. On décompose la fraction en éléments simples. Il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\frac{1}{(X-1)(X-2)^2} = \frac{a}{X-1} + \frac{bX+c}{(X-2)^2} = \frac{(a+b)X^2 + (c-b-4a)X + 4a - c}{(X-1)(X-2)^2}.$$

Par identification des coefficients,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a+b & = & 0. \\ c-b-4a & = & 0. \\ 4a-c & = & 1. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 1. \\ b & = & -1. \\ c & = & 3. \end{array} \right.$$

Donc

$$\boxed{\frac{1}{(X-1)(X-2)^2} = \frac{1}{X-1} + \frac{-X+3}{(X-2)^2}.}$$

On en déduit par multiplication par $(X-1)(X-2)^2$: $\quad 1 = (X-2)^2 + (-X+3)(X-1)$. Posons $\boxed{U(X) = -X+3, \quad V(X) = 1.}$ On a $\deg(U) = 1 < 2$, $\deg(V) = 0 < 1$ et $\boxed{(X-1)U(X) + (X-2)^2V(X) = 1.}$

Q11.
- On pose $p = V(u) \circ (u - 2\mathrm{Id})^2$ et $q = U(u) \circ (u - \mathrm{Id})$.
  On a obtenu à la question **Q10** la relation $U(X)(X-1) + V(X)(X-2)^2 = 1$. On évalue cette égalité en l'endomorphisme u :

$$p + q = U(u) \circ (u - \mathrm{Id}) + V(u) \circ (u - 2\mathrm{Id})^2 = 1(u) = \mathrm{Id}.$$

Donc $\boxed{p + q = \mathrm{Id}.}$

- Posons $F = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ et $G = \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id})^2$.
  Soit $x \in F$. Alors $(u - \mathrm{Id})(x) = 0$, donc :

$$\begin{array}{rcl} q(x) & = & U(u) \circ (u - \mathrm{Id})(x) = 0. \\ p(x) & = & p(x) + q(x) = \mathrm{Id}(x) = x. \end{array}$$

  Donc $\boxed{\forall x \in F,\ p(x) = x,\ q(x) = 0.}$
  Soit $x \in G$. Alors $(u - \mathrm{Id})^2(x) = 0$, donc :

$$\begin{array}{rcl} p(x) & = & V(u) \circ (u - 2\mathrm{Id})^2(x) = 0. \\ q(x) & = & p(x) + q(x) = \mathrm{Id}(x) = x. \end{array}$$

  Donc $\boxed{\forall x \in G,\ p(x) = 0,\ q(x) = x.}$
  Puisque $E = F \oplus G$, tout $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$. On obtient :

$$\begin{array}{rclcl} p(x) & = & p(x_F) + p(x_g) & = & x_F + 0 = x_F. \\ q(x) & = & q(x_F) + q(x_g) & = & 0 + x_G = x_G. \end{array}$$

  On a montré que $\boxed{p \text{ est le projecteur sur } F = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) \text{ parallèlement à } G = \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id})^2}$
  et $\boxed{q \text{ est le projecteur sur } G = \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id})^2 \text{ parallèlement à } F = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}).}$

Q12. On pose $d = p + 2q$.
Puisque $e_1 \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$, on a $p(e_1) = e_1$ et $q(e_1) = 0$. D'où $d(e_1) = p(e_1) + 2q(e_1) = e_1$.
Puisque $e_2 \in \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id})^2$, on a $p(e_2) = 0$ et $q(e_2) = e_2$. D'où $d(e_2) = p(e_2) + 2q(e_2) = 2e_2$.
De même, $e_2 \in \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id})^2$ donc $d(e_3) = 2e_3$.
On obtient la matrice de d dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} d(e_1) & = & e_1. \\ d(e_2) & = & 2e_2. \\ d(e_3) & = & 2e_3. \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(d) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

(On retrouve la matrice D_1 de la décomposition de Dunford de B.) Or

$$\begin{array}{rclcl} p & = & V(u) \circ (u - 2\mathrm{Id})^2 & = & (X-2)^2(u) & = & (X^2 - 4X + 4)(u) \\ q & = & U(u) \circ (u - \mathrm{Id}) & = & ((-X+3)(X-1))(u) & = & (-X^2 + 4X - 3)(u). \\ d & = & p + 2q & = & \Big((X^2 - 4X + 4) + 2(-X^2 + 4X - 3)\Big)(u) & = & (-X^2 + 4X - 2)(u). \end{array}$$

Donc $d = (-X^2 + 4X - 2)(u)$ et $D = (-X^2 + 4X - 2)(A) = -A^2 + 4A - 2I$. Enfin $N = A - D = A^2 - 3A + 2I$.
Donc $\boxed{(D = -A^2 + 4A - 2I, N = A^2 - 3A + 2I) \text{ est la décomposition de Dunford de } A.}$
Effectuons les calculs :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A & = & \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \\ A^2 & = & \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 7 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{rcl} D & = & -A^2 + 4A - 2I \quad = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \\ N & = & A^2 - 3A + 2I \quad = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{array} \right.$$

On retrouve le même résultat qu'à la question **Q9**.

Partie III - Une preuve de l'unicité de la décomposition

Q13.

- Soient u et v deux endomorphismes de E qui commutent.
  Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ une valeur propre de u et $E_\lambda(u)$ le sous-espace propre associé. Soit $x \in E_\lambda(u)$. Alors $u(x) = \lambda x$. Puisque u et v commutent :
  $$u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x).$$
  D'où $v(x) \in E_\lambda(u)$. On a montré que $\forall x \in E_\lambda(u), v(x) \in E_\lambda(u)$. Donc $E_\lambda(u)$ est stable par v.
  $\boxed{\text{Tout sous-espace propre de } u \text{ est stable par } v.}$
- Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables de E qui commutent.
  On note $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ les valeurs propres de u deux à deux distinctes.
  Pour $i \in [|1, p|]$, $E_{\lambda_i}(u)$ est stable par v. Notons v_i l'endomorphisme induit par v sur $E_{\lambda_i}(u)$.
  Puisque v est diagonalisable, il existe un polynôme P scindé à racines simples qui annule v, alors P annule également v_i donc v_i est diagonalisable. Soit $\mathcal{B}_i$ une base de $E_{\lambda_i}(u)$ formée de vecteurs propres de v_i, alors ce sont des vecteurs propres de v. De plus $\mathcal{B}_i$ est aussi formée de vecteurs propres de u car $\forall x \in E_{\lambda_i}(u), u(x) = \lambda_i x$.
  Puisque u est diagonalisable, E se décompose en somme directe des sous-espaces propres de u :
  $$E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u).$$
  $\mathcal{B}_i$ est une base de $E_{\lambda_i}(u)$ donc $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_p$ est une base de E, formée de vecteurs propres de u et de v.
  $\boxed{\text{Il existe une base } \mathcal{B} \text{ commune de diagonalisation de } u \text{ et } v.}$

Q14. Soient A et B deux matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent.
D'après la question **Q13**, il existe une base commune $\mathcal{B}$ de diagonalisation pour les endomorphismes associés. Donc il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{K})$, qui est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ à la base $\mathcal{B}$, telle que $P^{-1}AP = D_1$ et $P^{-1}BP = D_2$ soient deux matrices diagonales.
Alors $P^{-1}(A - B)P = P^{-1}AP - P^{-1}BP = D_1 - D_2$ est diagonale, donc $A - B$ est diagonalisable.
$\boxed{\text{Si } A \text{ et } B \text{ sont deux matrices diagonalisables de } M_n(\mathbb{K}) \text{ qui commutent, alors } A - B \text{ est diagonalisable.}}$

Q15. Soient A et B deux matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent.
On suppose que A est nilpotente d'indice p et que B est nilpotente d'indice q. On a $A^p = 0$ et $B^q = 0$.
Puisque A et B commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton :
$$(A - B)^{p+q-1} = \sum_{k=0}^{p+q-1} \binom{p+q-1}{k} A^k (-1)^{p+q-1-k} B^{p+q-1-k}.$$
Si $k \geq p$, alors $A^k = 0$.
Sinon, on a $k \leq p - 1$, donc $p + q - 1 - k \geq q$, d'où $B^{p+q-1-k} = 0$.
On en déduit que tous les termes de la somme sont nuls, donc $\boxed{(A - B)^{p+q-1} = 0}$ et $A - B$ est nilpotente, d'indice de nilpotence inférieur ou égal à $p + q - 1$.
$\boxed{\text{Si } A \text{ et } B \text{ sont deux matrices nilpotentes de } M_n(\mathbb{K}) \text{ qui commutent, alors } A - B \text{ est nilpotente.}}$

Q16. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ à la fois diagonalisable et nilpotente.
Puisque A est nilpotente, 0 est la seule valeur propre de A. Puisque A est diagonalisable avec $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$, A est semblable à la matrice diagonale $D \in M_n(\mathbb{C})$ comprenant des 0 sur la diagonale. Donc $D = 0$ et A est semblable donc égale à la matrice nulle. Ainsi $A = 0$.
Réciproquement, la matrice nulle est diagonalisable et nilpotente.

