Corrigé du devoir surveillé n°8

1. CCinP

Problème 1. *CCinP 2018*

ESTIMATIONS NUMERIQUES D'INTEGRALES

Objectifs

Le fil conducteur de ce sujet est le calcul approché d'intégrales.

La partie 1 est indépendante des autres parties. A travers l'exemple de l'intégrale de Gauss, on utilise des suites de fonctions et on "permute limite et intégrale".

Les parties 2 et 3 peuvent être traitées de manière indépendante. La partie 4 utilise des résultats des parties 2 et 3.

Les parties 2,3 et 4 traitent de l'utilisation de polynômes interpolateurs pour le calcul approché d'intégrales : on présente le principe des méthodes de quadrature, dite de Newton-Cotes, ainsi qu'un raffinement avec la méthode de quadrature de Gauss.

Le sujet comporte aussi quelques questions notées *Informatique* portant sur le programme "informatique pour tous". Les algorithmes demandés doivent être écrits en langage Python.

Notations

— Si f est une fonction réelle bornée sur $[a, b]$ avec $a < b$, on pose

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

— On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On pourra confondre les expressions "polynômes" et "fonctions polynomiales".

1 "Permutation limite-intégrale" et intégrales de Gauss

On considère l'intégrale de Gauss

$$I = \int_0^1 e^{-x^2}\, dx$$

1.1 Utilisation d'une série entière

Q.1. Démontrer à l'aide d'une série entière que

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}$$

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!}$$

Q.2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on

$$|I - s_n| \leq \frac{1}{(2n+3)(n+1)!}$$

Q.3. *Informatique* : écrire une fonction récursive `factorielle` qui prend en argument un entier n et renvoie l'entier $n!$.

Q.4. *Informatique* : en déduire un script qui détermine un entier N tel que $|I - s_N| \leq 10^{-6}$.

1.2 Utilisation d'une autre suite de fonctions

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $[0, +\infty[$ la fonction f_n par :

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n$$

Q.5. Déterminer, en détaillant, la limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Q.6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $\forall x \in [0,1],\ |f_n(x)| \leq e^{-x^2}$. En déduire que

$$I = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n^k(2k+1)}$$

2 Notion de polynôme interpolateur

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On se donne $n+1$ points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ dans $[a,b]$, deux à deux distincts.
On appelle polynome interpolateur de f aux points x_i, un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ qui coïncide avec f aux points x_i, c'est-à-dire tel que pour tout $i \in [\![0,n]\!],\ P(x_i) = f(x_i)$.

2.1 Existence du polynôme interpolateur

Pour tout entier i de $[\![0,n]\!]$, on définit le polynôme l_i de $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$l_i(X) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{X - x_k}{x_i - x_k}$$

On pose :

$$L_n(f) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(X)$$

Q.7. Démontrer que $L_n(f)$ est un polynôme interpolateur de f aux points x_i, puis démontrer l'unicité d'un tel polynôme.

Un tel polynôme est appelé polynôme interpolateur de Lagrange.

2.2 Calcul effectif du polynôme interpolateur de Lagrange

Q.8. *Informatique* : si $y_0, \dots, y_n$ sont des réels, le polynôme $P = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(X)$ est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $P(x_i) = y_i$ pour tout i. Ecrire en langage Python une fonction `lagrange` qui prend en arguments x une liste de points d'interpolations x_i, y une liste d'ordonnées y_i de même longueur que x, a un réel, et qui renvoie la valeur de P en a.
Par exemple, si `x=[-1,0,1]` et `y=[4,0,4]`, on montre que $P = 4X^2$ et donc $P(3) = 36$. Ainsi `lagrange(x,y,3)` renverra 36.

Q.9. *Informatique* : chercher le polynôme interpolateur $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ de f aux points x_i revient aussi à résoudre le système linéaire suivant d'inconnues $a_0, \dots, a_n$:

$$\begin{cases} P(x_0) = f(x_0) \\ \vdots \\ P(x_n) = f(x_n) \end{cases} \iff V \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_)n \end{pmatrix}$$

où V est une matrice carrée de taille $n+1$.
Déterminer la matrice V et indiquer la complexité du calcul en fonction de n, lorsque l'on résout ce système linéaire par la méthode du pivot de Gauss.

2.3 Expression de l'erreur d'interpolation

On suppose, en plus dans cette partie, que f est de classe C^{n+1} sur $[a, b]$. On rappelle que $L_n(f)$ est son unique polynôme interpolateur aux points x_i.
On note $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$ l'ensemble des points d'interpolations et π_σ le polynôme de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ défini par

$$\pi_\sigma = \prod_{i=0}^{n} (X - x_i)$$

On veut démontrer pour tout réel $x \in [a, b]$, la propriété suivante notée $\mathcal{P}_x$:

$$\exists c_x \in]a, b[,\ f(x) - L_n(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} \pi_\sigma(x)$$

Q.10. Résultat préliminaire : soit $p \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que si $\phi\ :\ [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction p-fois dérivable qui s'annule $p+1$ fois, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $\phi^{(p)}(c) = 0$.

Q.11. Justifier que pour tout $x \in \sigma$, la propriété $\mathcal{P}_x$ est vraie.

On fixe x un réel de $[a, b]$ qui n'est pas dans σ. Soit λ un réel. On définit sur $[a, b]$ une application F par

$$F(t) = f(t) - L_n(f)(t) - \lambda \pi_\sigma(t)$$

Q.12. Déterminer un réel λ de sorte que $F(x) = 0$. On choisira alors λ de cette façon.

Q.13. Démontrer que F s'annule $n+2$ fois et en déduire que $\mathcal{P}_x$ est vraie.

