Corrigé du devoir surveillé n°7

1. Exercice pour tous

Exercice 1. *E3A 2019*

On rappelle les formules de trigonométrie que l'on pourra utiliser sans les redémontrer :

$$2\cos(p)\cos(q) = \cos(p+q) + \cos(p-q) \quad \text{et} \quad 2\sin(p)\cos(q) = \sin(p+q) + \sin(p-q)$$

Soit α un réel non nul fixé.

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction u_n de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) = \frac{\alpha^n \cos(nx)}{n\,!}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de la fonction $C : x \mapsto \sum_{n\geqslant 0} u_n(x)$.

2. Etudier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ sur $\mathscr{D}$.

3. Donner pour tout $x \in \mathscr{D}$ une expression de $C(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

4. Pour tout entier naturel n, on note :

$$J_n = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\,C(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\,C(x)\,\mathrm{d}x$$

4.1 Calculer J_n puis I_n.

4.2 Déterminer $\lim_{n\to+\infty} J_n$ et $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

5. On pose enfin, lorsque cela existe, $S(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{\alpha^n \cos^2(nx)}{n\,!}$.

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction S et donner une expression de $S(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

Correction.

Q1 : On a $u_n(x) = \dfrac{\alpha^n \cos(nx)}{n!}$ donc $|u_n(x)| \leq \dfrac{|\alpha|^n}{n!}$ terme général de la série exponentielle qui converge pour toute valeur de α donc $\sum |u_n(x)|$ converge. On en déduit que $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Q2 : D'après ce qui précède, $\|u_n\|_\infty \leq \dfrac{|\alpha|^n}{n!}$ et $\sum \dfrac{|\alpha|^n}{n!}$ converge donc la série de fonction $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

Q3 : Posons $v_n(x) = \dfrac{\alpha^n e^{inx}}{n!} = \dfrac{\left(\alpha e^{ix}\right)^n}{n!}$. On a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n(x) = \exp\left(\alpha e^{ix}\right)$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Re}\left(v_n(x)\right) = u_n(x)$ donc $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \mathrm{Re}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n(x)\right) = \mathrm{Re}\left(\exp\left(\alpha e^{ix}\right)\right)$. Or $\exp\left(\alpha e^{ix}\right) = \exp\left(\alpha\cos(x) + i\alpha\sin(x)\right) = e^{\alpha\cos(x)}e^{i\alpha\sin(x)}$ donc $C(x) = e^{\alpha\cos(x)}\cos\left(\alpha\sin(x)\right)$.

Q4.1 : On a $J_n = \int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\,C(x)\,dx$ et $x \mapsto \sin(nx)\,C(x)$ est impaire car C est paire donc $J_n = 0$. On a $I_n = \int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\cos(nx)\,u_k(x)\,dx$. On pose $w_k(x) = \cos(nx)\,u_k(x)$. On a $\|w_k\|_\infty \leq \|u_k\|_\infty$ donc la série de fonctions $\sum w_k$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$ et les fonctions w_k sont continues. On en déduit que $I_n = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} w_k(x)\,dx$. Or, $w_k(x) = \dfrac{\alpha^n\cos(nx)\cos(kx)}{k!} = \dfrac{\alpha^n}{2k!}\left(\cos(k+n)(x) + \cos(k-n)(x)\right)$ donc $\int_{-\pi}^{\pi} w_k(x)\,dx = 0$ si $k \neq n$ et $\int_{-\pi}^{\pi} w_n(x)\,dx = \dfrac{\alpha^n}{2n!}\int_{-\pi}^{\pi} 1dx = \dfrac{\alpha^n\pi}{n!}$ donc $I_n = \dfrac{\alpha^n\pi}{n!}$.

Q4.2 : On a $J_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ (car $\sum \dfrac{\alpha^n\pi}{n!}$ converge).

Q5 : On a $\cos^2(nx) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ donc $\dfrac{\alpha^n\cos^2(nx)}{n!} = \dfrac{\alpha^n}{2n!} + \dfrac{\alpha^n\cos(n\times 2x)}{n!}$. Or $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\alpha^n}{2n!} = \dfrac{e^\alpha}{2}$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\alpha^n\cos(n\times 2x)}{n!} = C(2x)$ donc la série $\sum \dfrac{\alpha^n\cos^2(nx)}{n!}$ converge et $S(x) = \dfrac{e^\alpha}{2} + e^{\alpha\cos(2x)}\cos\left(\alpha\sin(2x)\right)$.

2. Un problème ET UN SEUL, AU CHOIX

CCinP

Problème 1. *CCinP 2014*

Première partie : convergence de séries par transformation d'Abel

1. On considère une suite de réels (a_n), une suite de complexes (b_n) et on note pour tout entier naturel n : $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$.
   En remarquant que, pour $k \geq 1, b_k = B_k - B_{k-1}$, démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$ (transformation d'Abel).
2. On suppose que la suite (B_n) est bornée et que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle.
   (a) Démontrer que la série $\sum_{k \geq 0} (a_k - a_{k+1})$ converge.
   (b) En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$ converge.
   (c) En appliquant le résultat précédent au cas où $b_n = (-1)^n$, donner une démonstration du théorème des séries alternées, après l'avoir énoncé.
3. Exemple.
   Dans cette question, θ est un réel différent de $2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (a) Calculer pour n entier naturel non nul, $\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}$
   (b) Discuter en fonction du réel α la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$.
4. Soit la série de fonction $\sum_{n \geq 1} u_n$ où pour x réel et n entier naturel non nul, $u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.
   Démontrer que cette série de fonctions converge simplement en tout point de $\mathbb{R}$.
   On pourra utiliser sans démonstration le fait qu'une série de complexes $\sum u_n$ converge si et seulement si , les deux séries ayant pour termes généraux les parties réelles et parties imaginaires (c'est-à-dire $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$) convergent.
   On notera U sa fonction somme : pour tout réel x, $U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

Deuxième partie : convergence uniforme de séries

5. On considère une suite de réels (a_n) et (f_n) une suite de fonctions définies sur une partie A de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.
   On pose, pour tout $z \in A$ et pour tout entier naturel n, $F_n(z) = \sum_{k=0}^{n} f_k(z)$.

On suppose que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle et qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$, tel que pour tout $z \in A$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $|F_n(z)| \leq M$ (on dira que la suite (F_n) est uniformément bornée)

(a) Démontrer que la suite $(a_n F_n)$ converge uniformément sur A et que la série de fonctions $\sum_{k\geq 0}(a_k - a_{k+1})F_k$ converge normalement sur A.

(b) A l'aide d'une transformation d'Abel, en déduire que la série de fonctions $\sum a_n f_n$ converge uniformément sur A.

6. Exemple.
Pour x réel et n entier naturel non nul, $u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

(a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 - e^{ix} = -2i \sin\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}}$.
Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge uniformément sur tout intervalle $[a, 2\pi - a]$ où $a \in]0, \pi[$.
En déduire que la fonction U est continue sur l'intervalle $]0, 2\pi[$.

(b) Pour p entier naturel, on considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} v_n$ où pour x réel et n entier naturel non nul, $v_n(x) = \frac{\sin(nx)\sin(px)}{\sqrt{n}}$.
Démontrer que, pour tout entier naturel p, la série de fonctions $\sum v_n$ converge uniformément sur l'intervalle $[0, \pi[$.
On pourra, par exemple, utiliser sans démonstration, que :

$$\text{pour tout } x \in [0, \pi],\ \frac{2}{\pi} \leq \sin\left(\frac{x}{2}\right).$$

Troisième partie : convergence uniforme d'une série entière

7. Si $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est une série entière de la variable complexe de rayon $R < 0$, rappeler le résultat du cours concernant la convergence uniforme de cette série.

8. On considère la série de la variable complexe $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ de rayon 1.

(a) On note $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.
Démontrer que la série de la variable réelle $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ ne converge pas uniformément sur $]-1, 1[$ (en particulier la série $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ ne converge pas uniformément sur D).

(b) On pourra confondre un point de $\mathbb{R}^2$ et son affixe.
pour $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on note D_α l'ensemble des complexes z, tels que $|z| \leq 1$ et dont la partie réelle vérifie $\mathrm{Re}(z) \leq \cos\alpha$.
Représenter hermétiquement l'ensemble D_α dans un repère orthonormé du plan.

(c) Démontrer que D_α est une partie fermée de $\mathbb{C}$.
On pourra écrire :

$$D_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq \cos\alpha\}$$

et démontrer que D_α est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.
En déduire que D_α est une partie compacte de $\mathbb{C}$.

(d) On note pour $z \in \mathbb{C}$ et n entier naturel, $F_n(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^k$.
Démontrer que pour tout $z \in D_\alpha$ et tout entier naturel n, si $x = \operatorname{Re}(z)$:

$$|F_n(z)| \leq \frac{2}{1-x} \leq \frac{2}{1-\cos\alpha}$$

(e) Démontrer que la série entière $\sum \dfrac{z^n}{\sqrt{n}}$ converge uniformément sur tous les compacts D_α (pour $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$).

Correction.

Partie 1 : convergence de séries par transformée d'Abel

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k(B_k - B_{k-1}) = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n} a_k B_{k-1}$.
Dans la dernière somme, on effectue le changement d'indice $j = k-1$.
$S_n = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} B_j = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n - a_1 B_0$
$= a_0 b_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k - (a_0 - a_1) B_0 + a_n B_n - a_1 b_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$

2. (a) Par théorème, la suite (a_n) étant convergente, la série $\sum_{k\geq 0} a_k - a_{k+1}$ est également convergente (c'est même une CNS).

(b) Vérifions que la suite (S_n) des sommes partielles est convergente.
D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$.
Le second terme $(a_n B_n)$ tend vers 0 car produit d'une suite convergente vers 0 et d'une suite bornée.
Le premier terme est une somme partielle de la série de TG $(a_k - a_{k+1}) \times B_k$.
Notons $M > 0$ un majorant de la suite $(|B_n|)$.
Alors $\forall k \in \mathbb{N}, |(a_k - a_{k+1}) B_k| \leq |a_k - a_{k+1}| \times M = (a_k - a_{k+1}) \times M$ car (a_k) est une suite décroissante.
Ainsi, $(a_k - a_{k+1}) B_k$ est dominée par une le TG d'une série absolument convergente.
Donc $(a_k - a_{k+1}) \times B_k$ est lui même le TG d'une série AC ce qui termine la démonstration de cette question.