$\boxed{\text{La seule matrice de } M_n(\mathbb{K}) \text{ à la fois diagonalisable et nilpotente est la matrice nulle.}}$

Q17. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On admet l'existence de la décomposition de Dunford. Montrons l'unicité.

- Soient (D, N) et (D', N') deux couples qui conviennent. $A = D + N = D' + N'$, avec D, D' diagonalisables, N, N' nilpotentes, $DN = ND$, $D'N' = N'D'$. De plus D et N sont des polynômes en A.
- D' commute avec N', donc avec $A = D' + N'$. Alors D' commute avec tout polynôme en A, donc D' commute avec D.
- De même, N' commute avec D', donc avec $A = D' + N'$. Alors N' commute avec tout polynôme en A, donc N' commute avec N.
- On a $D - D' = N' - N$.
- D et D' sont diagonalisables et commutent. D'après la question **Q14**, $D - D'$ est diagonalisable.
- N et N' sont nilpotents et commutent. D'après la question **Q15**, $N' - N$ est nilpotente.
- $D - D' = N' - N$ est à la fois diagonalisable et nilpotente. D'après la question **Q16**, cette matrice est la matrice nulle.
- On en déduit que $D - D' = N' - N = 0$, d'où $D = D'$ et $N = N'$.
  $\boxed{\text{Il y a unicité du couple } (D, N) \text{ dans la décomposition de Dunford.}}$

Partie IV - Non continuité de l'application $A \mapsto D$

Q18.

- Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{C})$. On considère les matrices suivantes A et B de $M_n(\mathbb{C})$:

$$A = \mathrm{Diag}(1, 0, \dots, 0), \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad C = A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

  La matrice A est diagonale donc diagonalisable.
  On a $\chi_B(X) = (X+1)X^{n-1}$, $\mathrm{Sp}(B) = \{0, -1\}$, $\dim(\mathrm{Ker}(B + I_n)) = 1$. Puisque B est de rang 1, on a $\dim(\mathrm{Ker}(B)) = n - 1$ par le théorème du rang, donc $\dim(\mathrm{Ker}(B + I_n)) + \dim(\mathrm{Ker}(B)) = (n-1) + 1 = n$ donc B est diagonalisable.
  La matrice C vérifie $\chi_C(X) = X^n$ donc $C^n = 0$. La matrice C est nilpotente non nulle, donc non diagonalisable.
  Finalement, A et B sont dans $\mathcal{D}$ mais $C = A + B \notin \mathcal{D}$. Donc $\mathcal{D}$ n'est pas stable par combinaison linéaire et $\boxed{\mathcal{D} \text{ n'est pas un espace vectoriel.}}$

- Le produit matriciel $\left| \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) & \to & M_n(\mathbb{C}) \\ (A, B) & \mapsto & AB \end{array} \right.$ est une application bilinéaire sur $M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C})$ avec $M_n(\mathbb{C})$ de dimension finie, donc est une application continue.
  Donc pour $P \in GL_n(\mathbb{C})$, $\boxed{\text{l'application } \left| \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{C}) & \to & M_n(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto & PMP^{-1} \end{array} \right. \text{ est continue.}}$

Q19. Montrons que l'ensemble $\mathcal{D}$ des matrices diagonalisables est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.
Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrons qu'il existe une suite $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices diagonalisables dans $M_n(\mathbb{C})$ qui converge vers A.
$A \in M_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable donc il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ inversible et $T \in T_n^+(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure, telles que $P^{-1}AP = T$. Notons

$$T = \begin{pmatrix} d_1 & & & t_{i,j} \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{pmatrix}. \quad \text{On pose} \quad \forall k \geq 1, \quad T_k = \begin{pmatrix} d_1 + \dfrac{1}{k} & & & t_{i,j} \\ & d_2 + \dfrac{2}{k} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n + \dfrac{n}{k} \end{pmatrix}.$$

On a $\lim\limits_{k\to+\infty} T_k = T$. Posons $B_k = PT_kP^{-1}$. Par continuité du produit matriciel,

$$\lim_{k\to+\infty} B_k = \lim_{k\to+\infty} (PT_kP^{-1}) = P\left(\lim_{k\to+\infty} T_k\right)P^{-1} = PTP^{-1} = A.$$

Montrons que pour k assez grand, la matrice T_k est diagonalisable. Notons $\forall k \geq 1,\ \forall i \in [|1,n|], \lambda_i^{(k)} = d_i + \dfrac{i}{k}$. Les valeurs propres de T_k sont $\mathrm{Sp}(T_k) = \left\{\lambda_1^{(k)}, \ldots, \lambda_n^{(k)}\right\}$. Montrons que pour k assez grand, ces valeurs propres de T_k sont distinctes. Soient $i < j$ deux entiers de $[|1,n|]$.

$$\begin{aligned} &\text{Si } d_i = d_j : \quad \lambda_j^{(k)} - \lambda_i^{(k)} = \left(d_j + \frac{j}{k}\right) - \left(d_i + \frac{i}{k}\right) = \frac{j-i}{k} > 0. \\ &\text{Si } d_i \neq d_j : \quad \lambda_j^{(k)} - \lambda_i^{(k)} = \left(d_j + \frac{j}{k}\right) - \left(d_i + \frac{i}{k}\right) = d_j - d_i + \frac{j-i}{k} \underset{k\to+\infty}{\to} d_j - d_i \neq 0. \end{aligned}$$

Si $d_i \neq d_j$, l'équation

$$d_j - d_i + \frac{j-i}{k} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = -\frac{j-i}{d_j - d_i}$$

possède soit aucune solution si $-\dfrac{j-i}{d_j-d_i} \notin \mathbb{N}^*$, soit une unique solution. On en déduit que

$$\forall k > N = \max_{1\leq i<j\leq n,\ \text{tels que } d_j - d_i \neq 0} \left(-\frac{j-i}{d_j-d_i}\right), \quad \forall (i,j) \in [|1,n|]^2, i \neq j \Rightarrow \lambda_i^{(k)} \neq \lambda_j^{(k)}.$$

Ainsi pour $k \geq N+1$, la matrice T_k possède n valeurs propres distinctes donc est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$.
Puisque B_k et T_k sont semblables, B_k est aussi diagonalisable pour $k \geq N+1$.
Donc $A = \lim\limits_{k\to+\infty} B_k$ est limite d'une suite de matrices diagonalisable.

$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{D} \text{ des matrices diagonalisables est dense dans } M_n(\mathbb{C}).}$

Q20. Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, son polynôme caractéristique χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$ donc A admet une unique décomposition de Dunford (D,N). On note $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{D} \\ A & \mapsto & D \end{array} \right.$.
D'après la question **Q2**, la décomposition de Dunford de A diagonalisable est $(D,N) = (A,0)$.

Donc $\boxed{\forall A \in \mathcal{D}, \varphi(A) = A}$ i.e. $\boxed{\varphi \text{ est l'application identité sur } \mathcal{D}.}$
Supposons par l'absurde que φ soit continue sur $M_n(\mathbb{C})$.
Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. D'après la question **Q19**, $\mathcal{D}$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$, donc il existe une suite $(B_k)_{k\geq 0}$ de matrices diagonalisables qui converge vers A. Puisque $B_k \in \mathcal{D}$, on a $\varphi(B_k) = B_k$. Par continuité de φ :

$$\varphi(A) = \lim_{k\to+\infty} \varphi(B_k) = \lim_{k\to+\infty} B_k = A,$$

donc $\forall A \in M_n(\mathbb{C}), \varphi(A) = A$ et φ est l'application identité sur $M_n(\mathbb{C})$. Montrons que ceci est absurde.
Soit $N \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente non nulle. Par exemple, la matrice suivante est nilpotente (car $\chi_N(X) = X^n$) et non nulle :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

D'après la question **Q2**, $\varphi(N) = 0 \neq N$. Donc φ ne peut pas être l'application identité sur $M_n(\mathbb{C})$.
On a montré que $\boxed{\varphi \text{ n'est pas continue sur } M_n(\mathbb{C}).}$

Centrale-Supélec

Problème 2.