Q.14. Justifier que la fonction $f^{(n+1)}$ est bornée sur $[a, b]$ et en déduire un réel positif K indépendant de n tel que

$$\|f - L_n(f)\|_\infty \leq \frac{K^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty$$

Q.15. En déduire que si f est la fonction sinus, la suite $(L_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0, 2\pi]$

Q.16. On définit f sur $[-1,1]$ par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Démontrer à l'aide d'une série entière que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \|f^{(2k)}\|_\infty \geq (2k)!$$

Cette dernière inégalité montre que la quantité $\|f^{(n+1)}\|_\infty$ peut être grande et cela peut empêcher parfois la convergence de la suite de polynômes interpolateurs. Ceci est appelé le phénomène de Runge.

3 Famille de polynômes orthogonaux

On munit $\mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels du produit scalaire $\langle .,. \rangle$ défini par : pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$,

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\ dt$$

On applique le procédé d'orthonomalisation de Gram-Schmidt à la base canonique $(1, X, X^2, \dots)$ de $\mathbb{R}[X]$. On obtient donc une famille orthonormée de polynômes $(P_0, P_1, P_2, \dots)$ vérifiant

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{Vect}(1, X, \dots, X^k) = \mathrm{Vect}(P_0, P_1, \dots, P_k)$$

Le polynôme P_n s'appelle le polynôme de Legendre d'indice n.

Q.17. Calculer P_0 et P_1.

Q.18. Justifier que pour $n \geq 1$, le polynôme P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Démontrer que le polynôme P_n est de degré n.

On prend $n \geq 1$. On veut démontrer que P_n admet n racines simples dans $[-1,1]$.

Q.19. Justifier que $\int_{-1}^{1} P_n(t)\ dt = 0$ et en déduire que P_n admet au moins une racine dans $[-1,1]$.

On suppose par l'absurde que P_n admet strictement moins de n racine simples. Si P_n admet des racines $t_1, \dots, t_p$ de multiplicité impaire avec $p < n$, on pose $Q = (X - t_1)\dots(X - t_p)$; sinon, on pose $Q = 1$. On considère enfin le polynôme $H = QP_n$.

Q.20. Justifier que $\int_{-1}^{1} H(t)\ dt = 0$, puis conclure (on pourra remarquer que H est de signe constant sur $[-1,1]$).

4 Méthodes de quadrature

Dans cette partie, nous allons voir comment les polynôme interpolateurs de Lagrange peuvent être utilisés pour estimer $\int_a^b f(x)\ dx$ pour $f\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ continue.
Pour cela, on choisit d'abord une subdivision $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ de l'intervalle $[a,b]$.
A cause du phénomène de Runge, si N est grand, le polynôme interpolateur de f aux points x_i n'est pas forcément une bonne approximation de f. Approximer $\int_a^b f(t)\ dt$ par $\int_a^b L_N(f)(x)\ dx$ n'est donc pas forcément pertinent…
Nous allons en fait approximer f par un polynôme d'interpolation sur chaque petit intervalle $[x_k, x_{k+1}]$. D'après la relation de Chasles, on a

$$\int_a^b f(x)\ dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\ dx$$

Q.21. Justifier que

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx = \frac{x_{k+1}-x_k}{2}\int_{-1}^{1} g(t)\,dt \quad \text{avec} \quad g(t) = f\left(x_k + (t+1)\frac{x_{k+1}-x_k}{2}\right)$$

On est donc ramenés à estimer $\int_{-1}^{1} g(t)\,dt$ où $g\ :\ [-1,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.
On se donne $n+1$ points $t_0, t_1, \ldots, t_n$ dans $[-1,1]$, deux à deux distincts.
On rappelle que $L_n(g) = \sum_{i=0}^{n} g(t_i) l_i(X)$ est le polynôme interpolateur de g aux points t_i et on pose

$$J(g) = \int_{-1}^{1} L_n(g)(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i g(t_i) \quad \text{avec} \quad \alpha_i = \int_{-1}^{1} l_i(t)\,dt$$

Lorsqu'on approxime $\int_{-1}^{1} g(t)\,dt$ par $J(g)$, c'est-à-dire :

$$\int_{-1}^{1} g(t)\,dt \approx \sum_{i=0}^{n} \alpha_i g(t_i)$$

on dit que J est une méthode de quadrature associée aux points $t_0, \ldots, t_n$ et aux poids $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$.

Q.22. Justifier que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $J(P) = \int_{-1}^{1} P(t)\,dt$.

On dit que la méthode de quadrature J est d'ordre au moins n car la formule approchée est exacte pour les polynômes de dégré inférieur ou égal à n.

Q.23. Exemple : on prend $n = 1$, $t_0 = -1$ et $t_1 = 1$. Déterminer α_0 et α_1. Expliquer à l'aide d'un graphique en prenant g positive pourquoi, dans ce cas, la méthode J s'appelle la "méthode des trapèzes".

Quadrature de Gauss

Dans les deux questions suivantes, on prend pour points d'interpolation $t_0, t_1, \ldots, t_n$ les $(n+1)$ racines du polynôme de Legendre P_{n+1} introduit dans la partie 3.
Nous allons démontrer que, dans ce cas, la formule de quadrature J est d'ordre au moins $2n+1$.
Soit $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$. On fait la division euclidienne de P par P_{n+1}, on note respectivement Q le quotient et R le reste de cette division :

$$P = QP_{n+1} + R$$

Q.24. Démontrer que $J(QP_{n+1}) = \int_{-1}^{1} Q(t)P_{n+1}(t)\,dt$, puis conclure que $J(P) = \int_{-1}^{1} P(t)\,dt$.

Q.25. Démontrer que les poids $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ associés à la quadrature de Gauss sont strictement positifs et calculer leur somme.

Correction.