(c)
- Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de limite nulle. Alors $\sum_{k\geq 0} (-1)^k a_k$ est une série convergente.
- Il suffit d'appliquer le résultat de la question précédente après avoir justifié que la suite $(B_n) = \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\right)$ est une suite bornée.
On a $\forall n \in \mathbb{N}, B_n \in \{1, 0\}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, |B_n| \leq 1$ ce assure bien le résultat demandé.

3. (a)
- On demande de calculer la somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{i\tau}$. Notons que, par hypothèse, $e^{i\tau} \neq 1$.
- Par théorème, $\sum_{k=1}^{n} e^{ik\tau} = e^{i\tau} \dfrac{1 - e^{in\tau}}{1 - e^{i\tau}} = e^{i\tau} \dfrac{e^{in\tau/2}}{e^{i\tau/2}} \dfrac{(-2i)\sin(n\tau/2)}{(-2i)\sin(\tau/2)} = e^{i(n+1)\tau/2} \dfrac{\sin(n\tau/2)}{\sin(\tau/2)}$

(b)
- Lorsque $\alpha > 1$, la série de TG $\dfrac{e^{in\tau}}{n^\alpha}$ est absolument convergente donc convergente.
- Lorsque $\alpha \leq 0$, le module du terme général ne tend pas vers 0 donc la série est grossièrement divergente.
- Soit $\alpha \in]0, 1]$.
  On va montrer que la série est convergente par application du résultat de la question **2b2**.
  Notons tout de même que le fait que la série commence à $n = 1$ à la place de $n = 0$ n'a pas d'incidence.
  La suite $(1/n)$ est clairement décroissante et tend vers 0.
  D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|\sum_{k=1}^n e^{i\tau}\right| \leq \dfrac{1}{|\sin(\tau/2)|}$ donc la suite des sommes partielles qui va bien est bornée.
  Conclusion : la série est convergente.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $z_n = \dfrac{e^{inx}}{n^{1/2}}$.
   Lorsque $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, la question précédente assure la convergence de la série de TG z_n et le rappel de l'énoncé assure la convergence de la série de TG $\Im(z_n) = \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.
   Lorsque $x \in 2\pi\mathbb{Z}, u_n(x) = 0$ ce qui est bien le TG d'une série convergente.
   Conclusion : cette série de fonction converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Partie 2 : convergence uniforme de séries

5. (a)
   - On montre que la suite (a_nF_n) cvu vers la fonction nulle sur A.
     $\forall z \in A, |a_nF_n(z)| \leq |a_n| \times M$ et cette majoration par une suite (indépendante de z) qui tend vers 0 assure que (a_nF_n) cvu vers 0 sur A.
   - Notons comme précédemment, que $\forall k \in \mathbb{N}, |a_k - a_{k+1}| = a_k - a_{k+1}$ par décroissance de (a_n).
     Ainsi, $\forall z \in A, |(a_k - a_{k+1})F_n(z)| \leq (a_k - a_{k+1}) \times M$ et cette majoration par le TG d'une série convergente (car la suite (a_k) est convergente) indépendant de z assure que la série de fonction $\sum_{k\geq 0}(a_k - a_{k+1})F_k$ converge normalement sur A.

   (b) Il est connu qu'une somme de suites de fonctions qui convergent uniformément définit une suite de fonction qui converge uniformément.
   Ainsi, (a_nF_n) cvu sur A et $\left(\sum_{k=0}^{n-1}(a_k - a_{k+1})F_k\right)$ cvu sur A (d'après ce qui précède).
   Donc la somme converge uniformément sur A et cette somme est la suite $(\sum_{k=0}^n a_kf_k)$ d'après la tranformation d'Abel.
   Ainsi, la série $\sum_{a_kf_k}$ cvu sur A.

6. (a)
   - On factorise $1 - e^{ix}$ par $e^{ix/2}$ pour obtenir le résultat souhaité.
   - La suite $(1/\sqrt{n})$ est décroissante et de limite nulle.
     Soit $a \in]0, \pi[$.
     Soit $x \in [a, 2\pi - a]$. Notons tout de suite que $e^{ix} \neq 1$ car $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.
     Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, |\sum_{k=1}^n \sin(kx)| = \left|\Im\left(\sum_{k=1}^n e^{ikx}\right)\right| \leq \left|\sum_{k=1}^n e^{ikx}\right| = \dfrac{|\sin(nx/2)|}{|\sin(x/2)|} \leq \dfrac{1}{|\sin(x/2)|} = \dfrac{1}{\sin(|x|/2)}$.
     Or $x \in [a, 2\pi - a]$ donc $(x/2) \in [a/2, \pi - a/2]$.
     Par hypothèse sur a, $0 < a/2 \leq \pi/2 \leq \pi - a/2 < \pi$ donc les variations de la

fonction sin donnent $0 < \sin(a/2) = \sin(\pi - a/2) \leq \sin(x/2) = |\sin(x/2)|$.
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [a, 2\pi - a], |\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)| \leq \dfrac{1}{\sin(a/2)}$ ce qui assure le caractère uniformément borné de la série de fonctions qui va bien.
Ainsi, d'après les questions précédentes, la série de fonctions $\sum_{k\geq 1} \dfrac{\sin(kx)}{\sqrt{k}}$ converge uniformément sur le segment $[a, 2\pi - a]$.

- Les fonctions étant continues sur $\mathbb{R}$ par les théorèmes généraux, la convergence uniforme assure la continuité de la limite sur le domaine de convergence. Ainsi, U est continue sur tous les segments $[a, 2\pi - a]$ pour $a \in]0, \pi[$.
Donc U est continue sur la réunion de ces segments qui forme l'intervalle $]0, 2\pi[$ tout entier.

(b) D'après les énoncés précédents, il suffit de démontrer que la suite des sommes partielles $\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)\sin(px)$ est uniformément bornée sur $[0, \pi]$.
D'après les calculs précédents, $\forall x \in]0, \pi], A_n(x) = |\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)\sin(px)| = \left|\dfrac{\sin(nx/2)\sin(px)}{\sin(x/2)}\right|$.
Pour $x \in]0, \pi]$, on a d'après l'énoncé, $0 < \dfrac{x}{\pi} \leq \sin(x/2)$ ce qui, par décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$ donne $0 < \dfrac{1}{\sin(x/2)} \leq \dfrac{\pi}{x}$.
Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0, \pi], A_n(x) \leq \dfrac{|\sin(px)|\pi}{x}$.
Or, il est bien connu que $|\sin(t)| \leq |t|$ pour tout t réel.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0, \pi], A_n(x) \leq \dfrac{p|x|\pi}{x} = p\pi$.
Cette inégalité est encore valable pour $x = 0$ car la somme est nulle.
Ainsi, la somme partielle qui va bien est uniformément bornée. De plus, $(1/\sqrt{n})$ est décroissante de limite nulle donc $\sum_{n\geq 0} v_n(x)$ cvu sur $[0, \pi]$.

Partie 3 : convergence uniforme d'une série entière

7. La série entière converge uniformément sur tout disque fermé de centre 0 inclus dans le disque ouvert $D(0, R)$ ie de la forme $\{z \in \mathbb{C} | |z| \leq r\}$ avec $r \in]0, R[$.

8. (a) Supposons que la série entière $\sum \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$ cvu sur $]-1, 1[$ et notons f la fonction limite.
Alors la suite de fonctions $S_n : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \dfrac{x^k}{\sqrt{k}}$ converge uniformément vers f sur $]-1, 1[$. De plus, 1 est dans l'adhérence de $]-1, 1[$ et la limite quand x tend vers 1^- de $S_n(x)$ existe (dans $\mathbb{R}$) et vaut $L_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.
Par conséquence du théorème de la double limite ($\mathbb{R}$ est complet...), la suite (L_n) est convergente ce qui est absurde car la série de TG $\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ est divergente.
Conclusion : la série entière $\sum_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$ ne converge pas uniformément sur $]-1, 1[$.

(b) D_α est le disque fermé de centre 0 de rayon 1 privé d'une "calotte"...

(c)
- L'écriture proposée de D_α ne pose pas de problème. Notons également que dans $\mathbb{R}^2$ (en dimension finie, donc), toutes normes sont équivalentes...

- Posons $\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi_1(x,y) = x^2 + y^2$ et $\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi_2(x,y) = x$.
  Par les théorèmes généraux, φ_1 et φ_2 sont clairement continue sur $\mathbb{R}^2$.
  De plus, les ensembles $]-\infty, 1]$ et $]-\infty, \cos(\alpha)]$ sont deux fermés de $\mathbb{R}$.
  Donc les images réciproques par φ_1 et φ_2 sont des fermés de $\mathbb{R}^2$ par théorèmes (image réciproque d'un fermé par une application continue...)
  Une intersection (quelconque) de fermés est fermée donc $D_\alpha = \varphi_1^{-1}(]-\infty, 1]) \cap \varphi_2^{-1}(]-\infty, \cos(\alpha)])$ est fermé.
- D_α est un fermé d'après ce qui précède et borné (par 1 en norme euclidienne...).
  En dimension finie, un fermé borné est un compact.
  Donc D_α est un compact.

(d)
- $1 \notin D_\alpha$ car $\cos(\alpha) < 1$ (par hypothèse sur α...)
- Soit $z \in D_\alpha$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors $z \neq 1$ ce qui permet d'écrire que $|F_n(z)| = \left|1 \times \dfrac{1 - z^{n+1}}{1 - z}\right| = \dfrac{|1 - z^{n+1}|}{|1 - z|} \leq \dfrac{1 + |z|^{n+1}}{|1 - z|}$
  $\leq \dfrac{2}{|1 - z|}$
  Il reste à minorer le dénominateur par $1 - x$.
  On a $|1 - z|^2 = (1 - x)^2 + y^2 \geq (1 - x)^2 > 0$ car $x \leq \cos(\alpha) < 1$.
  Donc $|1 - z| \geq |1 - x| = 1 - x \geq 1 - \cos(\alpha) > 0$ (toujours car $x \leq \cos(\alpha) < 1$...)
  Par passage à l'inverse, $\dfrac{1}{|1 - z|} \leq \dfrac{1}{1 - x} \leq \dfrac{1}{1 - \cos(\alpha)}$.
  Ainsi, par multiplication par le réel positif 2 : $|F_n(z)| \leq \dfrac{2}{1 - x} \leq \dfrac{2}{1 - \cos(\alpha)}$

(e) Soit $\alpha \in]0, \pi/2[$.
La suite $(1/\sqrt{n})$ est décroissante et tend vers 0 donc pour appliquer le résultat de la question **3.5.b.**, il suffit de montrer que la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=1}^{n} z^k\right)$ est uniformément bornée sur D_α.
Ceci est assuré par la majoration précédente car $\dfrac{2}{1 - \cos(\alpha)}$ est indépendant de z et de n.
Conclusion : la série entière $\sum_{n \geq 0} \dfrac{z^n}{\sqrt{n}}$ converge uniformément sur D_α.