Notations et définitions

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et n est un entier naturel.

On note $\mathbb{K}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients dans $\mathbb{K}$ et, pour $n \geq 1$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la $\mathbb{K}$-algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$. La matrice unité est notée I_n et on désigne par $GL_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note ${}^tA$ la transposée de la matrice A, $\mathrm{rg}(A)$ son rang, $\mathrm{Tr}(A)$ sa trace, $\chi_A = \det(XI_n - A)$ son polynôme caractéristique, π_A son polynôme minimal et $\mathrm{sp}(A)$ l'ensemble de ses valeurs propres dans $\mathbb{K}$.

Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ de dimension finie n supérieure ou égale à 2, et $\mathcal{L}(E)$ est l'algèbre des endomorphismes de E. On note f un endomorphisme de E.

On note $f^0 = \mathrm{Id}_E$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ f^{k+1} = f^k \circ f$.

Si $Q \in \mathbb{K}[X]$ avec $Q(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_mX^m$, $Q(f)$ désigne l'endomorphisme $a_0\mathrm{Id}_E + a_1f + \cdots + a_mf^m$. On note $\mathbb{K}[f]$ la sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$ constituée des endomorphismes $Q(f)$ quand Q décrit $\mathbb{K}[X]$.

De même, on utilise les notations suivantes, similaires à celles des matrices, pour un endomorphisme f de E : $\mathrm{rg}(f)$, $\mathrm{Tr}(f)$, χ_f, π_f et $\mathrm{sp}(f)$.

Enfin, on dit que f est *cyclique* si et seulement s'il existe un vecteur x_0 dans E tel que $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.

I. Matrices compagnons et endomorphismes cycliques

I.A.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que M et ${}^tM$ ont même spectre.
2. Montrer que ${}^tM$ est diagonalisable si et seulement si M est diagonalisable.

I.B. Matrices compagnons

3. Soit $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ et $Q(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$. On considère la matrice

$$C_Q = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

   Déterminer en fonction de Q le polynôme caractéristique de C_Q.
   La matrice C_Q est appelée *matrice compagnon* du polynôme Q.

4. Soit λ une valeur propre de ${}^tC_Q$. Déterminer la dimension et une base du sous-espace propre associé.

I.C. Endomorphismes cycliques

5. Montrer que f est cyclique si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est de la forme C_Q (matrice compagnon), où Q est un polynôme unitaire de degré n.
6. Soit f un endomorphisme cyclique. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples.
7. Montrer que si f est cyclique, alors $(\mathrm{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$ et le polynôme minimal de f est de degré n.

I.D. Application à une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton

8. Soit x un vecteur non nul de E. Montrer qu'il existe un entier p strictement positif tel que la famille
   $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ soit libre et qu'il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ tel que :

$$\alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \cdots + \alpha_{p-1} f^{p-1}(x) + f^p(x) = 0$$

9. Justifier que $\mathrm{Vect}(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est stable par f.
10. Montrer que $X^p + \alpha_{p-1}X^{p-1} + \cdots + \alpha_0$ divise le polynôme χ_f.
11. Démontrer que $\chi_f(f)$ est l'endomorphisme nul.

II. Etude des endomorphismes cycliques

II.A. Endomorphismes cycliques nilpotents

Dans cette sous-partie, on suppose que f est un endomorphisme nilpotent de E. On note r le plus petit entier naturel tel que $f^r = 0$.

12. Montrer que f est cyclique si et seulement si $r = n$. Préciser alors la matrice compagnon.

II.B.

Dans cette sous partie II.B, on suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
On suppose que $(\mathrm{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est libre et on se propose de montrer que f est cyclique.
On factorise le polynôme caractéristique de f sous la forme

$$\chi_f(X) = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{m_k}$$

où les λ_k sont les p valeurs propres deux à deux distinctes de f et les m_k de $\mathbb{N}^*$ leurs ordres de multiplicité respectifs.

Pour $k \in [\![1, p]\!]$, on pose $F_k = \mathrm{Ker}((f - \lambda_k \mathrm{Id}_E)^{m_k})$.

13. Montrer que les sous-espaces vectoriels F_k sont stables et que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$.

Pour $k \in [\![1, p]\!]$, on note φ_k l'endomorphisme induit par $f - \lambda_k \mathrm{Id}$ sur le sous-espace vectoriel F_k,

$$\varphi_k \ : \ \begin{cases} F_k \to F_k \\ x \mapsto f(x) - \lambda_k x \end{cases}$$

14. Justifier que φ_k est un endomorphisme nilpotent de F_k.

On note ν_k le plus petit entier naturel tel que $\varphi_k^{\nu_k} = 0$.

15. Pourquoi a-t-on $\nu_k \leq \dim(F_k)$?
16. Montrer, avec l'hypothèse proposée, que pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on a $\nu_k = m_k$.
17. Expliciter la dimension de F_k pour $k \in [\![1, p]\!]$, puis en déduire l'existence d'une base $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ de E dans laquelle f a une matrice diagonale par blocs, ces blocs appartenant à $\mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{C})$ et étant de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_k & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 1 & \lambda_k & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \lambda_k & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

On pose $x_0 = u_1 + u_{m_1+1} + \cdots + u_{m_1+\cdots+m_{p-1}+1}$.

18. Déterminer les polynômes $Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que $Q(f)(x_0) = 0$.
19. Justifier que f est cyclique.

III. Endomorphismes commutants, décomposition de Frobenius

On appelle commutant de f l'ensemble $C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$.

20. Montrer que $C(f)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

III.A. Commutant d'un endomorphisme cyclique

On suppose que f est cyclique et on choisit un vecteur x_0 dans E tel que $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

Soit $g \in C(f)$, un endomorphisme qui commute avec f.

21. Justifier l'existence de $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ de $\mathbb{K}$ tels que
$$g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0)$$
22. Montrer alors que $g \in \mathbb{K}[f]$.
23. Établir que $g \in C(f)$ si et seulement s'il existe un polynôme $R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $g = R(f)$.

III.B. Décomposition de Frobenius

On se propose de démontrer le théorème de décomposition de Frobenius : toute matrice est semblable à une matrice diagonale par blocs, ces blocs étant des matrices compagnons.

24. Montrer que si la réunion d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_r$ de E est un sous-espace vectoriel, alors l'un des sous-espaces F_i contient tous les autres.

On note d le degré de π_f.

25. Justifier l'existence d'un vecteur x_1 de E tel que $(x_1, f(x_1), \ldots, f^{d-1}(x_1))$ est libre.
Pour tout x non nul de E, on pourra remarquer que $I_x = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(f)(x) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ engendré par un polynôme unitaire $\pi_{f,x}$ diviseur de π_f et considérer les sous-espaces vectoriels $Ker(\pi_{f,x}(f))$.

On pose $e_1 = x_1$, $e_2 = f(x_1)$, ..., $e_d = f^{d-1}(x_1)$ et $E_1 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_d)$.

26. Montrer que E_1 est stable par f et que $E_1 = \{P(f)(x_1) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$.

On note ψ_1 l'endomorphisme induit par f sur le sous-espace vectoriel E_1,
$$\psi_1 \ : \ \begin{cases} E_1 \to E_1 \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

27. Justifier que ψ_1 est cyclique.

On complète, si nécessaire, $(e_1, e_2, \ldots, e_d)$ en une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E. Soit Φ la d-ième forme coordonnée qui à tout vecteur x de E associe sa coordonnée suivant e_d. On note $F = \{x \in E \mid \forall i \in \mathbb{N},\ \Phi(f^i(x)) = 0\}$.