5 “Permutation limite-intégrale” et intégrales de Gauss

5.1 Utilisation d’une série entière

Q.1. La fonction exp est développable en série entière entière de rayon de convergence infini et

$$\forall t \in \mathbb{R},\ e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$$

En utilisant ceci avec x^2, on en déduit que

$$I = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(k!)}\, dx$$

$f_n\ :\ x \mapsto (-1)^k \frac{x^{2k}}{(k!)}$ est continue sur $[0,1]$ et $\|f_k\|_\infty = \frac{1}{k!}$ est le terme général d’une série convergente. Ainsi, $\sum(f_k)$ converge normalement sur le SEGMENT $[0,1]$. On est dans le cas simple où l’interversion somme-intégrale est licite. Elle donne

$$I = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 x^{2k}\, dx$$

Le calcul de l’intégrale est immédiat et on trouve

$$\boxed{I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}}$$

Q.2. $u_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}$ est le terme général d’une suite alternée, décroissante en module et convergente de limite nulle. La règle spéciale s’applique à la série $\sum(u_k)$. Elle indique que

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right| \leq |u_{n+1}|$$

Ceci s’écrit exactement

$$\boxed{|I - s_n| \leq \frac{1}{(2n+3)(n+1)!}}$$

Q.3.
```
def factorielle(n):
    if n==0: return 1
    else: return (factorielle (n-1))*n
```

Q.4. On calcule les termes u_k définis en question 2 tant le module du terme est inférieur à 10^{-6}.

```
def u(k):
    return (-1)**k/((2*k+1)*factorielle(k))

k=0
while abs(u(k))>10**(-6):
    k=k+1

print(k)
```

5.2 Utilisation d'une autre suite de fonctions

Q.5. Soit $x \geq 0$. $x^2/n \to 0$ quand $n \to +\infty$ et il existe donc un rang n_0 tel que $\forall n \geq n_0,\ 0 \leq \frac{x^2}{n} \leq \frac{1}{2}$. Pour ces n, $1 - \frac{x^2}{n} > 0$ et donc

$$\forall n \geq n_0,\ f_n(x) = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)\right)$$

Le terme dans l'exponentielle équivaut, quand $n \to +\infty$, à $n \times \left(-\frac{x^2}{n}\right) = -x^2$ et tend donc vers $-x^2$. Par continuité de l'exponentielle, on a donc $f_n(x) \to e^{-x^2}$ quand $n \to +\infty$.

$$\boxed{(f_n) \text{ converge simpelment sur } \mathbb{R}^+ \text{ vers } x \mapsto e^{-x^2}}$$

Q.6. Par concavité de la fonction logarithme,

$$\forall u > -1,\ \ln(1+u) \leq u$$

Soit $x \in [0,1]$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. $x^2/n \in [0,1]$. Si $x^2/n \in [0,1[$ alors (croissance de exp et notre inégalité de concavité)

$$f_n(x) = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)\right) \leq e^{-x^2}$$

et le résultat reste vrai si $x^2/n = 1$ ($0 \leq e^{-x^2}$ dans ce cas). Ainsi

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ |f_n(x)| \leq e^{-x^2}}$$

Utilisons alors le théorème de convergence dominée.

- (f_n) est une suite de fonctions continues qui converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction continue sur $[0,1]$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\ |f_n(x)| \leq e^{-x^2}$ et $x \mapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur $[0,1]$ puisque continue sur le SEGMENT.

Le théorème s'applique et donne

$$I = \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n$$

On développe la puissance par formule du binôme et par linéarité du passage à l'intégrale,

$$I = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \int_0^1 \left(-\frac{x^2}{n}\right)^k dx$$

Le calcul de l'intégrale est immédiat et on trouve

$$\boxed{I = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n^k(2k+1)}}$$

6 Notion de polynôme interpolateur

6.1 Existence du polynôme interpolateur

Q.7. x_k est racine de l_i pour $i \neq k$ et $l_i(x_i) = 0$, c'est-à-dire

$$l_i(x_k) = \delta_{i,k}$$

On en déduit que

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ L_n(f)(x_k) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\delta_{i,k} = f(x_k)$$

$L_n(f)$ interpole donc f aux points $x_0, \ldots, x_n$.
Si P est un autre polynôme interpolateur alors $P - L_n(f) \in \mathbb{R}_n[X]$ s'annule aux points $x_0, \ldots, x_n$. C'est un polynôme de degré $\leq n$ ayant au moins $n+1$ racines et c'est donc le polynôme nul.

$$\boxed{L_n(f) \text{ est l'unique polynôme interpolateur de } f \text{ aux points } x_0, \ldots, x_n}$$

6.2 Calcul effectif du polynôme interpolateur de Lagrange

Q.8. Une première fonction `l(i,x,a)` permet le calcul de $l_i(a)$ associé aux x_k.

```
def l(i,x,a):
    r=1
    for k in range(len(x)):
        if k!=i:
            r=r*(a-x[k])/(x[i]-x[k])
    return r
```

Il reste à calculer la somme définissant L_n associé aux y_i.

```
def lagrange(x,y,a):
    s=0
    for i in range(len(x)):
        s=s+l(i,x,a)*y[i]
    return s
```

Q.9. La matrice cherchée est une matrice de Vandermonde :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^n \end{pmatrix}$$

On peut d'ailleurs noter que d'après le cours cette matrice est inversible quand les x_i sont deux à deux distincts ce qui permet de prouver à nouveau l'existence et l'unicité d'un polynôme interpolateur.
Dans la résolution par méthode de Gauss,

- on cherche un pivot sur la colonne 1 que l'on ramène en position 1 (n opérations) et on fait apparaître des zéros par $n-1$ combinaisons de lignes ($O(n^2)$ opérations)

- on procède de même avec les colonnes $2, \dots, n+1$ pour à chaque fois $O(n^2)$ opérations
- on en déduit $x_{n+1}, \dots, x_0$ en $O(1+2+\cdots+(n+1)) = O(n^2)$ opérations.

$$\boxed{\text{La complexité du calcul est } O(n^3)}$$

6.3 Expression de l'erreur d'interpolation

Q.10. Montrons par récurrence (finie) que la propriété : "$\phi^{(k)}$ s'annule $p+1-k$ fois" est vraie pour $k = 0, \dots, p$.