Centrale-Supélec

Problème 2. *Centrale 2011*

Développement asymptotique du reste des séries de Riemann convergentes

L'objet de ce problème est de donner une approximation de la somme des séries de Riemann convergentes $S(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ où α est un réel strictement supérieur à 1. Pour cela, on étudie le reste $R_n(\alpha) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Dans la première partie, on donne une première approximation du reste. Cette méthode se généralisant mal, on utilise dans la deuxième partie une formule de Taylor pour obtenir simplement un développement asymptotique du reste. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle ne donne aucun contrôle de l'erreur.

Dans la troisième partie, on retrouve à partir de la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin le même développement asymptotique avec une expression de l'erreur assez satisfaisante. On a besoin dans cette partie d'une étude succincte des polynômes de Bernoulli.

Dans la dernière partie, on étudie de manière assez précise le contrôle de cette erreur, pour conclure que les formules sommatoires étudiées ne sont pas nécessairement convergentes.

Rappels et notations

On note $[x]$ la partie entière d'un réel x.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On note $v_n = O(u_n)$ si

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow |v_n| \leqslant M|u_n|$$

I Étude préliminaire

I.A – Convergence des séries de Riemann

I.A.1) Soit f une fonction réelle, définie continue et décroissante sur $[a, +\infty[$, où $a \in \mathbb{R}$. Montrer, que pour tout entier $k \in [a+1, +\infty[$, on a $\int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx$.

I.A.2) En déduire la nature de la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$.

En cas de convergence, on pose $S(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

I.A.3) Pour tout réel $\alpha > 1$, montrer que $1 \leqslant S(\alpha) \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha - 1}$.

I.B – Première étude asymptotique du reste

Dans la suite du problème, pour tout réel α strictement supérieur à 1 et pour tout entier naturel non nul n, on pose $R_n(\alpha) = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

I.B.1) En utilisant l'encadrement de la question **I.A.1**, montrer que $R_n(\alpha) = \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + O\Big(\dfrac{1}{n^\alpha}\Big)$.

I.B.2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$. En appliquant à f la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2, montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f(k+1) - f(k) = \dfrac{1}{k^\alpha} - \dfrac{\alpha}{2}\dfrac{1}{k^{\alpha+1}} + A_k$ où A_k est un réel vérifiant $0 \leqslant A_k \leqslant \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}}$.

I.B.3) En déduire que

$$R_n(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + \frac{1}{2n^\alpha} + O\Big(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\Big)$$

On pourrait répéter le procédé pour obtenir un développement asymptotique plus précis de $R_n(\alpha)$, mais la partie suivante va donner une méthode plus rapide.

II Formule de Taylor et nombres de Bernoulli

II.A – Nombres de Bernoulli

II.A.1) Montrer qu'il existe une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant la propriété suivante : pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, pour tout intervalle non réduit à un point I et pour toute fonction complexe f de classe C^∞ sur I, la fonction g définie sur I par $g = a_0 f + a_1 f' + \cdots + a_{p-1} f^{(p-1)}$ vérifie

$$g' + \frac{1}{2!}g'' + \frac{1}{3!}g^{(3)} + \cdots + \frac{1}{p!}g^{(p)} = f' + \sum_{l=1}^{p-1} b_{l,p} f^{(p+l)}$$

où les $b_{l,p}$ sont des coefficients indépendants de f que l'on ne cherchera pas à calculer.

II.A.2) Montrer que $a_0 = 1$ et que pour tout $p \geqslant 1$, $a_p = -\displaystyle\sum_{i=2}^{p+1} \frac{a_{p+1-i}}{i!}$. En déduire que $|a_p| \leqslant 1$ pour tout entier naturel p. Déterminer a_1 et a_2.

II.A.3) *a)* Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, justifier que la série $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{N}} a_p z^p$ est convergente.

On note $\varphi(z)$ sa somme : $\varphi(z) = \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} a_p z^p$.

b) Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, calculer le produit $(e^z - 1)\varphi(z)$. En déduire que, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ vérifiant $|z| < 1$, on a $\varphi(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$.

c) Montrer que $a_{2k+1} = 0$ pour tout entier $k \geqslant 1$. Calculer a_4.

Les nombres $b_n = n!a_n$ sont appelés nombres de Bernoulli.

II.B – Formule de Taylor

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$, où α est un réel strictement supérieur à 1.

Dans cette question II.B, on fixe un entier naturel non nul p et on note $g = a_0 f + a_1 f' + \cdots + a_{2p-1} f^{(2p-1)}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $R(k) = g(k+1) - g(k) - f'(k)$ de sorte que $g(k+1) - g(k) = f'(k) + R(k)$.

II.B.1) En appliquant à g la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $2p$, montrer qu'il existe un réel A tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $|R(k)| \leqslant Ak^{-(2p+\alpha)}$.

II.B.2) En déduire le développement asymptotique du reste

$$R_n(\alpha) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = -\Big(a_0 f(n) + a_1 f'(n) + a_2 f''(n) + \cdots + a_{2p-2} f^{(2p-2)}(n)\Big) + O\Big(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\Big)$$

On obtient ainsi une valeur approchée de $S(\alpha)$, donnée par

$$\widetilde{S}_{n,2p-2}(\alpha) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha} - \Big(a_0 f(n) + a_1 f'(n) + a_2 f''(n) + \cdots + a_{2p-2} f^{(2p-2)}(n)\Big)$$

II.B.3) Donner le développement asymptotique de $R_n(3)$ correspondant au cas $\alpha = 3$ et $p = 3$.

III Polynômes de Bernoulli et formule sommatoire d'Euler-Maclaurin

On peut calculer, pour $n = 100$: $\widetilde{S}_{100,4}(3) = 1{,}202056903159594277\ldots$ tandis que $S(3)$ vaut $1{,}202056903159594285\ldots$ (constante d'Apéry). La méthode de la partie II semble satisfaisante, mais ne fournit pas d'information précise sur le terme $O\Big(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\Big)$. C'est pourquoi on introduit dans cette partie les polynômes de Bernoulli et la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin.

III.A – Polynômes de Bernoulli

On définit une suite de polynômes $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} = (A_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les conditions suivantes

$$A_0 = 1,\ A'_{n+1} = A_n \text{ et } \int_0^1 A_{n+1}(t)\,dt = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \tag{III.1}$$

Les polynômes $B_n = n!A_n$ sont appelés polynômes de Bernoulli.

III.A.1) Propriétés élémentaires

a) Montrer que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est déterminée de façon unique par les conditions III.1 ; préciser le degré de A_n ; calculer A_1, A_2 et A_3.

b) Montrer que $A_n(t) = (-1)^n A_n(1-t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$.

c) Pour tout entier $n \geqslant 2$, montrer que $A_n(0) = A_n(1)$ et que $A_{2n-1}(0) = 0$.

d) On pose provisoirement $c_n = A_n(0)$ pour tout entier naturel n. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n(X) = c_0 \frac{X^n}{n!} + \cdots + c_{n-2}\frac{X^2}{2!} + c_{n-1}X + c_n$$

puis que, si $n \geqslant 1$,

$$\frac{c_0}{(n+1)!} + \cdots + \frac{c_{n-2}}{3!} + \frac{c_{n-1}}{2!} + c_n = 0$$

e) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a en fait $c_n = a_n$.

III.A.2) Fonction génératrice

a) Montrer que la série $\sum_n A_n(t)z^n$ converge pour tout réel $t \in [-1,1]$ et tout complexe z vérifiant $|z| < 1$.

Sous ces conditions, on pose $f(t,z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} A_n(t)z^n$.

b) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Montrer que la fonction $t \mapsto f(t,z)$ est dérivable sur $[0,1]$ et exprimer sa dérivée en fonction de $f(t,z)$. En déduire que, si $|z| < 1$ et $z \neq 0$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A_n(t)z^n = \frac{ze^{tz}}{e^z - 1}.$$

c) Montrer que, si $z \in \mathbb{C}$ et $|z| < 2\pi$, on a $\dfrac{ze^{z/2}}{e^z-1} + \dfrac{z}{e^z-1} = 2\dfrac{z/2}{e^{z/2}-1}$.

En déduire, pour tout entier naturel n, $A_n\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2^{n-1}} - 1\right)a_n$.

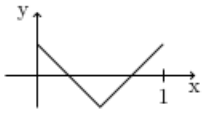
III.A.3) Variations des polynômes de Bernoulli

On établit ici une majoration des polynômes de Bernoulli sur $[0,1]$.

a) Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, les variations des polynômes A_n sur $[0,1]$ correspondent schématiquement aux quatre cas ci-dessous :

$n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$

$n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$



$n \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4)$

$n \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4)$

En d'autres termes, pour $n \geqslant 2$, on a :

1. Si $n \equiv 2 \bmod 4$, alors $A_n(0) = A_n(1) > 0 > A_n(\frac{1}{2})$; de plus, la fonction A_n est strictement décroissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et strictement croissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$.
2. Si $n \equiv 0 \bmod 4$, alors $A_n(0) = A_n(1) < 0 < A_n(\frac{1}{2})$; de plus, la fonction A_n est strictement croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$.
3. Si $n \equiv 1 \bmod 4$, alors $A_n(0) = A_n(\frac{1}{2}) = A_n(1) = 0$; de plus, $A_n < 0$ sur $]0, \frac{1}{2}[$ et $A_n > 0$ sur $]\frac{1}{2}, 1[$.
4. Si $n \equiv 3 \bmod 4$, alors $A_n(0) = A_n(\frac{1}{2}) = A_n(1) = 0$; de plus, $A_n > 0$ sur $]0, \frac{1}{2}[$ et $A_n < 0$ sur $]\frac{1}{2}, 1[$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$, montrer que $|A_{2n}(x)| \leqslant |a_{2n}|$ et $|A_{2n+1}(x)| \leqslant \dfrac{|a_{2n}|}{2}$.