28. Montrer que F est stable par f et que E_1 et F sont en somme directe.

Soit Ψ l'application linéaire de E dans $\mathbb{K}^d$ définie, pour tout $x \in E$, par
$$\Psi(x) = (\Phi(f^i(x)))_{0 \leq i \leq d-1} = (\Phi(x), \Phi(f(x)), \ldots, \Phi(f^{d-1}(x)))$$

29. Montrer que Ψ induit un isomorphisme entre E_1 et $\mathbb{K}^d$.
30. Montrer que $E = E_1 \oplus F$.
31. En déduire qu'il existe r sous-espaces vectoriels de E, notés $E_1, \ldots, E_r$, tous stables par f, tels que :
    — $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$;
    — pour tout $1 \leq i \leq r$, l'endomorphisme ψ_i induit par f sur le sous-espace vectoriel E_i est cyclique ;
    — si on note P_i le polynôme minimal de ψ_i, alors P_{i+1} divise P_i pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq r-1$.

III.C. Commutant d'un endomorphisme quelconque

32. Montrer que la dimension de $C(f)$ est supérieure ou égale à n.
33. On suppose que f est un endomorphisme tel que l'algèbre $C(f)$ est égale à $\mathbb{K}[f]$. Montrer que f est cyclique.

Correction.

I. Matrices compagnons et endomorphismes cycliques

I.A.

1. On a $\chi_M = \det(XI_n - M) = \det\left({}^t(XI_n - M)\right) = \det(XI_n - {}^tM) = \chi_{{}^tM}$ donc

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \in \mathrm{sp}(M) \Leftrightarrow \chi_M(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \chi_{{}^tM}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \mathrm{sp}\left({}^tM\right)$$

Ainsi $\mathrm{sp}(M) = \mathrm{sp}\left({}^tM\right)$ et donc $\boxed{M \text{ et } {}^tM \text{ ont même spectre}}$

2. <u>$\Leftarrow$:</u> On suppose que M est diagonalisable. ce qui nous fournit $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $D \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale telles que $M = PDP^{-1}$
donc ${}^tM = {}^t\left(P^{-1}\right){}^tD{}^tP = \left({}^tP\right)^{-1} D{}^tP$
d'où ${}^tM$ est diagonalisable

<u>$\Rightarrow$:</u> On suppose que ${}^tM$ est diagonalisable.
Pour montrer que M est diagonalisable, on utilise l'implication précédente en remarquant que $M = {}^t\left({}^tM\right)$.

On a bien montré que $\boxed{{}^tM \text{ est diagonalisable si et seulement si } M \text{ est diagonalisable}}$

I.B. Matrices compagnons

3. On montre que $\chi_{C_Q} = Q$ par récurrence sur $\deg(Q) = n \geq 2$

Initialisation : On suppose que $\deg(Q) = 2$ ainsi $Q = X^2 + a_1X + a_0$ et $C_Q = \begin{pmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{K})$
On a $\chi_{C_Q} = X^2 - \mathrm{Tr}(C_Q)X + \det(C_Q) = X^2 + a_1X + a_0$ ce qui prouve l'initialisation

Hérédité : Soit l'entier $n \geq 2$. On suppose la propriété vraie pour tout polynôme unitaire de degré n.
On considère $Q(X) = X^{n+1} + a_nX^n + \cdots + a_0$ où les $a_i \in \mathbb{K}$. On a en développant par rapport à la première ligne :

$$\chi_{C_Q} = \begin{vmatrix} X & \dots & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & X & \dots & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & X & a_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & X + a_n \end{vmatrix}_{[n+1]} = X \begin{vmatrix} -X & \dots & \dots & 0 & a_1 \\ -1 & \ddots & & \vdots & a_2 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \ddots & -1 & X & a_{n-1} \\ \dots & \dots & 0 & -1 & X + a_n \end{vmatrix}_{[n]} +$$

$$(-1)^{n+2}a_0 \begin{vmatrix} -1 & X & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & X \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix}_{[n]}$$

Je note $R = X^n + a_n X^{-1} + \cdots + a_1$ et on a $\chi_{C_Q} = X\chi_{C_R} + a_0(-1)^{2n+2}$

Par hypothèse, on a $\chi_{C_R} = R$ donc $\chi_{C_Q} = XR + a_0 = Q$

Conclusion : On a montré par récurrence que la propriété était vraie pour tout polynôme unitaire de degré ≥ 2

En particulier $\boxed{Q \text{ est le polynôme caractéristique de } C_Q}$

4. On a ${}^t(C_Q) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & & -a_{n-1} \end{pmatrix}$.

   On a $\chi_{{}^tC_Q} = \chi_{C_Q} = Q$ ainsi $Q(\lambda) = 0$.

   Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K})$,

$$ {}^t(C_Q)\,X = \lambda X \iff \begin{cases} x_2 & = \lambda x_1 \\ x_3 & = \lambda x_2 \\ \vdots & \\ x_n & = \lambda x_{n-1} \\ -a_0 x_1 & -\ldots - a_{n-1}x_n = \lambda x_n \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda^2 x_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda^{n-1} x_1 \\ (-a_0 - a_1\lambda - \ldots - a_{n-1}\lambda^{n-1})x_1 = \lambda^n x_1 \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } {}^t(C_Q)\,X = \lambda X \iff \begin{cases} \forall i \in [\![2,n]\!],\ x_i = \lambda^{i-1}x_1 \\ Q(\lambda)x_1 = 0 \end{cases}$$

Notez bien que le "ainsi" concerne toute l'équivalence !

Comme λ est racine de Q, alors $\boxed{\dim\left(E_\lambda\left({}^tC_Q\right)\right) = 1,\ E_\lambda\left({}^tC_Q\right) = \mathrm{vect}(X_\lambda) \text{ où } X_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}}$

I.C. Endomorphismes cycliques

5. $\Rightarrow$ **:** On suppose que f est cyclique.

   Ceci nous fournit $x_0 \in E$ tel que $\mathbb{B} = \left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\right)$ soit une base de E

   Il existe alors $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $f^n(x_0) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(x_0)$

Je pose alors $Q = X^n + \sum_{i=0}^{n-1}(-\lambda_i)X^i\mathbb{K}[X]$

de sorte que Q est unitaire de degré n et $\mathbb{M}_{\mathbb{B}}(f) = C_Q$

$\Leftarrow$ **:** On suppose qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \dots e_{n-1})$ de E dans laquelle la matrice de f est de la forme C_Q, où Q est un polynôme unitaire de degré n

Ainsi $\forall i \in [\![0, n-2]\!],\ f(e_i) = e_{i+1}$

donc $(e_0, f(e_0), f^2(e_0), \dots, f^{n-1}(e_0))$ est une base de E et donc f est cyclique

$\boxed{f \text{ est cyclique si et seulement s'il existe une base } \mathcal{B} \text{ de } E \text{ dans laquelle la matrice de } f \text{ est de la forme } C_Q \text{ où } Q \text{ est un polynôme unitaire de degré } n}$

6. $\Leftarrow$ **:** On suppose que χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples.

   Ainsi $|\mathrm{sp}(f)| = \deg(\chi_f) = \dim E$

   donc f est diagonalisable d'après le cours

   $\Leftarrow$ **:** On suppose que f est diagonalisable. Comme f est cyclique,

   ceci nous fournit $\mathbb{B}$ une base de E et $Q \in \mathbb{K}[X]$ unitaire de degré n tel que $\mathbb{M}_{\mathbb{B}}(f) = C_Q$ d'après 5.

   Ainsi C_Q est diagonalisable et il en est de même pour ${}^tC_Q$ d'après 2

   Ainsi $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{sp}(f)} E_\lambda\left({}^tC_Q\right)$ d'où $n = \sum_{\lambda \in \mathrm{sp}({}^tC_Q)} \dim\left(E_\lambda\left({}^tC_Q\right)\right)$

   or on a $\forall \lambda \in \mathrm{sp}\left({}^tC_Q\right),\ \dim\left(E_\lambda\left({}^tC_Q\right)\right) = 1$ d'après 4 donc $\left|\mathrm{sp}\left({}^tC_Q\right)\right| = n$

   or d'après 1 : $\mathrm{sp}\left({}^tC_Q\right) = \mathrm{sp}\left(C_Q\right) = \mathrm{sp}\left(f\right)$

   donc f admet n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$

   donc χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples

   Ainsi $\boxed{f \text{ est diagonalisable si et seulement si } \chi_f \text{ est scindé sur } \mathbb{K} \text{ et a toutes ses racines simples}}$

7. On suppose que f est cyclique.

   Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i f^i = 0_{\mathbb{L}(E)}$. Montrons $\forall i \in [\![0, n-1]\!],\ \lambda_i = 0$

   Comme f est cyclique, ceci nous fournit $x \in E$ tel que $\mathbb{B} = (x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ soit une base de E

   donc $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i f^i(x) = 0_{\mathbb{L}(E)}(x) = 0_E$

   ainsi $\forall i \in [\![0, n-1]\!],\ \lambda_i = 0$ car $\mathbb{B}$ est libre

   Alors $\boxed{(\mathrm{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1}) \text{ est libre dans } \mathcal{L}(E)}$

   Je note d le degré de π_f. D'après le cours on a $d = \dim\left(\mathbb{K}[f]\right)$.