- Le résultat est vrai au rang 0 par hypothèse sur ϕ.
- Soit $k \in [\![0, p-1]\!]$ tel que le résultat soit vrai au rang k. On note $y_1 < \cdots < y_{p+1-k}$ des points d'annulation de $\phi^{(k)}$. Par théorème de Rolle appliqué à $\phi^{(k)}$, $\phi^{(k+1)}$ s'annule sur $]y_i, y_{i+1}[$ pour $i = 1, \dots, p-k$. $\phi^{(k+1)}$ admet donc au moins $p-k$ annulations et lerésultat est vrai au rang $k+1$.

On en déduit en particulier (propriété au rang p) que $\phi^{(p)}$ s'annule. Ce zéro est strictement entre le minimum et le maximum des éléments de σ et donc dans $]a, b[$.

$$\boxed{\text{si } \phi \ : \ [a,b] \to \mathbb{R} \text{ s'annule } p+1 \text{ fois, il existe } c \in]a,b[\text{ tel que } \phi^{(p)}(c) = 0.}$$

Q.11. $f - L_n(f)$ ainsi que π_σ s'annulent en tout point de σ. Pour $x \in \sigma$, $\mathcal{P}_x$ est donc vraie (on peut choisir pour c_x n'importe quel élément de $]a, b[$).

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \sigma, \text{ la propriété } \mathcal{P}_x \text{ est vraie}}$$

Q.12. Comme $x \notin \sigma$, $\pi_\sigma(x) \neq 0$ et on peut donc poser

$$\boxed{\lambda = \frac{f(x) - L_n(f)(x) - F(x)}{\pi_\sigma(x)}}$$

et on a alors $F(x) = 0$.

Q.13. F s'annule (comme $f - L_n(f)$ et π_σ) en tout point de σ et en $x \notin \sigma$. On a donc $n+1$ points d'annulation au moins.

$$\boxed{F \text{ s'annule } n+2 \text{ fois}}$$

On en déduit avec Q.10 que $F^{(n+1)}$ s'annule en un point $c_x \in]a, b[$. Comme $L_n(f) \in \mathbb{R}_n[X]$, sa dérivée $n+1$-ième est nulle. Comme π_σ est unitaire de degré $n+1$, sa dérivée $n+1$-ième est le polynôme constante $(n+1)!$. On en déduit que $\lambda = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}$. Comme $F(x) = 0$, on obtient $\mathcal{P}_x$.

$$\boxed{\forall x \in [a,b], \ \mathcal{P}_x \text{ est vraie}}$$

Q.14. $\boxed{f^{(n+1)} \text{ est continue sur le segment } [a,b] \text{ et donc bornée sur ce segment}}$.
On remarque que

$$\forall x \in [a,b], \ |\pi_\sigma(x)| \leq (b-a)^n$$

Avec la propriété $\mathcal{P}_x$, on en déduit que

$$\boxed{\|f - L_n(f)\|_\infty \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty}$$

Q.15. On imagine ici que l'on se donne une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments deux à deux distincts de $[0, 2\pi]$ et que l'on considère pour chaque n le polynôme $L_n(f)$ associé à $\sigma_n = \{x_0, \dots, x_n\}$. On définit alors une suite de polynômes. Comme sin et toute ses dérivées sont majorées en module par 1 sur $\mathbb{R}$, on en déduit avec la question précédente que

$$\|f - L_n(f)\|_{\infty,[0,2\pi]} \leq \frac{(2\pi)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Par croissances comparées, le majorant est de limite nulle et ainsi

$$\boxed{(L_n(f))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } [0, 2\pi]}$$

Q.16. On sait que

$$\forall x \in]-1, 1[,\ f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k}$$

Quand une fonction est développable en série entière, son développement est nécessairement celui de Taylor. Ainsi

$$\forall k \in \mathbb{N},\ f^{(2k)}(0) = (-1)^k (2k)!$$

On en déduit que $\|f^{(2k)}\|_\infty \geq |f(0)| \geq (2k)!$ (la norme infinie existe puisque f est de classe C^∞ sur le segment $[-1, 1]$).

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \|f^{(2k)}\|_\infty \geq (2k)!}$$

7 Famille de polynômes orthogonaux

Q.17. Comme $\langle 1, 1\rangle = 2$, on a $\boxed{P_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}}$. On calcule alors

$$Q_1 = X - \langle X, P_0\rangle P_0 = X \quad \text{et} \quad \langle X, X\rangle = \frac{2}{3}$$

pour en déduire que $\boxed{P_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} X}$

Q.18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $(P_0, \dots, P_n)$ étant orthonormée, P_n est orthogonal aux P_i avec $i \leq n-1$ et donc à l'espace engendré par ces polynômes, c'est-à-dire $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Par ailleurs $P_n \in \mathrm{Vect}(1, \dots, X^n) = \mathbb{R}_n[X]$ et $P_n \notin \mathrm{Vect}(P_0, \dots, P_{n-1}) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ (car $(P_0, \dots, P_n)$ est libre). Ainsi, P_n est de degré n.

$$\boxed{P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp \text{ et } \deg(P_n) = n}$$