III.B – Formule sommatoire d'Euler-Maclaurin

III.B.1) Soit f une fonction complexe de classe C^∞ sur $[0,1]$.

a) Montrer que pour tout entier $q \geqslant 1$

$$f(1) - f(0) = \sum_{j=1}^{q} (-1)^{j+1} \left[A_j(t) f^{(j)}(t)\right]_0^1 + (-1)^q \int_0^1 A_q(t) f^{(q+1)}(t)\, dt$$

b) En tenant compte des relations trouvées dans la partie précédente, montrer que pour tout entier naturel impair $q = 2p+1$

$$f(1) - f(0) = \frac{1}{2}\left(f'(0) + f'(1)\right) - \sum_{j=1}^{p} a_{2j}\left(f^{(2j)}(1) - f^{(2j)}(0)\right) - \int_0^1 A_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)\, dt$$

III.B.2) Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit f une fonction réelle de classe C^∞ sur $[n, +\infty[$. On suppose que f et toutes ses dérivées sont de signe constant sur $[n, +\infty[$ et tendent vers 0 en $+\infty$.

En appliquant, pour $k \geqslant n$, le résultat précédent à $f_k(t) = f(k+t)$, montrer

$$\sum_{k=n}^{+\infty} f'(k) = -f(n) + \frac{1}{2}f'(n) - \sum_{j=1}^{p} a_{2j} f^{(2j)}(n) + \int_n^{+\infty} A^*_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)\, dt$$

où on a posé $A^*_j(t) = A_j(t - [t])$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Montrer que

$$\left| \int_n^{+\infty} A^*_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t) dt \right| \leqslant \left| \frac{a_{2p}}{2} \right| \left| f^{(2p+1)}(n) \right|$$

III.B.3) Montrer que, dans l'expression de $R_n(\alpha)$ du **II.B.2**, le terme $O\left(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right)$ peut s'écrire sous forme d'une intégrale.

Correction.

Dans tout ce corrigé on notera $D(0,1)$ le disque unité de $\mathbb{C}$, c'est à dire :
$D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \quad \text{tq} \quad |z| < 1\}$. Rappelons en outre que : $\forall z \in D(0,1)$, la série $(\sum z^n)$

converge absolument de somme : $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

I Étude préliminaire

I.A– Convergence des séries de Riemann

I.A.1) $\forall x \in [k, k+1]$; $\forall y \in [k-1, k]$; $f(x) \leq f(k) \leq f(y)$

Alors : $\int_k^{k+1} f(x)dx \leq \int_k^{k+1} f(k)dx = f(k) = \int_{k-1}^{k} f(k)dx \leq \int_{k-1}^{k} f(y)dy$

I.A.2) Pour $\alpha \leq 0$, la série $\left(\sum \frac{1}{n^\alpha}\right)$ diverge grossièrement.
Pour $\alpha > 1$, on applique la question précédente pour $a = 1$, et $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$.
$\forall k \geq 2$, $\frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha}$ et $\forall n \geq 2$; $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = 1 + \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^n \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}$

La suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}\right)_{n\geq 1}$ est croissante majorée, alors elle converge.
Pour $0 < \alpha \leq 1$, on applique aussi la question précédente pour $a = 1$, et $f(t) = \frac{1}{t}$.
$\forall k \geq 1$; $\frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$ et $\forall n \geq 2$; $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \geq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = \ln(n+1) \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$.

Conclusion :
La série de Riemann $\left(\sum \frac{1}{n^\alpha}\right)$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

I.A.3) D'aprés la question précèdente, pour tout $\alpha > 1$, et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}$.

On fait tendre n vers l'infini, on obtient alors : $1 \leq S(\alpha) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}$.

I.B– Première étude asymptotique du reste

Dans la suite on pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\forall \alpha > 1$; $R_n(\alpha) = \sum\limits_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

I.B.1) $\forall k \geq n \geq 2$; $\int_k^{k+1} \frac{dx}{x^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x^\alpha}$

Pour tout entier $N \geq n$; $\int_n^{N+1} \frac{dx}{x^\alpha} \leq \sum\limits_{k=n}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{n-1}^{N} \frac{dx}{x^\alpha}$

$\forall N \geq n \geq 2$; $\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_n^{N+1} \leq \sum\limits_{k=n}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{n-1}^{N}$.
On fait encore tendre N vers l'infini, on obtient : $\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leq R_n(\alpha) \leq \frac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}}$.
D'où $\left|R_n(\alpha) - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}\right| \leq \frac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$
$\left|R_n(\alpha) - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}\right| \leq \frac{-1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}(-(1-\frac{1}{n})^{1-\alpha}+1) = \frac{1}{(\alpha-1)n^\alpha}(\alpha-1+o(1)) = O(\frac{1}{n^\alpha})$

Finalement : $R_n(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + O(\frac{1}{n^\alpha})$.
I.B.2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par $f(x) = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$.
f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{*+}$, alors d'aprés la formule de Taylor avec reste intégral appliqué à f entre k et $(k+1)$ on a :
$\forall k \in \mathbb{N}^*$; $f(k+1) = f(k) + f'(k) + \frac{f''(k)}{2} + \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^2}{2} f'''(t)dt$.
$\forall k \in \mathbb{N}^*$; $f(k+1) - f(k) = \frac{1}{k^\alpha} - \frac{\alpha}{2}\frac{1}{k^{\alpha+1}} + A_k$
$A_k = \int_k^{k+1}(k+1-t)^2 \frac{\alpha(\alpha+1)}{2t^{\alpha+2}}dt$; on a : $0 \leq A_k \leq \frac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}}\int_k^{k+1}(k+1-t)^2dt \leq \frac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}}\int_k^{k+1}dt$
$0 \leq A_k \leq \frac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}}$.

I.B.3) D'aprés **I.B.2**) $\forall k \geq n \geq 1$; $f(k+1) - f(k) = \frac{1}{k^\alpha} - \frac{\alpha}{2}\frac{1}{k^{\alpha+1}} + A_k$ avec $0 \leq A_k \leq \frac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}}$.
$f(k+1) - f(k) - \frac{1}{k^\alpha} + \frac{\alpha}{2}\frac{1}{k^{\alpha+1}} = A_k$. D'où $\forall N \geq n \geq 1$;
$0 \leq f(N+1) - f(n) - \sum\limits_{k=n}^{N}\frac{1}{k^\alpha} + \frac{\alpha}{2}\sum\limits_{k=n}^{N}\frac{1}{k^{\alpha+1}} = \sum\limits_{k=n}^{N} A_k \leq \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\sum\limits_{k=n}^{N}\frac{1}{k^{\alpha+2}}$
On fait tendre N vers l'infini, on obtient alors :
$0 \leq -f(n) - R_n(\alpha) + \frac{\alpha}{2}R_n(\alpha+1) \leq \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}R_n(\alpha+2)$. D'aprés **I.B.1**) on a :
$R_n(\alpha+1) = \frac{1}{\alpha n^\alpha} + O(\frac{1}{n^{\alpha+1}})$ et $R_n(\alpha+2) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha+1)n^{\alpha+1}} = O(\frac{1}{n^{\alpha+1}})$
D'où $-f(n) - R_n(\alpha) + \frac{1}{2n^\alpha} = O(\frac{1}{n^{\alpha+1}})$ c'est à dire : $R_n(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + \frac{1}{2n^\alpha} + O(\frac{1}{n^{\alpha+1}})$

II Formule de Taylor et nombres de Bernoulli

II.A– Nombres de Bernoulli

II.A.1) Soient $p \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle infini de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^∞sur I.
Posons : $g = \sum\limits_{i=0}^{p-1} a_i f^{(i)}$.
$\sum\limits_{j=1}^{p}\frac{g^{(j)}}{j!} = \sum\limits_{j=1}^{p}\frac{1}{j!}\sum\limits_{i=0}^{p-1}a_i f^{(i+j)} = \sum\limits_{k=1}^{2p-1}\left(\sum\limits_{i=0}^{k-1}\frac{a_i}{(k-i)!}\right)f^{(k)}$

$\sum\limits_{j=1}^{p}\frac{g^{(j)}}{j!} = a_0 f' + \sum\limits_{k=2}^{p}\left(\sum\limits_{i=0}^{k-1}\frac{a_i}{(k-i)!}\right)f^{(k)} + \sum\limits_{k=p+1}^{2p-1}\left(\sum\limits_{i=0}^{k-1}\frac{a_i}{(k-i)!}\right)f^{(k)}$.
Soit alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par : $\begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall k \geq 2 ; a_{k-1} = -\sum\limits_{i=0}^{k-2}\frac{a_i}{(k-i)!} \end{cases}$
L'égalité précèdente devient alors : $\sum\limits_{j=1}^{p}\frac{g^{(j)}}{j!} = f' + \sum\limits_{k=p+1}^{2p-1}\left(\sum\limits_{i=0}^{k-1}\frac{a_i}{(k-i)!}\right)f^{(k)}$.
$\sum\limits_{j=1}^{p}\frac{g^{(j)}}{j!} = f' + \sum\limits_{l=1}^{p-1}\left(\sum\limits_{i=0}^{l+p-1}\frac{a_i}{(l+p-i)!}\right)f^{(p+l)}$
On pose alors : $\forall l \in [[1, p-1]]$; $b_{l,p} = \sum\limits_{i=0}^{l+p-1}\frac{a_i}{(l+p-i)!}$.

Ainsi l'existence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est démontrée.

II.A.2) Soit maintenant $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite répondant aux conditions de la question précèdente.