   Or $(\mathrm{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est libre dans $\mathbb{K}[f]$ donc $d \geq n$

   de plus d'après Cayley-Hamilton, on a χ_f est annulateur de f

   d'où $\pi_f \mid \chi_f$ or ce sont des polynômes non nuls ainsi on a $d = \deg\left(\pi_f\right) \leq \deg\left(\chi_f\right) = n$

   ainsi $n = d$ d'où $\boxed{\text{le polynôme minimal de } f \text{ est de degré } n}$

On ne se sert pas de cette question pour montrer le théorème de Cayley-Hamilton dans le paragraphe ***I.D*** *qui suit.*

I.D. Application à une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton

8. On note $N_x = \{m \in \mathbb{N}^* \mid \left(f^i(x)\right)_{0\leq i\leq m-1} \text{ libre}\}$.
   On sait que $1 \in N_x$ car $x \neq 0_E$ et que $\forall m \geq n,\ m \notin N_x$ car $\dim E = n$
   Ainsi N_x est une partie de $\mathbb{N}^*$ non vide majorée par $n-1$
   donc N_x admet un plus grand élément $p \in \mathbb{N}^*$.
   Ainsi la famille $\left(f^i(x)\right)_{0\leq i\leq p-1}$ est libre et la famille $\left(f^i(x)\right)_{0\leq i\leq p}$ est liée

   $\boxed{\text{On a bien l'existence de } p \in \mathbb{N}^* \text{ et de } (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{K}^p \text{ tels que la famille } (x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x)) \text{ est libre et } \alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \cdots + \alpha_{p-1} f^{p-1}(x) + f^p(x) = 0}$

9. On a $f\left(\mathrm{Vect}(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))\right) = \mathrm{Vect}(f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots, f^p(x))$ car f linéaire
   or $f^p(x) = -\alpha_0 x - \alpha_1 f(x) + \cdots - \alpha_{p-1} f^{p-1}(x) \in \mathrm{Vect}(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))$
   d'où $f\left(\mathrm{Vect}(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))\right) \subset \mathrm{Vect}(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))$
   Ainsi $\boxed{\mathrm{Vect}(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x)) \text{ est stable par } f}$

10. Je note alors $\tilde{f}$ l'endomorphisme induit par f sur $\mathrm{Vect}(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))$
    D'après ce qui précède $\mathbb{B} = \left(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x)\right)$ est une base de $\mathrm{Vect}(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))$
    On remarque que $\mathbb{M}_{\mathbb{B}}(\tilde{f}) = C_Q$ en notant $Q = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{p-1} X^{p-1} + X^p$
    d'où $\chi_{\tilde{f}} = Q$ or $\chi_{\tilde{f}} | \chi_f$ car $\tilde{f}$ induit par f
    On a montré que $\boxed{X^p + \alpha_{p-1} X^{p-1} + \cdots + \alpha_0 \text{ divise le polynôme } \chi_f}$

11. En reprenant les notations précédentes, on a $Q(f)(x) = 0$ et il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $PQ = \chi_f$
    Ainsi $\chi_f(f) = P(f) \circ Q(f)$ donc $\chi(f)(x) = P(f)\left[Q(f)(x)\right] = P(f)(0) = 0$ car $P(f)$ linéaire
    On a ainsi montré que : $\forall x \in E,\ \chi(f)(x) = 0$
    or $\chi(f) \in \mathbb{L}(E)$ d'où $\boxed{\chi_f(f) \text{ est l'endomorphisme nul}}$

II. Etude des endomorphismes cycliques

II.A. Endomorphismes cycliques nilpotents

12. $\Rightarrow$ **:** On suppose f cyclique alors $\deg(\pi_f) = n$ d'après 7
    De plus d'après le cours, $\chi_f = X^n$ car f nilpotente
    or $\pi_f | \chi_f$ selon Cayley-Hamilton et π_f est unitaire par définition
    donc $\pi_f = X^n$
    ainsi $f^n = 0$ et $\forall i \in [\![0, n-1]\!],\ f^i \neq 0$
    d'où $r = n$

    $\Leftarrow$ **:** On suppose que $r = n$ donc $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$
    Ceci nous fournit $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$
    Soit $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(x) = 0$.

On montre que $\forall i \in [\![0, n-1]\!],\ \lambda_i = 0$
On suppose, par l'absurde, que la propriété est fausse
Je note alors j le minimum de $\{i \in [\![0, n-1]\!] \mid \lambda_i \neq 0\}$
Ainsi $0 = f^{n-1-j}\left(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(x)\right) = f^{n-1-j}\left(\sum_{i=j}^{n-1} \lambda_i f^i(x)\right) = \lambda_j f^{n-1}(x) + \sum_{i=j}^{n-1} \lambda_i f^{n-1+i-j}(x)$
Or $\forall i \geq p,\ f^i(x) = 0$ donc $\lambda_j f^{n-1}(x) = 0$ et $\lambda_j \neq 0$
d'où $f^{n-1}(x) = 0$ ce qui est absurde
Ainsi $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est une famille libre composée de n vecteurs de E et $\dim E = n$
donc $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est une base de E
donc f est cyclique.

On a montré que $\boxed{f \text{ est cyclique si et seulement si } r = n}$
On remarque que la matrice compagnon associée est unique car les coefficients de cette matrices sont donnés par ceux du polynôme caractéristique.
On sait que si f est cyclique et nilpotente, alors $\chi_f = X^n$

ainsi $\boxed{\text{la matrice compagnon de } f \text{ dans ce cas est } \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})}$

II.B.

13. Pour $k \in [\![1, p]\!]$, $(f - \lambda_k \mathrm{Id}_E)^{m_k}$ et f commutent car $\mathbb{C}[f]$ est une algèbre commutative
donc $\boxed{F_k = \mathrm{Ker}((f - \lambda_k \mathrm{Id}_E)^{m_k}) \text{ est stable par } f}$
On a $\chi_f(X) = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{m_k}$ et les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux
Alors selon le lemme de décomposition des noyaux, on a
$$\mathrm{Ker}\,(\chi(f)) = \mathrm{Ker}((f - \lambda_1 \mathrm{Id}_E)^{m_1}) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}((f - \lambda_p \mathrm{Id}_E)^{m_p}) = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$$
de plus selon Cayley-Hamilton, $\chi_f(f) = 0$ et donc $\mathrm{Ker}\,(\chi(f)) = E$
d'où $\boxed{E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p}$
14. Soit $x \in F_k$. On a $(f - \lambda_k \mathrm{Id})^{m_k}(x) = 0$
Pour tout $y \in F_k$, on a $(f - \lambda_k \mathrm{Id})(y) = \varphi_k(y) \in F_k$
ainsi pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(f - \lambda_k \mathrm{Id})^p(x) = \varphi_k^p(x)$ par récurrence immédiate sur p
donc $\varphi_k^{m_k}(x) = 0$, comme c'est vrai pour tout $x \in F_k$, on conclut que $\boxed{\varphi_k \text{ est un endomorphisme nilpotent de } F_k}$

15. D'après le cours, l'indice de nilpotence de φ_k, endomorphisme de F_k est majoré par $\dim F_k$ ainsi $\boxed{\nu_k \leq \dim(F_k)}$

16. Je note $P = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{\nu_i}$. Soit $k \in [\![1, p]\!]$. Soit $x \in F_k$.