Q.19. Comme $n \geq 1$, $1 \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et donc $\langle P_n, 1\rangle = 0$ i.e. $\boxed{\int_{-1}^{1} P_n(t)\, dt = 0}$.
Si, par l'absurde, P_n n'admettait pas de racine dans $[-1, 1]$ alors (théorème des valeurs intermédiaires avec P_n continu), P_n serait de signe constant sur $[-1, 1]$. Avec la continuité de P_n et $\int_{-1}^{1} P_n(t)\, dt = 0$, ceci entraînerait la nullité de P_n sur $[-1, 1]$. P_n serait alors le polynôme nul (infinité de racine) ce qui est faux.

$$\boxed{P_n \text{ admet au moins une racine dans } [-1, 1]}$$

Q.20. Par choix de Q, H n'admet que des racines de multiplicité paire. Sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ s'écrit alors

$$H = a\prod_{i=1}^{k}(X-\alpha_i)^{2m_i}H_1(X)$$

où H_1 est un produit de polynômes de degré 2, unitaires, à discriminant < 0. H est alors de signe constant (selon le signe du coefficient dominant c).

Par ailleurs, $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ (car $p < n$) et donc $\langle P_n, Q\rangle = 0$, c'est à dire $\boxed{\int_{-1}^{1} H(t)\,dt = 0}$.

Comme ci-dessus (continuité, intégrale nulle, signe constant), ceci entraîne la nullité de H (sur $[-1,1]$ puis comme polynôme) et une absurdité (car ni P_n ni Q n'est nul et $\mathbb{R}[X]$ est intègre).

On peut en fait reprendre le raisonnement en ne considérant que les racines de multiplicité impaire dans $[-1,1]$. On prouve alors par l'absurde qu'il y a n racines de multiplicité impaire dans $[-1,1]$. Comme $\deg(P_n) = n$, les multiplicités valent 1 et on a toute les racines.

$$\boxed{P_n \text{ admet } n \text{ racines simples dans } [-1,1]}$$

8 Méthodes de quadrature

Q.21. Le changement de variable affine (et donc licite) $t = 2\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} - 1$ donne

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f\left(x_k + (t+1)\frac{x_{k+1}-x_k}{2}\right)\frac{x_{k+1}-x_k}{2}\,dt$$

ce qui est la formule demandée.

Q.22. Comme $l_i(x_k) = \delta_{i,k}$, on a $J(l_i) = \alpha_i = \int_{-1}^{1} l_i(t)\,dt$. $P \mapsto \sum_{i=0}^{n}\alpha_i P(t_i) - \int_{-1}^{1} P(t)\,dt$ est linéaire et nulle en $l_0,\dots,l_n$ et donc sur $\mathrm{Vect}(l_0,\dots,l_n) = \mathbb{R}_n[X]$ (tout polynôme P de degré $\leq n$ est combinaison des l_i puisque $P = \sum_{i=0}^{n} P(t_i)l_i$). Ainsi,

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \text{ on a } J(P) = \int_{-1}^{1} P(t)\,dt}$$

Q.23. On a $l_0 = -\frac{1}{2}(X-1)$ et $l_1 = \frac{1}{2}(X+1)$ et donc (calcul d'intégrale élémentaire)

$$\boxed{\alpha_0 = \alpha_1 = 1}$$

$2\alpha_0 g(0)$ est l'aire du rectangle $[-1,1] \times [0, g(-1)]$ et $2\alpha_1 g(1)$ celle du rectangle $[-1,1] \times [0, g(1)]$. La demi-somme de ces quantités est l'aire du trapèze $((-1,0),(-1,1),(1,g(1)),(-1,g(-1)),(-1,0))$. Ceci explique le nom de la méthode.

Quadrature de Gauss

Q.24. On a d'une part (les t_i sont des racines de P_{n+1})

$$J(QP_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n}\alpha_i Q(t_i)P_{n+1}(t_i) = 0$$

D'autre part, comme P est de degré $\leq 2n+1$ et P_{n+1} de degré $n+1$, le quotient Q est de degré $\leq n$ et donc orthogonal à P_{n+1}. Ainsi

$$\int_{-1}^{1} P_{n+1}Q(t)\,dt = 0$$

On a donc

$$\boxed{J(QP_{n+1}) = \int_{-1}^{1} Q(t)P_{n+1}(t)\ dt = 0}$$

Comme J est linéaire, on a aussi $J(P) = J(QP_{n+1}) + J(R)$. De plus $J(R) = \int_{-1}^{1} R(t)\ dt$ car R est de degré $\leq n$. Ainsi

$$J(P) = J(QP_{n+1}) = \int_{-1}^{1} Q(t)P_{n+1}(t)\ dt + \int_{-1}^{1} R(t)\ dt = \int_{-1}^{1} (Q(t)P_{n+1}(t) + R(t))\ dt$$

et donc

$$\boxed{J(P) = \int_{-1}^{1} P(t)\ dt}$$

Q.25. Fixons $i \in [\![0, n]\!]$ et posons $P = \prod_{k \neq i} (X - t_k)^2$. $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ et donc

$$\int_{-1}^{1} P(t)\ dt = J(P) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P(t_k) = \alpha_i P(t_i)$$

Comme P est continue, positive et non nulle sur $[-1, 1]$, son intégrale sur $[-1, 1]$ est > 0. De même $P(t_i) > 0$. Ainsi

$$\boxed{\forall i,\ \alpha_i > 0}$$

On remarque enfin que la somme des α_i vaut $J(1)$ et comme $1 \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$, $J(1) = \int_{-1}^{1} 1\ dt = 2$.