D'aprés la question précédente : $\forall p \in \mathbb{N}^*$; $\forall f \in C^\infty(I,\mathbb{C})$

$$\sum_{j=1}^{p} \frac{g^{(j)}}{j!} = a_0 f\,' + \sum_{k=2}^{p}\left(\sum_{i=0}^{k-1}\frac{a_i}{(k-i)!}\right) f^{(k)} + \sum_{l=1}^{p-1}\left(\sum_{i=0}^{l+p-1}\frac{a_i}{(l+p-i)!}\right) f^{(p+l)} = f\,' + \sum_{l=1}^{p-1} b_{l,p} f^{(p+l)}$$

$$(a_0-1)f\,' + \sum_{k=2}^{p}\left(\sum_{i=0}^{k-1}\frac{a_i}{(k-i)!}\right) f^{(k)} + \sum_{l=1}^{p-1}\left(\left(\sum_{i=0}^{l+p-1}\frac{a_i}{(l+p-i)!}\right) - b_{l,p}\right) f^{(p+l)} = 0$$

Pour $f(x) = x^p$, cet égalité s'écrit :

$p(a_0-1)x^{p-1}\sum_{k=2}^{p}\left(\sum_{i=0}^{k-1}\frac{a_i}{(k-i)!}\right)\frac{p!}{(p-k)!}x^{p-k} = 0.$

C'est un polynôme nul, alors ses coefficients sont nuls, et par suite :

$a_0 = 1$ et $\forall k \geq 2$; $a_{k-1} = -\sum_{j=0}^{k-2}\frac{a_j}{(k-j)!}$ ou encore : en posant : $p = k-1$ et $i = k-j = p+1-j$

$\boxed{a_0 = 1}$ et $\boxed{\forall p \geq 1 \ ; a_p = -\sum_{i=2}^{p+1}\frac{a_{p+1-i}}{i!}}$; $\boxed{a_1 = \frac{-1}{2}}$; $\boxed{a_2 = \frac{1}{12}}$

Montrons par récurence sur p que : $\forall p \in \mathbb{N}$; $|a_p| \leq 1$

ceci est évident pour $p = 0$, soit $p \geq 1$ tel que : $\forall k \in [[0, p-1]]$; $|a_k| \leq 1$.

alors : $\forall i \in [[2, p+1]]$; $|a_{p+1-i}| \leq 1$. D'où : $|a_p| = \left|\sum_{i=2}^{p+1}\frac{a_{p+1-i}}{i!}\right| \leq \sum_{i=2}^{p+1}\frac{1}{i!} \leq e-2 \leq 1$.

II.A.3) a) $\forall p \in \mathbb{N}$; $|a_p| \leq 1$, alors $\forall p \in \mathbb{N}$; $\forall z \in \mathbb{C}$; $|a_p z^p| \leq |z|^p$.

Si $|z| < 1$ alors la série $(\sum |z|^p)$ converge, et par suite la série $\left(\sum_{p\in\mathbb{N}} a_p z^p\right)$ converge aussi absolument. On note alors : $\varphi(z) = \sum_{p\in\mathbb{N}} a_p z^p$.

b) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que : $|z| < 1$, les deux séries : $e^z - 1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ et $\varphi(z) = \sum_{p\in\mathbb{N}} a_p z^p$ sont absolument convergentes, alors $(e^z-1)\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n z^n$ qui est la série produit de Cauchy des deux séries $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ et $\sum_{p\in\mathbb{N}} a_p z^p$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$; $d_{n+1} = \sum_{p=1}^{n+1}\frac{a_{n+1-p}}{p!} = a_n + \sum_{p=2}^{n+1}\frac{a_{n+1-p}}{p!} = 0 \quad et \quad d_1 = a_0 = 1.$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que : $|z| < 1$, $(e^z-1)\varphi(z) = z$ et $\varphi(z) = \frac{z}{e^z-1}$ si $z \neq 0$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que : $|z| < 1$, on pose : $\psi(z) = \varphi(z) - a_1 z = \frac{z}{e^z-1} + \frac{z}{2} = \frac{2z+z(e^z-1)}{2(e^z-1)} = \frac{z+ze^z}{2(e^z-1)}$

$\psi(-z) = \frac{z+ze-^z}{2(1-e-^z)} = \frac{(z+ze-^z)e^z}{2(1-e-^z)e^z} = \psi(z)$.

$\psi(z) = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ est la somme d'une série entière paire sur $D(0,1)$.

D'où : $\forall k \in \mathbb{N}^*$; $a_{2k+1} = 0$.

$a_4 = -\sum_{i=2}^{5}\frac{a_{5-i}}{i!} = -(\frac{a_0}{5!} + \frac{a_1}{4!} + \frac{a_2}{3!} + \frac{a_3}{2!}) = -(\frac{1}{120} - \frac{1}{48} + \frac{1}{72}) = -\frac{6-15+10}{720} = -\frac{1}{720}$.

<u>Définition :</u>

Les nombres $b_n = n!a_n$ sont appelés nombres de Bernoulli.

II.B– Formule de Taylor

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$, où $\alpha > 1$.

On fixe un entier naturel non nul p, et on note : $g = \sum_{i=0}^{2p-1} a_i f^{(i)}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose : $R(k) = g(k+1) - g(k) - f\,'(k)$.

II.B.1) Remarquons d'abord que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, alors g l'est aussi.

Appliquons à g la formule de Taylor avec reste intégral entre k et $(k+1)$à l'ordre $2p$

$$g(k+1) - g(k) = \sum_{i=1}^{2p} \frac{g^{(i)}(k)}{i!} + \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^{2p}}{(2p)!} f^{(2p+1)}(t)dt$$

$$g(k+1) - g(k) = f\,'(k) + \sum_{l=1}^{2p-1} b_{l,2p} f^{(2p+l)}(k) + \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^{2p}}{(2p)!} f^{(2p+1)}(t)dt$$

$$R(k) = \sum_{l=1}^{2p-1} b_{l,2p} f^{(2p+l)}(k) + \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^{2p}}{(2p)!} f^{(2p+1)}(t)dt$$

$$R(k) = \sum_{l=1}^{2p-1} b_{l,2p} \left[\frac{-\alpha(-\alpha-1)...(-\alpha-2p-l+1)}{k^{\alpha+2p+l}}\right] + \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^{2p}}{(2p)!} \frac{-\alpha(-\alpha-1)...(-\alpha-2p)}{t^{\alpha+2p+1}} dt$$

$$|R(k)| \leq \sum_{l=1}^{2p-1} |b_{l,2p}| \left[\frac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+2p+l-1)}{k^{\alpha+2p+l}}\right] + \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^{2p}}{(2p)!} \frac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+2p)}{t^{\alpha+2p+1}} dt$$

$$|R(k)| \leq \sum_{l=1}^{2p-1} |b_{l,2p}| \left[\frac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+2p+l-1)}{k^{\alpha+2p+l}}\right] + \frac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+2p)}{(2p)!} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^{\alpha+2p+1}} dt$$

$$|R(k)| \leq \sum_{l=1}^{2p-1} |b_{l,2p}| \left[\frac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+2p+l-1)}{k^{\alpha+2p+l}}\right] + \frac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+2p)}{(2p)!} \int_k^{k+1} \frac{1}{k^{\alpha+2p+1}} dt$$

$$|R(k)| \leq \frac{1}{k^{\alpha+2p}} \left(\sum_{l=1}^{2p-1} |b_{l,2p}| \left[\frac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+2p+l-1)}{k^{l}}\right] + \frac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+2p)}{(2p)!} \frac{1}{k}\right)$$

$$|R(k)| \leq \frac{1}{k^{\alpha+2p}} \left(\sum_{l=1}^{2p-1} |b_{l,2p}| \left[\alpha(\alpha+1)...(\alpha+2p+l-1)\right] + \frac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+2p)}{(2p)!}\right)$$

D'où pour $A = \left(\sum_{l=1}^{2p-1} |b_{l,2p}| \left[\alpha(\alpha+1)...(\alpha+2p+l-1)\right] + \frac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+2p)}{(2p)!}\right)$;

$\forall k \in \mathbb{N}^*$; $|R(k)| \leq \frac{A}{k^{\alpha+2p}}$.

II.B.2) D'aprés la question précèdente : $\forall k \in \mathbb{N}^*$; $g(k+1) - g(k) = f\,'(k) + R(k)$.

$\forall N \geq n \geq 1$; $\sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^\alpha} + \sum_{k=n}^{N} R(k) = g(N+1) - g(n)$.

On fait tendre N vers l'infini, on obtient : $|R_n(\alpha) + g(n)| \leq AR_n(\alpha+2p) = O(\frac{1}{n^{\alpha+2p-1}})$

D'où : $R_n(\alpha) = -g(n) + O(\frac{1}{n^{\alpha+2p-1}})$. autrement dit :

$R_n(\alpha) = -\sum_{i=0}^{2p-1} a_i f^{(i)}(n) + O(\frac{1}{n^{\alpha+2p-1}})$. or pour $p \geq 2$; $a_{2p-1} = 0$, alors pour $p \geq 2$, on a :

$R_n(\alpha) = -\sum_{i=0}^{2p-2} a_i f^{(i)}(n) + O(\frac{1}{n^{\alpha+2p-1}})$. or on a déjà établit cet égalité dans la première partie

pour $p = 1$, d'où pour tout entier non nul p on a :

$$R_n(\alpha) = -\sum_{i=0}^{2p-2} a_i f^{(i)}(n) + O(\frac{1}{n^{\alpha+2p-1}})$$

II.B.3) $R_n(3) = -a_0 f(n) - a_1 f\,'(n) - a_2 f\,''(n) - a_3 f\,'''(n) - a_4 f^{(4)}(n) + O(\frac{1}{n^8})$.
$f(n) = \frac{-1}{2n^2}$; $f\,'(n) = \frac{1}{n^3}$; $f\,''(n) = \frac{-3}{n^4}$; $f\,'''(n) = \frac{12}{n^5}$; $f^{(4)}(n) = \frac{-60}{n^6}$
$a_0 = 1$; $a_1 = \frac{-1}{2}$; $a_2 = \frac{1}{12}$; $a_3 = 0$; $a_4 = \frac{-1}{720}$.
$\boxed{R_n(3) = \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^3} + \frac{3}{12n^4} - \frac{1}{12n^6} + O(\frac{1}{n^8})}$

III Polynômes de Bernoulli et formule sommatoire d'Euler-Maclaurin

III.A– Polynômes de Bernoulli

On définit une suite de polynômes $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :
$A_0 = 1$; $\forall n \in \mathbb{N}$; $A'_{n+1} = A_n$ et $\int_0^1 A_{n+1}(t)dt = 0$.

Les polynômes $B_n = n!A_n$ s'appellent les polynômes de Bernoulli.

III.A.1) Propriétés élémentaires

a) A_0 est uniquement déterminé et $\deg(A_0) = 0$, $A_1 = X + \lambda$ et $\int_0^1 (t+\lambda)dt = 0 = \frac{1}{2} + \lambda$
Alors $A_1 = X - \frac{1}{2}$ est bien déterminé et $\deg(A_1) = 1$.
Soit $n \geq 1$ tel que : $\forall k \in [[0, n]]$; A_k existe et unique et $\deg(A_k) = k$.
Alors A_{n+1} est un polynôme de degré $(n+1)$.
$A_{n+1}(X) = A_{n+1}(0) + \int_0^X A_n(t)dt$ et $\int_0^1 A_{n+1}(t)dt = 0 = A_{n+1}(0) + \int_0^1 \left(\int_0^x A_n(t)dt\right) dx$
$A_{n+1}(X) = \int_0^X A_n(t)dt - \int_0^1 \left(\int_0^x A_n(t)dt\right) dx$ est donc un polynôme uniquement déterminé.
$A_2 = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + \mu$ et $\int_0^1 (\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \mu)dt = 0 = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \mu$, alors $\mu = \frac{1}{12}$.
$A_2 = \frac{1}{6}X^3 - \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{12}X + \nu$ et $\int_0^1 (\frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{12}t + \nu)dt = 0 = \frac{1}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \nu$, alors $\nu = 0$.