    On a $P(f) = \left[\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{p} (X - \lambda_i)^{\nu_i}(f)\right] \circ (f - \lambda_k \mathrm{Id})^{\nu_k}$

    donc $P(f)(x) = \left[\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{p} (X - \lambda_i)^{\nu_i}(f)\right] (\varphi_k^{\nu_k}(x)) = \left[\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{p} (X - \lambda_i)^{\nu_i}(f)\right] (0) = 0$

    donc $P(f)$ coïncide avec l'endomorphisme nul sur chaque F_k et $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$ d'après 13

    donc $P(f) = 0$

    Je note d le degré de P comme P est unitaire alors $(\mathrm{Id}, f, f^2, \ldots, f^d)$ est liée

    donc $d \geq n$ car $(\mathrm{Id}, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$ est libre

    or $d = \sum_{i=0}^{p} \nu_i$ d'où $n \leq \sum_{i=0}^{p} \nu_i$

    On remarque à l'aide de la question 14 que $\nu_k \leq m_k$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$

    donc $n \leq \sum_{k=0}^{p} \nu_k \leq \sum_{i=0}^{p} m_k = n$

    ainsi les inégalités sont des égalités et $\boxed{\text{pour tout } k \in [\![1, p]\!], \text{ on a } \nu_k = m_k}$

17. Comme $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$ d'après 13 et $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\nu_k \leq \dim F_k$ d'après 15

    on a donc avec la question précédente $n = \sum_{k=1}^{p} \nu_k \leq \sum_{k=1}^{p} \dim(F_k) = n$

    Comme à la question précédente, on obtient : $\boxed{\forall k \in [\![1, p]\!],\ \nu_k = m_k = \dim(F_k)}$

    φ_k est un endomorphisme nilpotent de F_k d'indice $\nu_k = m_k = \dim(F_k)$

    donc selon 12, φ_k est nilpotent et cyclique.

    ceci nous fournit une base $\mathbb{B}_k$ de F_k tel que $\mathbb{M}_{\mathbb{B}_k}(\varphi_k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in$

    $\mathbb{M}_{m_k}(\mathbb{C})$

    En notant f_k l'endomorphisme induit par f sur F_k,

on a alors $\mathbb{M}_{\mathbb{B}_k}(f_k) = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_k & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 1 & \lambda_k & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \lambda_k & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \lambda_k \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{m_k}(\mathbb{C})$

En concaténant les bases $\mathbb{B}_k$ pour k allant de 1 à p

On obtient une base $\mathbb{B}$ adaptée à la décomposition en somme directe $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$

ainsi $\boxed{\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n) \text{ est une base de } E \text{ dans laquelle } f \text{ a une matrice diagonale par blocs de formes voulues}}$

<u>Remarque :</u> pour la suite on peut démontrer que pour une telle base on a nécessairement :

$$\forall k \in [\![1, p]\!],\ (f - \lambda_k \mathrm{Id})^{m_k}(u_{m_1+\cdots+m_{k-1}+1}) = 0 \text{ puis}$$

$$\forall k \in [\![1, p]\!],\ \forall i \in [\![1, m_k]\!],\ u_{m_1+\cdots+m_{k-1}+i} \in F_k$$

On peut aussi supposer que l'on travaille avec la base choisie.

18. Pour $k \in [\![1, p]\!]$, on a $u_{m_1+\cdots+m_{k-1}+1} \in F_k$

ainsi $\forall i \in \mathbb{N},\ f^i(u_{m_1+\cdots+m_{k-1}+1}) \in F_k$ car F_k stable par f

puis pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, on a $P(f)(u_{m_1+\cdots+m_{k-1}+1}) \in F_k$ car F_k est stable par combinaison linéaire.

Et ainsi $P(f)(x_0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} P(f)(u_{m_1+\cdots+m_{k-1}+1})$ est la décomposition de $P(f)(x_0)$ sur $F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$

Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$. On a donc $Q(f)(x_0) = 0 \iff \forall k \in [\![1, p]\!],\ Q(f)(e_k) = 0$

Je note $e_k = u_{m_1+\cdots+m_{k-1}+1}$ et on a $\mathbb{B}_k = (e_k, \varphi_k(e_k), \dots, \varphi_k^{m_k-1}(e_k))$ est une base de F_k

On a vu que la matrice de φ_k dans cette base est $C_{X^{m_k}}$

donc $\pi_{\varphi_k} = X^{m_k}$ car φ_k est cyclique et nilpotent et $\dim(F_k) = m_k$ selon 12

$$\forall k \in [\![1, p]\!],\ (f - \lambda_k \mathrm{Id})^{m_k}(u_{m_1+\cdots+m_{k-1}+1}) = 0 \text{ puis}$$

$$\forall k \in [\![1, p]\!],\ \forall i \in [\![1, m_k]\!],\ u_{m_1+\cdots+m_{k-1}+i} \in F_k$$

Par ailleurs on montre facilement que

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], P(\varphi_k) = 0 \iff P(\varphi_k)(e_k) = 0$$

car $P(\varphi_k)$ commute avec tout φ_k^i et que $\left(\varphi_k^i(e_k)\right)_{0 \le i < m_k}$ est une base de F_k.

Par ailleurs on a $Q(\varphi_k) = 0 \iff X^{m_k} | Q$ (nilpotent et cyclique)

donc $Q(f)(e_k) = 0 \iff Q(\varphi_k + \lambda_k \mathrm{Id}_{F_k})(e_k) = 0 \iff X^{m_k} | Q(X + \lambda_k)$

ainsi $Q(f)(e_k) = 0 \iff (X - \lambda_k)^{m_k} | Q(X)$

donc comme les $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux,

on a finalement $\boxed{Q(f)(x_0) = 0 \iff \displaystyle\prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{m_k} | Q}$

19. Soit $(\lambda_i)_{0\leq i\leq n-1} \in \mathbb{K}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(x_0) = 0$ Je note $Q = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i X^i$ de sorte que $Q(f)(x_0) = 0$
ainsi $\displaystyle\prod_{k=1}^{p} (X-\lambda_k)^{m_k} | Q$ d'après la question précédente or $\deg(Q) \leq n-1 < n = \deg\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{p} (X-\lambda_k)^{m_k}\right)$
donc Q est le polynôme nul et ainsi $\forall i \in [\![0, n-1]\!],\ \lambda_i = 0$
donc $\left(f^i(x_0)\right)_{0\leq i\leq n-1}$ est une famille libre de n vecteurs de E et $n = \dim E$
d'où $\left(f^i(x_0)\right)_{0\leq i\leq n-1}$ est une base de E ce qui justifie que $\boxed{f \text{ est cyclique}}$

III. Endomorphismes commutants, décomposition de Frobenius

20. L'application $g \longmapsto f\circ g - g\circ f$ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ dont le noyau est $C(f)$
Ainsi $C(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$

De plus, soit g et $h \in C(f)$. On a $(g\circ h)\circ f = g\circ f\circ h = f\circ(g\circ h)$
ainsi $C(f)$ est stable par $\circ$ et il est clair que $\mathrm{Id} \in C(f)$
Ainsi $\boxed{C(f) \text{ est une sous-algèbre de } \mathcal{L}(E)}$

III.A. Commutant d'un endomorphisme cyclique

21. On a $g(x_0) \in E$ et $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.
d'où $\boxed{\text{l'existence de } \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \text{ de } \mathbb{K} \text{ tels que } g(x_0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0)}$

22. Il suffit d'établir que les applications linéaires g et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k$ coïncident sur la base $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$.
On montre par récurrence immédiate que $\forall i \in \mathbb{N},\ g \in C\left(f^i\right)$
Soit $i \in [\![0, n-1]\!]$. En utilisant 21 et le fait que l'algèbre $\mathbb{K}[f]$ est commutative

$$g\left(f^i(x_0)\right) = f^i\left(g(x_0)\right) = f^i\left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k\left(f^i(x_0)\right)$$

donc $g = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k$ et $\boxed{g \in \mathbb{K}[f]}$

23. On vient d'établir le sens direct (avec un polynôme de degré $\leq n-1$)
La réciproque vient du fait que $\mathbb{K}[f]$ est une algèbre commutative et que $\mathbb{K}_{n-1}[X] \subset \mathbb{K}[X]$ et $f \in \mathbb{K}[f]$.
On conclut que

$$\boxed{g \in C(f) \text{ si et seulement s'il existe un polynôme } R \in \mathbb{K}_{n-1}[X] \text{ tel que } g = R(f)}$$

III.B. Décomposition de Frobenius

24. On suppose que $G = F_1 \cup \cdots \cup F_r$ est un sous espace de E.
Par l'absurde, je suppose qu'aucun des sous-espaces F_i ne contient tous les autres.
Ainsi $r \geq 2$ et $G \neq \{0\}$.