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 2}$$

2. Mines-Ponts

Problème 2. *Mines-Ponts 2019*

Majoration du rayon spectral de la matrice de Hilbert

Soit n un entier ≥ 1. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique. La norme euclidienne associée est notée $\|\cdot\|$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, et on identifiera $\mathbb{R}^n$ à l'ensemble $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes à coefficients réels. On note ${}^tX = (x_0, x_1 \cdots x_{n-1}) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ la matrice ligne transposée de la matrice colonne

$$X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\ .$$

Enfin, on note $\widetilde{X}$ la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par la formule

$$\widetilde{X}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k$$

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés de la *matrice de Hilbert* $H_n = (h_{j,k}^{(n)})_{0\leq j,k\leq n-1} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ définie par

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ & & \ddots & \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}.$$

On a donc $h_{j,k}^{(n)} = \frac{1}{j+k+1}$ pour tous $j, k \in \{0,\ 1, \cdots,\ n-1\}$.

A. Une propriété de Perron-Frobenius

1. Montrer que la matrice H_n est symétrique réelle et définie positive. On pourra s'aider du calcul de l'intégrale $\int_0^1 (\widetilde{X}(t))^2 dt$.
   On note $\mathcal{V}$ le sous-espace propre de H_n associé à la plus grande valeur propre ρ_n de H_n.
2. Montrer que $X \in \mathcal{V}$ si et seulement si ${}^tXH_nX = \rho_n\|X\|^2$
   Soit $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de $\mathcal{V}$. On note $|X_0| = \begin{pmatrix} |x_0| \\ |x_1| \\ \\ |x_{n-1}| \end{pmatrix}$.
3. Établir l'inégalité ${}^tX_{0H_nX_0} \leq^t |X_0|H_n|X_0|$ et en déduire que $|X_0| \in \mathcal{V}$.
4. Montrer que $H_n|X_0|$, puis que X_0, n'a aucune coordonnée nulle.
5. En déduire la dimension du sous-espace propre $\mathcal{V}$.

B. Inégalité de Hilbert

Soit $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et P un polynôme à coefficients réels.

6. En s'aidant du calcul de l'intégrale $\int_0^\pi P(e^{i\theta})e^{i\theta}\mathrm{d}\theta$, montrer l'inégalité $\left|\int_{-1}^1 P(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^\pi |P(e^{i\theta})|\mathrm{d}\theta$, puis l'inégalité ${}^tXH_nX \leq \int_0^\pi |\widetilde{X}(e^{i\theta})|^2\mathrm{d}\theta$.
7. En déduire que ${}^tXH_nX \leq \pi\|X\|^2$
8. Montrer que la suite $(\rho_n)_{n\geq 1}$ est croissante et convergente.

C. Un opérateur intégral

Dans la suite du problème, pour tout entier $n > 0$ et tout réel x, on pose

$$K_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

Soit E l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles, continues et intégrables sur $[0,1[$ et $T_n : \ E \longrightarrow E$ l'application définie par

$$T_n(f)(x) = \int_0^1 K_n(tx) f(t) \mathrm{d}t.$$

9. Montrer que T_n est un endomorphisme de E, dont 0 est valeur propre.
   (On rappelle que $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de T_n s'il existe $f \in E$ non nulle telle que $T_n(f) = \lambda f$.)
10. Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, calculer $T_n(\widetilde{X})$. En déduire que T_n et H_n ont les mêmes valeurs propres non nulles.
    On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions $\varphi \in E$ à valeurs strictement positives sur $]0,1[$ telles que $\frac{1}{\varphi}$ admette un prolongement continu sur $[0,1]$. On rappelle que ρ_n est la plus grande valeur propre de H_n.
11. En utilisant un vecteur propre associé à ρ_n, montrer que

$$\rho_n \leq \inf_{\varphi \in \mathcal{A}} \sup_{x \in]0,1[} \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(tx)\varphi(t) \mathrm{d}t$$

    En utilisant la partie A, montrer que l'on a égalité dans l'inégalité précédente.

D. Une maioration explicite des rayons spectraux

Soit $\varphi \in \mathcal{A}$ et $n \in \mathbb{N}$. Dans la suite du problème, on pose, pour tout $x \in]0,1[$:

$$r_n(x) = \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(tx)\varphi(t) \mathrm{d}t,$$

$$J_n(x) = \int_0^1 \frac{t^n \varphi(t)}{1-tx} \mathrm{d}t,$$

$$\Phi_n(x) = \frac{x^n J_n(x)}{\varphi(x)}.$$

La fonction Gamma d'Euler est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par la formule

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t.$$

On admet, et on pourra utiliser sans démonstration, les formules suivantes :

$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$	pour tout $x > 0$.
$\Gamma(n) = (n-1)!$	pour tout entier $n > 0$.
$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} \mathrm{d}t$	pour tous réels $\alpha > 0, \beta > 0$.

12. Montrer que J_n est dérivable sur $]0,1[$ et que l'on a l'égalité

$$xJ_n'(x) = \int_0^1 \frac{t^n \varphi(t)}{(1-tx)^2} \mathrm{d}t - J_n(x) \ .$$

    On suppose dorénavant que $\varphi \in \mathcal{A}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$ et que $(1-t)\varphi(t) \to 0$ lorsque $t \to 1^-$.

13. Montrer que

$$nJ_n(x) = c + nJ_{n-1}(x) + (x-1)\int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2}\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\mathrm{d}t$$

où c est un coefficient à determiner et où φ' désigne la dérivée de φ. (On pourra traiter à part le cas $n=0$, où l'on considère que $nJ_{n-1}(x)=0$ et où l'on montrera que $c=\varphi(0)$.)