$\boxed{A_0 = 1}$; $\boxed{A_1 = X - \frac{1}{2}}$; $\boxed{A_2 = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{12}}$; $\boxed{A_3 = \frac{1}{6}X^3 - \frac{1}{4}X^4 + \frac{1}{12}X}$
b) Posons : $\forall n \in \mathbb{N}$; $\alpha_n(X) = (-1)^n A_n(1-X)$.
$(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de polynômes telle que :
$\alpha_0 = 1$; $\forall n \in \mathbb{N}$; $\alpha'_{n+1} = \alpha_n$ et $\int_0^1 \alpha_{n+1}(t)dt = \int_0^1 A_{n+1}(u)du = 0$. (poser : $u = 1 - t$)
Alors par unicité de l'existence de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ établit à la question précèdente, on déduit

que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $A_n = \alpha_n$ c'est à dire : $\forall n \in \mathbb{N}$; $A_n(X) = (-1)^n A_n(1-X)$.
c) $\forall n \geq 2$; $A_n(1) - A_n(0) = \int_0^1 A_{n-1}(t)dt = 0$.
D'aprés la question précèdente on a : $A_{2n-1}(0) = (-1)^{2n-1} A_{2n-1}(1) = -A_{2n-1}(0)$. ($2n - 1 \geq 2$)

D'où : $\forall n \geq 2$; $A_n(1) = A_n(0)$ et $A_{2n-1}(0) = 0$.
d) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$; $c_n = A_n(0)$. $c_0 = 1 = A_0(0) = A_0(X)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que : $A_n(X) = \sum_{i=0}^{n} c_i \frac{X^{n-i}}{(n-i)!}$, alors : $A_{n+1}(X) = \sum_{i=0}^{n} c_i \frac{X^{n+1-i}}{(n+1-i)!} + A_{n+1}(0) = \sum_{i=0}^{n+1} c_i \frac{X^{n+1-i}}{(n+1-i)!}$

D'aprés la question précèdente : $\forall n \geq 1$; $A_{n+1}(1) - A_{n+1}(0) = 0 = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{c_i}{(n+1-i)!}$.

e) D'aprés la formule ci dessus : $c_0 = 1$ et $\forall n \geq 1$; $c_n = -\sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{c_i}{(n+1-i)!} = -\sum\limits_{i=2}^{n+1} \frac{c_{n+1-i}}{i!}$.

Alors d'aprés la question **II.A.2**), $\forall n \in \mathbb{N}$; $a_n = c_n$.

III.A.2) Fonction génératrice

a) $\forall t \in [-1,1]$; $\forall n \in \mathbb{N}$; $|A_n(t)| = \left|\sum\limits_{i=0}^{n} a_i \frac{t^{n-i}}{(n-i)!}\right| \leq \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{|a_i|}{(n-i)!} \leq \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{1}{(n-i)!}$ (selon **II.A.2**))

$\forall z \in D(0,1)$; $\forall t \in [-1,1]$; $\forall n \in \mathbb{N}$; $|A_n(t)|\,|z|^n \leq e\,|z|^n$

D'où la série $(\sum A_n(t) z^n)$ converge absolument pour tout $t \in [-1,1]$ et tout $z \in D(0,1)$.

On posera alors : $f(t,z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n(t) z^n$.

b) Fixons $z \in D(0,1)$ et posons : $\forall t \in [0,1]$; $f_z(t) = f(t,z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n(t) z^n$.

D'aprés la question précèdente, cette série converge normalement sur $[0,1]$.

$\forall n \in \mathbb{N}$; posons : $g_n(t) = A_n(t) z^n$; g_n est une fonction polynôme donc de classe C^1 sur $[0,1]$, et $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $g_n'(t) = A_n'(t) z^n = z g_{n-1}(t)$, alors la série $(\sum g_n'(t))$ est aussi normalement convergente pour $t \in [0,1]$. D'où ; f_z définit une application de classe C^1 sur $[0,1]$ et

$\forall t \in [0,1]$; ${f_z}'(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} z g_{n-1}(t) = z f_z(t)$.

Alors il existe une constante complexe δ_z telle que : $\forall t \in [0,1]$; $f_z(t) = \delta_z e^{tz}$

$\forall t \in [0,1]$; $f_z(0) = \delta_z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n(0) z^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{z}{e^z - 1}$ si $z \neq 0$ (d'aprés : **II.A.3**)**b**)

Finalement : $\boxed{\forall t \in [0,1] \ ; \ \forall z \in D(0,1)\backslash\{0\} \ ; \ \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n(t) z^n = \frac{z e^{tz}}{e^z - 1}}$.

c) Soit $z \in \mathbb{C}^*$ tel que : $|z| < 2\pi$. $\frac{z e^{z/2} + z}{e^z - 1} = \frac{z(e^{z/2}+1)}{\left(e^{z/2}\right)^2 - 1} = \frac{z}{e^{z/2} - 1} = 2\frac{z/2}{e^{z/2} - 1}$.

Alors pour tout $z \in D(0,1)\backslash\{0\}$;

$f_z(\frac{1}{2}) + f_z(0) = 2 f_{z/2}(0) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(A_n(\frac{1}{2}) + A_n(0)\right) z^n = 2\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n(0) \left(\frac{z}{2}\right)^n$.

Alors par identification des deux séries entières qui sont de rayon de convergence non nul, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}$; $A_n(\frac{1}{2}) + a_n = 2\frac{a_n}{2^n}$. D'où : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ ; \ A_n(\frac{1}{2}) = \left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right) a_n}$.

III.A.3) Variations des polynômes de Bernoulli

a) (i) $A_2 = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{12}$; $A_2'(x) = x - \frac{1}{2}$; A_2 est strictement décroissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et strictement croissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$. $A_2(0) = A_2(1) = \frac{1}{12} > 0 > A_2(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}a_2 = \frac{-1}{24}$.

(ii) Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que : $\forall k \in [[2, 4n+2]]$; A_k satisfait les conditions données à l'énoncé.

A_{4n+2} est strictement décroissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et strictement croissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$.

$A_{4n+2}(0) = A_{4n+2}(1) > 0 > A_{4n+2}(\frac{1}{2})$.

Il existe un unique couple de réels (u,v) tel que : $0 < u < \frac{1}{2} < v < 1$ et $A_{4n+2}(u) = A_{4n+2}(v) = 0$.

et donc $A_{4n+2}(t) > 0$ sur $]0,u[$; $A_{4n+2}(t) < 0$ sur $]u,v[$; $A_{4n+2}(t) > 0$ sur $]v,1[$

$\forall t \in [0,1]$; $A_{4n+3}'(t) = A_{4n+2}(t)$

A_{4n+3} est strictement croissante sur $[0,u]$ et sur $[v,1]$, et strictement décroissante sur $[u,v]$.

D'aprés : **III.A.1**)**c**) $A_{4n+3}(0) = A_{4n+3}(1) = 0 = a_{4n+3}$ donc d'aprés la question précèdente :

On déduit : $A_{4n+3}(0) = A_{4n+3}(1) = A_{4n+3}(\frac{1}{2}) = 0$.

Les variations ci dessus de A_{4n+3} permettent alors de déduire que :
$A_{4n+3}(t) < 0$ si $t \in]\frac{1}{2}, 1[$ et $A_{4n+3}(t) > 0$ si $t \in]0, \frac{1}{2}[$.
(iii) On refait le même procédé en exploitant les variations de A_{4n+3} établits ci dessus et le faite que $A_{4n+3} = A'_{4n+4}$ pour établir les propriétés relatives à A_{4n+4}.
et ensuite celle de A_{4n+5} par le même procédé.

Par récurrence sur n, on obtient alors les propriétés énoncées dans le texte de ce problème.

b) D'aprés les propriétés de la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\forall x \in [0,1]$

(i) $|A_{2n}(x)| \leq \max(|A_{2n}(0)|, \left|A_{2n}(\frac{1}{2})\right|) = \max(|a_{2n}|, \left|\left(\frac{1}{2^{2n-1}} - 1\right) a_{2n}\right| = |a_{2n}|$.
(ii) $|A_{2n+1}(x)| = \left|A_{2n+1}(x) - A_{2n+1}(\frac{1}{2})\right| \leq \sup\limits_{y\in[0,1]} \left|A'_{2n+1}(y)\right| \left|x - \frac{1}{2}\right| = \sup\limits_{y\in[0,1]} |A_{2n}(y)| \left|x - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{|a_{2n}|}{2}$.

où l'on a utilisé l'inégalité des accroissements finis et le (i) ci dessus.
III.B– Formule sommatoire d'Euler-Maclaurin
III.B.1) Soit f une fonction de classe C^∞ sur $[0,1]$.
a) Par récurrence sur $q \geq 1$, montrons que :
$\forall q \in \mathbb{N}^*$; $f(1) - f(0) = \sum\limits_{j=1}^{q} (-1)^{j+1} \left[A_j(t) f^{(j)}(t)\right]_0^1 + (-1)^q \int_0^1 A_q(t) f^{(q+1)}(t) dt$.
Pour $q = 1$:
$\int_0^1 A_1(t) f''(t) dt = [A_1(t) f'(t)]_0^1 - \int_0^1 A'_1(t) f'(t) dt = [A_1(t) f'(t)]_0^1 - \int_0^1 f'(t) dt$

$\int_0^1 A_1(t) f''(t) dt = [A_1(t) f'(t)]_0^1 - (f(1) - f(0))$
La propriété est établit pour $q = 1$.
Soit $q \in \mathbb{N}^*$ tel que : $f(1) - f(0) = \sum\limits_{j=1}^{q} (-1)^{j+1} \left[A_j(t) f^{(j)}(t)\right]_0^1 + (-1)^q \int_0^1 A_q(t) f^{(q+1)}(t) dt$.