Méthode 1 : Quitte à réduire le nombre, on peut supposer qu'aucun F_i n'est inclus dans la réunion des autres. Cela nous fournit $x_1 \in F_1$ qui n'est dans aucun des F_i pour $i \geq 2$.
Sinon, $F_1 \neq G$ et on peut aussi trouver $y \in G \setminus F_1$.
Pour tout scalaire λ, on a $y + \lambda x_1 \notin F_1$ (car sinon $y \in F_1$) et ainsi $y + \lambda x_1 \in F_2 \cup \cdots \cup F_r$.
La droite affine $y + \mathbb{K}x_1$ est donc incluse dans $F_2 \cup \cdots \cup F_r$ et contient une infinité d'éléments car $\mathbb{K}$ est infini et $t \in \mathbb{K} \mapsto y + tx_1$ est injective car $x_1 \neq 0$
Ceci nous fournit $j \in [\![2, r]\!]$ et $\lambda \neq \lambda'$ dans $\mathbb{K}$ tel que $y + \lambda x_1 \in F_j$ et $y + \lambda' x_1 \in F_j$
donc $x_1 \in F_j$ (par combinaison linéaire) ce qui est absurde
Méthode 2 : Comme G est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie, on peut munir G d'une norme.
De plus les notions topologiques sur G sont indépendantes du choix de la norme car $\dim G < +\infty$.
Comme les F_i sont des sous-espaces de G de dimensions finies, ce sont des fermés de G.
Soit $i \in [\![1, r]\!]$. Comme $F_i \neq G$, cela nous fournit $e \in G \setminus F_i$.
Soit $x \in F_i$. On a alors : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ x + \frac{1}{p}e \notin F_i$
Pour toute boule B_x centré en x, il existe $p_0 \in \mathbb{N}^*,\ x + \frac{1}{p_0}e \in B_x$ car $\left(x + \frac{1}{p_0}e\right)_{p \geq 1}$ converge vers x
Ainsi relativement à G, les F_i sont des fermés d'intérieurs vides.
Donc pour $i \in [\![1, r]\!]$, $\Omega_i = G \setminus F_i$ un ouvert dense dans G
On pose $V_i = \bigcap_{j=1}^{i} \Omega_j$
On montre par récurrence finie que les V_i $(1 \leq i \leq r)$ sont des ouverts non vides de G
Pour l'initialisation c'est évident car $V_1 = \Omega_1$ est dense dans G.
Pour l'hérédité, on suppose pour $i < r$ que V_i est un ouvert non vide
on a $V_{i+1} = V_i \bigcap \Omega_{i+1}$ est un ouvert (intersection de deux ouverts) et non vide car $V_i \neq \emptyset$ et Ω_{i+1} dense
donc $V_r \neq \emptyset$ et $V_r = G \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{r} F_j\right) = \emptyset$ ce qui est absurde
Ainsi $\boxed{\text{l'un des sous-espaces } F_i \text{ contient tous les autres}}$

Remarque : Pour $r = 2$, il existe une preuve classique purement algébrique. Pour le cas général, la preuve doit utiliser le fait que $\mathbb{K}$ est infini.
En effet, si je prend $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $E = \mathbb{K}^2$, $F_1 = \text{Vect}\left((1, 0)\right)$, $F_2 = \text{Vect}\left((0, 1)\right)$ et $F_3 = \text{Vect}\left((1, 1)\right)$.
On a $E = F_1 \bigcup F_2 \bigcup F_3$ et pourtant aucun des sous-espaces F_i ne contient tous les autres.

25. Soit $x \in E$ On considère l'application $\varphi_x : P \in \mathbb{K}[X] \longmapsto P(f)(x) \in E$.
Comme $I_x = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(f)(x) = 0\}$ est le noyau de l'application linéaire φ_x,

I_x un sous groupe de $(\mathbb{K}[X], +)$
Pour $P \in I_x$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$, on a $QP \in I_x$
car $(QP)(f)(x) = (Q(f) \circ P(f))(x) = Q(f)(P(f)(x)) = 0$ car $Q(f) \in \mathbb{L}(E)$
d'où I_x est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ comme $\pi_f \in I_x$, cet idéal est non réduit à $\{0\}$
ce qui nous fournit $\pi_{f,x} \in \mathbb{K}[X]$ unitaire (donc non nul) tel que $I_x = (\pi_{f,x}) = \{\pi_{f,x}P \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$
On remarque que : $\forall x \in E,\ \pi_{f,x} | \pi_f$

Si on écrit $\pi_f = \prod_{k=1}^{N} P_i^{\alpha_i}$ décomposition en facteurs irréductibles, où $N \in \mathbb{N}^*$, les P_i sont irréductibles unitaires et distincts deux à deux et enfin les $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$.
Alors le nombre de diviseurs unitaires de π_f est $\prod_{k=1}^{N} (\alpha_i + 1)$

Ainsi l'ensemble $\{\pi_{f,x} \mid x \in E\}$ est fini de cardinal noté r où $r \in [\![1, \prod_{k=1}^{N} (\alpha_i + 1)]\!]$
On peut donc choisir $u_1, \dots u_r \in E$, tel que $\{\pi_{f,x} \mid x \in E\} = \{\pi_{f,u_i} \mid i \in [\![1, r]\!]\}$
Ainsi $E = \bigcup_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(\pi_{f,u_i}(f))$ car $\forall x \in E,\ x \in \mathrm{Ker}(\pi_{f,x}(f))$
La question 24 nous fournit $i_0 \in [\![1, r]\!]$ tel que $\mathrm{Ker}(\pi_{f,u_{i_0}}(f)) = E$
On note $x_1 = u_{i_0}$ et on a $\mathrm{Ker}(\pi_{f,x_1}(f)) = E$
On remarque que $\pi_{f,x_1}(f) = 0_{\mathbb{L}(E)}$ donc $\pi_f | \pi_{f,x_1}$
or $\pi_{f,x_1} | \pi_f$ et ce sont des polynômes unitaires
donc $\pi_{f,x_1} = \pi_f$ Finalement

$$\forall P \in \mathbb{K}[X],\ P(f)(x_1) = 0 \Longleftrightarrow \pi_f | P$$

en faisant comme en 19, on montre que $\boxed{(x_1, f(x_1), \dots, f^{d-1}(x_1)) \text{ est libre}}$

26. En faisant comme en 9, on montre que $\boxed{E_1 \text{ est stable par } f}$
De plus, on a $E_1 = \{P(f)(x_1) \mid P \in \mathbb{K}_{d-1}[X]\} \subset \{P(f)(x_1) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Comme $\pi_f \neq 0$,
le théorème de la division euclidienne nous fournit Q et $R \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\begin{cases} P = Q\pi_f + R \\ \deg(R) < d = \deg(\pi_f) \end{cases}$
On a alors $P(f)(x_1) = [Q(f) \circ \pi_f(f)](x_1) + R(f)(x_1) = R(f)(x_1) \in \{T(f)(x_1) \mid T \in \mathbb{K}_{d-1}[X]\}$
On conclut que $\boxed{E_1 = \{P(f)(x_1) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}}$
27. D'après ce qui précède $\mathbb{B} = (e_1, e_2, \dots, e_d)$ est une base de E_1.
De plus on a $\mathbb{M}_{\mathbb{B}}(\psi_1) = C_{\pi_f}$ matrice compagnon du π_f polynôme unitaire de degré $d = \dim(E_1)$
alors d'après 5, $\boxed{\psi_1 \text{ est cyclique}}$
28. Pour $i \in \mathbb{N}$, on note $F_i = \mathrm{Ker}\left(\Phi \circ f^i\right)$ ainsi $F = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} F_i$ est bien un sous-espace de E

De plus, on a pour $i \geq 1$, $f(F_i) \subset F_{i-1}$ donc

$$f(F) \subset f\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}^*} F_i\right) \subset \bigcap_{i\in\mathbb{N}^*} f(F_i) \subset \bigcap_{i\in\mathbb{N}^*} F_{i-1} = F$$

d'où $\boxed{F \text{ est stable par } f}$

Soit $u \in E_1 \cap F$.