14. Déduire des deux questions précédentes que
$x(1-x)J_n'(x) = c + (n+1)(x-1)J_n(x) + n\int_0^1 t^{n-1}\varphi(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\mathrm{d}t.$

15. Soit $\gamma \in \mathbb{R}$. Résoudre 1'équation différentielle $(1-t)y' = -\gamma y$ sur l'intervalle $[0,1[$. À quelles conditions une solution $y(t)$ de cette équation différentielle vérifie-t-elle les hypothèses faites sur φ ?
On suppose désormais ces conditions réalisées et que la fonction φ est la solution de cette équation différentielle telle que $\varphi(0)=1$.

16. Montrer que la fonction Φ_n est dérivable sur $]0,1[$ et que l'on a :

$$\Phi_n'(x) = -(\gamma+1)\frac{\Phi_n(x)}{x} + c_n\frac{x^{n-1}}{(1-x)^{1+\gamma}}$$

où l'on donnera 1'expression de la constante c_n en fonction de n et de γ.

17. En déduire que pour tout $x \in]0,1[$,

$$\Phi_n(x) = \frac{c_n}{x^{1+\gamma}}\int_0^x \frac{t^{n+\gamma}}{(1-t)^{1+\gamma}}\mathrm{d}t.$$

18. En déduire que pour $n \geq 1$,

$$\rho_n \leq \inf_{\alpha\in]0,1[}\ \sup_{x\in]0,1[} \frac{1}{x^{1-\alpha}}\int_0^x \frac{1-\theta_n t^n}{t^\alpha(1-t)^{1-\alpha}}\mathrm{d}t$$

où l'on a posé $\theta_n = \frac{n!}{(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(n-\alpha)}$.
Un calcul montre, et on l'admet, que l'inégalité précédente implique l'inégalité :

$$\rho_n \leq \inf_{\alpha\in]0,1[} \theta_n^{(1-\alpha)/n}\int_0^{\theta_n^{-1/n}} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(1-t)^{1-\alpha}}.$$

19. En déduire que $\rho_n \leq 2\omega_n \arcsin(\frac{1}{\omega_n})$, où l'on a posé $\omega_n = 2\left(\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right)^{1/2n}$

20. Donner un équivalent de $\omega_n - 1$, puis un équivalent de $\pi - 2\omega_n \arcsin\frac{1}{\omega_n}$ lorsque $n \to +\infty$.

Correction.

A. Une propriété de Perron- Frobenius

1. Rappelons d'abord la formule générale pour une matrice $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

$$^tXAX = (AX|X) = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}x_ix_j.$$

Ici, et en utilisant l'indication, on a

$$^tXH_nX = \sum_{0\leq i,j\leq n-1} x_ix_j \int_0^1 t^{i+j}\mathrm{d}t.$$

Utilisant la linéarité de l'intégrale et reconnaissant un carré, on obtient :

$$^tXH_nX = \int_0^1 \sum_{0\leq i,j\leq n-1} x_ix_jt^{i+j}\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\sum_{i=0}^{n-1} x_it^i\right)^2 \mathrm{d}t.$$

De la formule précédente, on déduit immédiatement que H_n est positive. Démontrons qu'elle est définie positive. En effet, si $^tXH_nX = 0$, alors, puisqu'on intègre une fonction continue et positive sur $[0,1]$ dont l'intégrale doit être nulle, on déduit que

$$\forall t \in [0,1],\ \sum_{i=0}^{n-1} x_it^i = 0.$$

Un polynôme ayant une infinité de racine étant le polynôme nul, on en déduit que tous les x_i sont nuls, soit encore que X est nul. Ainsi, H_n est définie positive.

2. Soit X un vecteur de $\mathscr{V}$. Donc $H_nX = \rho_nX$ puis

$$^tXH_nX = \rho_n{}^tXX = \rho_n\|X\|^2.$$

Réciproquement, H_n étant symétrique à coefficients réels. Le cour indique (théorème spectral) qu'il existe une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice orthogonale P de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$H_n = PD^tP.$$

Notons $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{n-1}$ les valeurs propres de H_n de telle sorte que $D = \mathrm{diag}(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{n-1})$. Soit maintenant X un élément non nul de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $^tXH_nX = \rho_n\|X\|^2$. Posons

$$Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = {}^tPX = P^{-1}X,$$

on a :

$$^tXH_nX = (PY|PD^tPPY) = (Y|DY)$$

et

$$\|X\|^2 = (X|X) = (PY|PY) = (Y|^tPPY) = \|Y\|^2.$$

Or $^tXH_nX = \rho_n\|X\|^2$ donc $^tYD_nY = \rho_n\|Y\|^2$. Ainsi $\sum_{k=0}^{n-1} y_k(\lambda_k y_k) = \rho_n \sum_{k=0}^{n-1} y_k^2$, donc

$$\sum_{k=0}^{n-1}(\rho_n - \lambda_k)y_k^2 = 0 \text{ et } \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ (\rho_n - \lambda_k)y_k^2 \geq 0.$$

Alors $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $(\rho_n - \lambda_k)y_k^2 = 0$, donc $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $(\rho_n - \lambda_k) = 0$ ou $y_k = 0$. Par conséquent, $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $(\rho_n - \lambda_k)y_k = 0$ ce qui donne $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\rho_n y_k = \lambda_k y_k$ et ce qui signifie exactement que $D_nY = \rho_nY$.

Alors $D^tPX = \rho_n{}^tPX$ donc $PD^tPX = \rho_nP^tPX$ ou encore $H_nX = \rho_nX$. Donc X est un vecteur propre de H_n associé à la valeur propre ρ_n.

3. On a :

$$^tX_0H_nX_0 = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} x_ix_j\frac{1}{i+j+1} \leq \left|\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} x_ix_j\frac{1}{i+j+1}\right|$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} |x_i||x_j|\frac{1}{i+j+1} = {}^t|X_0|H_n|X_0|.$$

D'où l'inégalité demandée.