Par intégration par parties on a :
$\int_0^1 A_q(t) f^{(q+1)}(t) dt = \left[A_{q+1}(t) f^{(q+1)}(t)\right]_0^1 - \int_0^1 A_{q+1}(t) f^{(q+2)}(t) dt$. remplaçons dans l'égalité ci dessus on obtient :
$f(1) - f(0) = \sum\limits_{j=1}^{q+1} (-1)^{j+1} \left[A_j(t) f^{(j)}(t)\right]_0^1 + (-1)^{q+1} \int_0^1 A_{q+1}(t) f^{(q+2)}(t) dt$.

b) On applique la question précèdente pour $q = 2p + 1$.
$f(1) - f(0) = \sum\limits_{j=1}^{2p+1} (-1)^{j+1} \left[A_j(t) f^{(j)}(t)\right]_0^1 - \int_0^1 A_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t) dt$.
$f(1) - f(0) = \sum\limits_{j=1}^{2p+1} (-1)^{j+1} \left(A_j(1) f^{(j)}(1) - A_j(0) f^{(j)}(0)\right) - \int_0^1 A_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t) dt$.
$f(1) - f(0) = \frac{1}{2}(f'(0) + f'(1)) + \sum\limits_{j=2}^{2p+1} (-1)^{j+1} \left(A_j(1) f^{(j)}(1) - A_j(0) f^{(j)}(0)\right) - \int_0^1 A_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t) dt$.
Donc en utilisant **III.A.1)c**)

$$f(1) - f(0) = \frac{1}{2}(f'(0) + f'(1)) - \sum_{j=1}^{p} a_{2j} \left(f^{(2j)}(1) - f^{(2j)}(0)\right) - \int_0^1 A_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t) dt.$$

III.B.2) Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction de classe C^∞ sur $[n, +\infty[$.
On suppose que f et toutes ses dérivées sont de signe constant sur $[n, +\infty[$ et tendent

vers 0 en $+\infty$.
Pour tout $k \geq n$, on pose : $f_k(t) = f(k+t)$.
f_k est C^∞ sur $[0,1]$, alors d'aprés la question précèdente : $\forall p \in \mathbb{N}^*$ on a :
$f_k(1) - f_k(0) = \frac{1}{2}(f_k'(0) + f_k'(1)) - \sum\limits_{j=1}^{p} a_{2j}\left(f_k^{(2j)}(1) - f_k^{(2j)}(0)\right) - \int_0^1 A_{2p+1}(t) f_k^{(2p+2)}(t)dt.$
$f(k+1) - f(k) = \frac{1}{2}(f'(k) + f'(k+1)) - \sum\limits_{j=1}^{p} a_{2j}\left(f^{(2j)}(k+1) - f^{(2j)}(k)\right) - \int_0^1 A_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(k+t)dt.$
Alors selon le changement de variable : $u = k+t$, on obtient :
$f(k+1) - f(k) = \frac{1}{2}(f'(k) + f'(k+1)) - \sum\limits_{j=1}^{p} a_{2j}\left(f^{(2j)}(k+1) - f^{(2j)}(k)\right) - \int_k^{k+1} A_{2p+1}(u-k) f^{(2p+2)}(u)du$
$f(k+1) - f(k) = \frac{1}{2}(f'(k) + f'(k+1)) - \sum\limits_{j=1}^{p} a_{2j}\left(f^{(2j)}(k+1) - f^{(2j)}(k)\right) - \int_k^{k+1} A^*_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)dt.$

Soit $N \geq n$, et sommons l'expression précèdente entre n et N.
$f(N+1) - f(n) = \sum\limits_{k=n}^{N} f'(k) - \frac{1}{2}f'(n) + \frac{1}{2}f'(N+1) - \sum\limits_{j=1}^{p} a_{2j}\left(f^{(2j)}(N+1) - f^{(2j)}(n)\right) - \int_n^{N+1} A^*_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)dt$
$\forall j \in \mathbb{N}$; $f^{(j)}$ garde un signe constant sur $[n, +\infty[$ et tend vers 0 en $+\infty$, alors $\forall j \in \mathbb{N}^*$
$f^{(j)}$ est intégrable sur $[n, +\infty[$, de plus, d'aprés **III.A.3)b)** et **II.A.2)** ; $\forall x \in [0,1]$; $|A_{2p+1}(x)| \leq 1$
Alors : $\forall t \in [n, +\infty[$; $\left|A^*_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)\right| \leq \left|f^{(2p+2)}(t)\right|$.
L'application $[t \longmapsto A^*_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)]$ est donc continue par morceaux intégrable sur $[n, +\infty[$.
D'où $\lim\limits_{N\to\infty} \int_n^{N+1} A^*_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)dt$ existe bien et par conséquent $\lim\limits_{N\to\infty}\left(\sum\limits_{k=n}^{N} f'(k)\right)$ existe aussi.
On fait alors tendre N vers l'infini dans l'égalité ci dessus on obtient :
$\sum\limits_{k=n}^{\infty} f'(k) = -f(n) + \frac{1}{2}f'(n) - \sum\limits_{j=1}^{p} a_{2j} f^{(2j)}(n) + \int_n^{+\infty} A^*_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)dt.$
En utilisant **III.A.3)b)** On a : $\left|\int_n^{+\infty} A^*_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)dt\right| \leq \int_n^{+\infty} \frac{|a_{2p}|}{2}\left|f^{(2p+2)}(t)\right| dt$

Puisque $f^{(2p+2)}$ garde un signe constant sur $[n, +\infty[$, alors :
$\int_n^{+\infty}\left|f^{(2p+2)}(t)\right| dt = \left|\int_n^{+\infty} f^{(2p+2)}(t)dt\right| = \left|f^{(2p+1)}(n)\right|$. D'où $\left|\int_n^{+\infty} A^*_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)dt\right| \leq \frac{|a_{2p}|}{2}\left|f^{(2p+1)}(n)\right|$.
III.B.2) On a vu dans **II.B.2)** que : $R_n(\alpha) = -\sum\limits_{i=0}^{2p-2} a_i f^{(i)}(n) + O(\frac{1}{n^{\alpha+2p-1}})$
$R_n(\alpha) = -f(n) + \frac{1}{2}f'(n) - \sum\limits_{i=2}^{2p-2} a_i f^{(i)}(n) + O(\frac{1}{n^{\alpha+2p-1}}).$
Alors selon la question : **II.A.3)c)** et pour $f(t) = \frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}}$ qui définit bien une application de classe C^∞ sur $[n, +\infty[$ qui satisfait bien les conditions de **II.A.2)**, l'égalité précèdente s'écrit :
$\sum\limits_{k=n}^{\infty} f'(k) = -f(n) + \frac{1}{2}f'(n) - \sum\limits_{j=1}^{p-1} a_{2j} f^{(2j)}(n) + O(\frac{1}{n^{\alpha+2p-1}}).$

Identifions avec l'égalité de la question précèdente, le terme $O(\frac{1}{n^{\alpha+2p-1}})$ s'écrit sous forme :

d'une intégrale, qui est : $\int_n^{+\infty} A^*_{2p-1}(t)f^{(2p)}(t)dt$. On écrit alors :
$R_n(\alpha) = -f(n) + \frac{1}{2}f\,'(n) - \sum\limits_{j=1}^{p-1} a_{2j}f^{(2j)}(n) + \int_n^{+\infty} A^*_{2p-1}(t)f^{(2p)}(t)dt.$

IV Compléments sur l'erreur

On fixe ici un réel $\alpha > 1$ et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$.

IV.A– Encadrement de l'erreur

IV.A.1) Soit g une fonction continue par morceaux croissante sur $[0,1]$.
$\int_0^1 A_n(t)g(t)dt = \int_0^{1/2} A_n(t)g(t)dt + \int_{1/2}^1 A_n(t)g(t)dt$. On change la deuxième intégrale par le changement de variable : $u = 1-t$, on obtient :
$\int_0^1 A_n(t)g(t)dt = \int_0^{1/2} A_n(t)g(t)dt + \int_0^{1/2} A_n(1-t)g(1-t)dt$. et d'aprés **III.A.1)b)**
$\int_0^1 A_n(t)g(t)dt = \int_0^{1/2} A_n(t)(g(t) + (-1)^n g(1-t))dt$
Alors pour n impair, ceci s'écrit : $\int_0^1 A_n(t)g(t)dt = \int_0^{1/2} A_n(t)(g(t) - g(1-t))dt$.
g est croissante, alors : $\forall t \in [0, \frac{1}{2}]$; $(g(t) - g(1-t)) \leq 0$.
Si $n \equiv 1$ (mod 4) alors : $\forall t \in [0, \frac{1}{2}]$; $A_n(t) \leq 0$, d'où : $\int_0^1 A_n(t)g(t)dt \geq 0$.

Si $n \equiv 3$ (mod 4) alors : $\forall t \in [0, \frac{1}{2}]$; $A_n(t) \geq 0$, d'où : $\int_0^1 A_n(t)g(t)dt \leq 0$.
IV.A.2) On reprend les notations de **II.B.2**) et le résultat du **III.B.2**)
$R_n(\alpha) = -f(n) + \frac{1}{2}f\,'(n) - \sum\limits_{j=1}^{p-1} a_{2j}f^{(2j)}(n) + \int_n^{+\infty} A^*_{2p-1}(t)f^{(2p)}(t)dt.$
$R_n(\alpha) = \widetilde{S}_{n,2p-2}(\alpha) - \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha} + \int_n^{+\infty} A^*_{2p-1}(t)f^{(2p)}(t)dt.$
$S(\alpha) = \widetilde{S}_{n,2p-2}(\alpha) + \int_n^{+\infty} A^*_{2p-1}(t)f^{(2p)}(t)dt.$
Remlaçons successivement dans cet égalité p par $(2p+1)$, $(2p+2)$, et $2p$. On obtient :
(i) $S(\alpha) = \widetilde{S}_{n,4p}(\alpha) + \int_n^{+\infty} A^*_{4p+1}(t)f^{(4p+2)}(t)dt.$
(ii) $S(\alpha) = \widetilde{S}_{n,4p+2}(\alpha) + \int_n^{+\infty} A^*_{4p+3}(t)f^{(4p+4)}(t)dt.$
(iii) $S(\alpha) = \widetilde{S}_{n,4p-2}(\alpha) + \int_n^{+\infty} A^*_{4p-1}(t)f^{(4p)}(t)dt.$
Examinons le cas (i). $\int_n^{+\infty} A^*_{4p+1}(t)f^{(4p+2)}(t)dt = \sum\limits_{k=n}^{\infty} \int_k^{k+1} A^*_{4p+1}(t)f^{(4p+2)}(t)dt$
$\int_n^{+\infty} A^*_{4p+1}(t)f^{(4p+2)}(t)dt = \sum\limits_{k=n}^{\infty} \int_k^{k+1} A_{4p+1}(t-k)f^{(4p+2)}(t)dt = \sum\limits_{k=n}^{\infty} \int_0^1 A_{4p+1}(u)f^{(4p+2)}(u+k)dt.$
L'application : $[u \longmapsto f^{(4p+2)}(u+k)]$ est continue croissante sur $[0,1]$, alors d'aprés la question précèdente : $\int_0^1 A_{4p+1}(u)f^{(4p+2)}(u+k)dt \geq 0$ et par conséquent : $\int_n^{+\infty} A^*_{4p+1}(t)f^{(4p+2)}(t)dt \geq 0$
D'où $\widetilde{S}_{n,4p}(\alpha) \leq S(\alpha)$.
De la même manière on a : $\int_n^{+\infty} A^*_{4p+3}(t)f^{(4p+4)}(t)dt \leq 0$ et $\int_n^{+\infty} A^*_{4p-1}(t)f^{(4p)}(t)dt \leq 0$.
D'où les inégalités : $\widetilde{S}_{n,4p}(\alpha) \leq S(\alpha) \leq \widetilde{S}_{n,4p+2}(\alpha)$ et $\widetilde{S}_{n,4p}(\alpha) \leq S(\alpha) \leq \widetilde{S}_{n,4p-2}(\alpha)$.