Comme $u \in E_1$, cela nous fournit $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{K}$ tels que $u = \displaystyle\sum_{k=1}^{d} \lambda_k e_k$

or $\Phi(x) = \lambda_d$ et $\Phi(f^0(x)) = 0$ car $u \in F$, donc $\lambda_d = 0$ d'où $u = \displaystyle\sum_{k=1}^{d-1} \lambda_k e_k$

puis $f(u) = \displaystyle\sum_{k=1}^{d-1} \lambda_k e_{k+1}$ et donc $\lambda_{d-1} = 0$ et $f(u) = \displaystyle\sum_{k=1}^{d-2} \lambda_k e_{k+1}$

En réitérant le procédé, on trouve $\lambda_{d-2} = \ldots = \lambda_1 = 0$

donc $u = 0$

L'autre inclusion étant évidente, on a $E_1 \cap F = \{0\}$ d'où $\boxed{E_1 \text{ et } F \text{ sont en somme directe}}$

29. Je note Ψ_1 l'application linéaire induite par Ψ entre E_1 et $\mathbb{K}^d$.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(\Psi_1)$.
On a $x \in E_1$ et $\Phi(x) = \Phi(f(x)) = \cdots = \Phi(f^{d-1}(x)) = 0$.
En faisant comme à la question précédente, on obtient $x = 0$
L'autre inclusion étant évidente, on a $\mathrm{Ker}(\Psi_1) = \{0\}$
Ainsi Ψ_1 est une application linéaire injective entre E_1 et $\mathbb{K}^d$ or $\dim(E_1) = d = \dim(\mathbb{K}^d)$
En utilisant le théorème du rang, on obtient que Ψ_1 est surjective puis bijective
Ainsi $\boxed{\Psi \text{ induit un isomorphisme entre } E_1 \text{ et } \mathbb{K}^d}$

30. De la question précédente, on montre que Ψ est surjective de E vers $\mathbb{K}^d$ et que $\mathrm{Ker}(\Psi) \bigcap E_1 = \{0\}$.
Ainsi $\dim(E_1) = d = \mathrm{rg}(\Psi)$ et $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(\Psi)) + \mathrm{rg}(\Psi) = \dim(\mathrm{Ker}(\Psi)) + \dim(E_1)$
donc $E = E_1 \oplus \mathrm{Ker}(\Psi)$
On a $\mathrm{Ker}\Psi = \displaystyle\bigcap_{i=0}^{d-1} F_i$ (les F_i sont introduits en 28) on a donc $F \subset \mathrm{Ker}\Psi$

Soit $x \in \mathrm{Ker}(\Psi)$. Montrons que $x \in F$
Soit $i \in \mathbb{N}$. Il suffit d'établir que $\Phi(f^i(x)) = 0$
Le théorème de la division euclidienne nous fournit Q et $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(R) < d$ et $X^i = Q\pi_f + R$.

On peut écrire $R = \displaystyle\sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k$. On a comme en 26 et car Φ est linéaire

$$\Phi(f^i(x)) = \Phi(0) + \Phi(R(f)(x)) = 0 + \sum_{k=0}^{d-1} a_k \Phi\left(f^k(x)\right) = 0$$

ainsi $F \supset \mathrm{Ker}\Psi$ d'où $F = \mathrm{Ker}\Psi$
on conclut que $\boxed{E = E_1 \oplus F}$

31. **Préambule :** Avant de commencer la construction par récurrence, on remarque que dans ce qui précède le polynôme minimal de f est celui de ψ_1 et donc que $\forall x \in F, \pi_{\psi_1}(f)(x) = 0$

Initialisation : On prend E_1, F et ψ_1 comme ci dessus.
On a E_1 stable par F et ψ_1 cyclique.
On pose $P_1 = \pi_f = \pi_{\psi_1}$, $G_1 = F$ de sorte que $E_1 \oplus G_1 = E$
On a $\forall x \in G_1,\ P_1(f)(x) = 0$

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
On suppose avoir l'existence de k sous-espaces vectoriels de E, notés $E_1, \dots, E_k$ et G_k tous stables par f, tels que

— $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_k \oplus G_k$;
— pour tout $1 \leq i \leq k$, l'endomorphisme ψ_k induit par f sur le sous-espace vectoriel E_i est cyclique ;
— si on note P_i le polynôme minimal de ψ_i, alors P_{i+1} divise P_i pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq k-1$
— $\forall x \in G_k,\ P_k(f)(x) = 0$

Si $\dim G_k = 0$, on s'arrête et on pose $r = k$
Sinon, on applique 24 à 30 à l'endomorphisme induit par f sur G_k
On obtient alors E_{k+1}, G_{k+1} sous espaces stables par f et le polynôme P_{k+1} tels que

— $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_{k+1} \oplus G_{k+1}$;
— l'endomorphisme ψ_{k+1} induit par f sur le sous-espace vectoriel E_{k+1} est cyclique ;
— si on note P_{k+1} le polynôme minimal de ψ_{k+1}, alors P_{k+1} divise P_k
— $\forall x \in G_{k+1},\ P_{k+1}(f)(x) = 0$

On a ainsi la construction voulue au rang k.

Conclusion : Cette construction algorithmique s'arrête car à chaque étape $\dim(E_k) \leq 1$ et donc $r \leq \dim(E)$. car $(\dim G_k)_k$ est une suite à valeurs dans $\mathbb{N}$ strictement décroissante.
On obtient ainsi le résultat voulu.

On en déduit qu'il existe r sous-espaces vectoriels de E, notés $E_1, \dots, E_r$, tous stables par f, tels que :
— $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$;
— pour tout $1 \leq i \leq r$, l'endomorphisme ψ_i induit par f sur le sous-espace vectoriel E_i est cyclique ;
— si on note P_i le polynôme minimal de ψ_i, alors P_{i+1} divise P_i pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq r-1$.

III.C. Commutant d'un endomorphisme quelconque

32. Je reprends les notations de la questions précédente pour la décomposition de Frobenius de f.
Je note Λ l'application telle que pour $(g_1, \dots, g_r)\mathbb{L}(E_1) \times \cdots \times \mathbb{L}(E_r)$, on a $\Lambda(g_1, \dots, g_r)$ défini sur E par $\Lambda(g_1, \dots, g_r)(x) = g_1(x_1) + \cdots g_r(x_r)$ où $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} x_k$ et les $x_k \in E_k$
Ainsi définie, Λ est linéaire de $\mathbb{L}(E_1) \times \cdots \times \mathbb{L}(E_r)$ à valeurs dans $\mathbb{L}(E)$
De plus on montre facilement que Λ est injective et que $\Lambda\left(C(\psi_1) \times \cdots \times C(\psi_r)\right) \subset C(f)$

Ainsi $\dim(C(f)) \geq \dim(C(\psi_1) \times \cdots \times C(\psi_r)) = \dim(C(\psi_1)) + \cdots + \dim(C(\psi_r))$
or pour $i \in [\![1, r]\!]$, en notant $n_i = \dim E_i$ on a $C(\psi_i) = \mathrm{Vect}(\psi_i^0, \psi_i^1, \ldots, \psi_i^{n_i-1})$ d'après 23 du **III.A**
Comme ψ_i est cyclique alors $(\psi_i^0, \psi_i^1, \ldots, \psi_i^{n_i-1})$ est libre d'après 7
donc $\dim(C(\psi_i)) = n_i = \dim(E_i)$ d'où

$$\dim(C(\psi_1)) + \cdots + \dim(C(\psi_r)) = \dim(E_1) + \cdots + \dim(E_r) = \dim(E_1 \oplus \cdots \oplus E_r) = \dim(E) = n$$

Ainsi $\boxed{\text{la dimension de } C(f) \text{ est supérieure ou égale à } n}$

33. On note $d = \deg(\pi_f)$. D'après le cours, on a $\dim(\mathbb{K}[f]) = d$
or $\mathbb{K}[f] = C(f)$ et $\dim C(f) \geq n$ donc $d \geq n$.
Or on a $\pi_f | \chi_f$ comme conséquence de Cayley-Hamilton ainsi $d \leq n$
donc $d = n$
Or en reprenant les notations précédentes, on a $\dim(E_1) = d = n$
Donc $E_1 = E$ et $\psi_1 = f$ or ψ_1 est cyclique
ainsi $\boxed{f \text{ est cyclique}}$