Soit maintenant $p \geq 1$. On va utiliser ces deux inégalités dans les deux cas suivants :
Premier cas : Si p est pair ; $p = 2q$
$0 \leq S(\alpha) - \widetilde{S}_{n,2p}(\alpha) = S(\alpha) - \widetilde{S}_{n,4q}(\alpha) \leq \widetilde{S}_{n,4q+2}(\alpha) - \widetilde{S}_{n,4q}(\alpha) = -a_{4q+2}f^{(4q+2)}(n) = -a_{2p+2}f^{(2p+2)}(n)$.

D'où $\left|S(\alpha) - \widetilde{S}_{n,2p}(\alpha)\right| \leq \left|a_{2p+2}f^{(2p+2)}(n)\right|$.

Deuxième cas : Si p est impair ; $p = 2q - 1$
$0 \leq \widetilde{S}_{n,2p}(\alpha) - S(\alpha) = \widetilde{S}_{n,4q-2}(\alpha) - S(\alpha) \leq \widetilde{S}_{n,4q-2}(\alpha) - \widetilde{S}_{n,4q}(\alpha) = a_{4q} f^{(4q)}(n) = a_{2p+2} f^{(2p+2)}(n)$.

D'où $\left|S(\alpha) - \widetilde{S}_{n,2p}(\alpha)\right| \leq \left|a_{2p+2} f^{(2p+2)}(n)\right|$.
IV.A.3) Dans cette question on reprend le cas de **II.B.3**), on applique la question précèdente, on obtient : $\left|S(3) - \widetilde{S}_{100,4}(3)\right| \leq \left|a_6 f^{(6)}(100)\right| = \frac{1}{720.42}\left|f^{(6)}(100)\right|$.
$f(x) = \frac{-1}{2x^2}$; $f\,'(x) = \frac{1}{x^3}$; $f\,''(x) = \frac{-3}{x^4}$; $f^{(3)}(x) = \frac{12}{x^5}$; $f^{(4)}(x) = \frac{-60}{x^6}$; $f^{(5)}(x) = \frac{360}{x^7}$; $f^{(6)}(x) = \frac{-360.7}{x^8}$.
$f^{(6)}(100) = -360.7.10^{-16}$, alors $\left|S(3) - \widetilde{S}_{100,4}(3)\right| \leq \frac{360.7.10^{-16}}{720.42} = \frac{1}{12}10^{-16} \leq 10^{-17}$.

IV.B– Séries de Fourier
Pour tout entier naturel $p \geq 1$ et tout réel x, on pose : $\widetilde{A}_p(x) = A_p(\frac{x}{2\pi} - \left[\frac{x}{2\pi}\right])$.
IV.B.1) A_p est continue sur $\mathbb{R}$ et l'application $[x \longmapsto \frac{x}{2\pi} - \left[\frac{x}{2\pi}\right]]$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors $\widetilde{A}_p$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
$\widetilde{A}_p(x + 2\pi) = A_p(\frac{x+2\pi}{2\pi} - \left[\frac{x+2\pi}{2\pi}\right]) = A_p(\frac{x}{2\pi} + 1 - \left[\frac{x}{2\pi} + 1\right]) = \widetilde{A}_p(x)$.

IV.B.2) $\widehat{A}_p(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \widetilde{A}_p(t)e^{-int}dt$.
$\forall t \in [0, 2\pi[$; $\left[\frac{t}{2\pi}\right] = 0$ et $\widetilde{A}_p(t) = A_p(\frac{t}{2\pi})$ et $\widehat{A}_p(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A_p(\frac{t}{2\pi})e^{-int}dt$. On pose : $x = \frac{t}{2\pi}$.
$\widehat{A}_p(n) = \int_0^1 A_p(x)e^{-2i\pi nx}dx$. Fixons $n \in \mathbb{Z}^*$et posons : $h(x) = \frac{e^{-2i\pi nx}}{(-2i\pi n)^{p+1}}$. h est C^∞ sur $[0, 1]$ et on a :
$\widehat{A}_p(n) = \int_0^1 A_p(x)h^{(p+1)}(x)dx$. Appliquons maintenant la question **III.B.1**).
$\widehat{A}_p(n) = (-1)^p(h(1) - h(0)) - (-1)^p \sum_{j=1}^{q} (-1)^{j+1}\left[A_j(t)h^{(j)}(t)\right]_0^1$

Vu que h est ses dérivées successives sont 1-périodiques et que d'aprés **III.A.1**)**c**)
pour tout $j \geq 2$, $A_j(1) = A_j(0)$.
$\widehat{A}_p(n) = (-1)^{p+1}(A_1(1)h'(1) - A_1(0)h'(0)) = (-1)^{p+1}h'(0) = \frac{(-1)^{p+1}}{(-2i\pi n)^p} = \frac{-1}{(2i\pi n)^p}$.
$\widehat{A}_p(0) = \int_0^1 A_p(x)dx = 0$.

IV.B.3) La série de Fourier de $\widetilde{A}_p$ est donnée par : $\widetilde{S}_p(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{e^{inx}}{(2i\pi n)^{p+1}}$.
$p + 1 > 1$,alors la série de Fourier de $\widetilde{A}_p$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

IV.B.4) $a_{2p} = A_{2p}(0)$, $\widetilde{A}_{2p}$ est 2π-périodique de classe C^1 par morceaux, alors d'aprés le théorème de Dirichlet : $\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{-1}{(2i\pi n)^{2p}} = \frac{\widetilde{A}_{2p}(+0)+\widetilde{A}_{2p}(-0)}{2}$.
Pour $x > 0$, x proche de 0, $\widetilde{A}_{2p}(x) = A_{2p}(\frac{x}{2\pi})$.
Pour $x < 0$, x proche de 0, $\widetilde{A}_{2p}(x) = A_{2p}(\frac{x}{2\pi} + 1)$.
Alors : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2(-1)^p}{(2\pi n)^{2p}} = \frac{A_{2p}(0)+A_{2p}(1)}{2} = A_{2p}(0)$. (D'aprés la question **III.A.1**)**b**))

Finalement : $a_{2p} = A_{2p}(0) = (-1)^{p+1}\frac{S(2p)}{2^{2p-1}\pi^{2p}}$.
IV.C– Comportement de l'erreur
IV.C.1) Il suffit de dériver l'expression : $f(x) = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$ $2p$ fois et ensuite $(2p + 2)$ fois et

utiliser l'égalité de **IV.B.4**) pour obtenir le résultat : $\left|\frac{a_{2p+2}f^{(2p+2)}(n)}{a_{2p}f^{(2p)}(n)}\right| = \frac{(\alpha+2p)(\alpha+2p-1)S(2p+2)}{4n^2\pi^2 S(2p)}$.
IV.C.2) Ici on va examiner deux résultats, celui de **IV.A.2**) et celui de **IV.C.1**).
$\left|S(\alpha) - \widetilde{S}_{n,2p}(\alpha)\right| \leq \left|a_{2p+2}f^{(2p+2)}(n)\right|$ et $\left|\frac{a_{2p+2}f^{(2p+2)}(n)}{a_{2p}f^{(2p)}(n)}\right| = \frac{(\alpha+2p)(\alpha+2p-1)S(2p+2)}{4n^2\pi^2 S(2p)}$.
$S(2p) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}} = 1 + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$. La série $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$ converge normalement pour $p \in [1, +\infty[$, alors
$\lim\limits_{p\to+\infty} \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \lim\limits_{p\to+\infty} \frac{1}{n^{2p}} = 0$ et $\lim\limits_{p\to+\infty} S(2p) = 1$.
Alors à n fixé : $\lim\limits_{p\to+\infty} \left|\frac{a_{2p+2}f^{(2p+2)}(n)}{a_{2p}f^{(2p)}(n)}\right| = \lim\limits_{p\to+\infty} \frac{(\alpha+2p)(\alpha+2p-1)S(2p+2)}{4n^2\pi^2 S(2p)} = +\infty$.
Pour n fixé, plus que p est grand, plus que l'approximation de $S(\alpha)$ par $\widetilde{S}_{n,2p}(\alpha)$ est mauvaise.
Étant donné que $\frac{S(2p+2)}{S(2p)} < 1$, ne choisir que des couples d'entiers tels que :
$\varepsilon_n = \frac{(\alpha+2p)(\alpha+2p-1)}{4n^2\pi^2} \left|f^{(2p)}(n)\right|$ est suffisament petit, comme ça on aura :
$\left|S(\alpha) - \widetilde{S}_{n,2p}(\alpha)\right| \leq \left|a_{2p+2}f^{(2p+2)}(n)\right| \leq \left|a_{2p}f^{(2p)}(n)\right| \frac{(\alpha+2p)(\alpha+2p-1)S(2p+2)}{4n^2\pi^2 S(2p)} \leq \varepsilon_n$
ce qui permet d'avoir de bonnes approximations de $S(\alpha)$ par $\widetilde{S}_{n,2p}(\alpha)$.