D'autre part, $X_0 \in \mathscr{V}$, donc $^tX_0H_nX_0 = \rho_n\|X_0\|^2$. Comme $|X_0| \in \mathbb{R}^n$, alors $^t|X_0|H_n|X_0| \leq \rho_n\||X_0|\|^2 = \rho_n\|X_0\|^2$. Ainsi $^t|X_0|H_n|X_0| = \rho_n\||X_0|\|^2$. Donc $|X_0|$ est un élément non nul de $\mathbb{R}^n$ tel que $^t|X_0|H_n|X_0| = \rho_n\||X_0|\|^2$. Ainsi $|X_0|$ est un élément de $\mathscr{V}$.

4. Posons $H_n|X_0| = \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \\ \vdots \\ t_{n-1} \end{pmatrix}$. Soit $j \in [\![0, n-1]\!]$, $t_j = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{|x_i|}{i+j+1}$. Or $\forall j \in [\![0, n-1]\!]$, $\frac{|x_i|}{i+j+1} > 0$ et il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $|x_k| > 0$, donc $t_j = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{|x_i|}{i+j+1} > 0$. Les composantes de $H_n|X_0|$ sont strictement positives.

On a $H_n|X_0| = \rho_n|X_0|$ donc les composantes de $\rho_n|X_0|$ sont strictement positives. comme $\rho_n > 0$ et les composantes de $|X_0|$ sont strictement positives, alors X_0 n'a aucune composante nulle.

5. On a $^tX_0H_nX_0 =^t |X_0|H_n|X_0|$. Donc $\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}(|x_i||x_j| - x_ix_j)\frac{1}{i+j+1} = 0$, ainsi $\forall i, j \in [\![0, n-1]\!]$, $|x_i||x_j| = x_ix_j$. Alors $\forall i, j \in [\![0, n-1]\!]$, $x_ix_j > 0$, en particulier $x_ix_0 > 0$. Donc les composantes de X_0 sont toutes de même signe.

Maintenant, posons $p = \dim \mathscr{V}$ et supposons $p \geq 2$. $\mathscr{V}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, donc $\mathscr{V}$ possède une base orthonormée $(X_1, X_2, ..., X_p)$.

Si $p \geq 2$, alors X_1 et X_2 sont deux vecteurs non nuls et orthogonaux. Posons $X_1 = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$, les a_i (resp. les b_i) sont non nuls et de même signe. Ainsi $a_0b_0, a_1b_1, ..., a_{n-1}b_{n-1}$ sont non nuls et de même signe. Alors nécessairement $\sum_{i=0}^{n-1} a_ib_i = (X_1|X_2)$ n'est pas nulle donc X_1 et X_2 ne sont pas orthogonaux ce qui est absurde donc $p \leq 1$. Or $\mathscr{V}$ est un sous-espace propre donc $\dim \mathscr{V} = p = 1$.

B. Inégalité de Hilbert

6. Posons $P(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k$, avec $a_i \in \mathbb{R}$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$. Donc $P(e^{i\theta})e^{i\theta} = \sum_{k=0}^{d} a_k e^{i(k+1)\theta}$.
D'une part, on a :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} P(x)\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{d} a_k \int_{-1}^{1} x^k \mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=0}^{d} a_k \left[\frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1}\right] \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \int_{0}^{\pi} P(e^{i\theta})e^{i\theta}\mathrm{d}\theta &= \sum_{k=0}^{d} a_k \int_{0}^{\pi} e^{i(k+1)\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \sum_{k=0}^{d} a_k \left[\frac{e^{i(k+1)\theta}}{i(k+1)}\right]_0^{\pi} \\ &= \sum_{k=0}^{d} a_k \left[\frac{e^{i(k+1)\pi}-1}{i(k+1)}\right] \\ &= -i\sum_{i=0}^{d} a_k \left[\frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1}\right] \\ &= -i\int_{-1}^{1} P(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

D'où :

$$\left|\int_{-1}^{1} P(x)\mathrm{d}x\right| = \left|i\int_{0}^{\pi} P(e^{i\theta})e^{i\theta}\mathrm{d}\theta\right| \leq \int_{0}^{\pi} |P(e^{i\theta})e^{i\theta}|\mathrm{d}\theta = \int_{0}^{\pi} |P(e^{i\theta})|\mathrm{d}\theta.$$

On a ${}^tXH_nX = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{x_ix_j}{i+j+1} = \int_0^1 \left[\widetilde{X}(t)\right]^2 \mathrm{d}t$

Il est clair que $\int_0^1 \left[\widetilde{X}(x)\right]^2 \mathrm{d}x \leq \int_{-1}^1 \left[\widetilde{X}(x)\right]^2 \mathrm{d}x$ puisque $[0,1] \subset [-1,1]$ et la fonction sous signe intégral est positive. D'autre part, on a :

$$\int_{-1}^1 \left[\widetilde{X}(x)\right]^2 \mathrm{d}x \leq \int_0^\pi |\widetilde{X}(e^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta.$$

D'où

$${}^tXH_nX \leq \int_0^\pi |\widetilde{X}(e^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta.$$

7. L'application $\theta \mapsto \widetilde{X}(e^{i\theta})\widetilde{X}(e^{-i\theta})$ étant paire, donc $\int_0^\pi \widetilde{X}(e^{i\theta})\widetilde{X}(e^{-i\theta})\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi X(e^{i\theta})\widetilde{X}(e^{-i\theta}$
Ainsi

$${}^tXH_nX \leq \frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi \widetilde{X}(e^{i\theta})\widetilde{X}(e^{-i\theta})\mathrm{d}\theta.$$

On a $\widetilde{X}(x)^2 = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n x_k x_l x^{k+l}$ et donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi \widetilde{X}(e^{i\theta})\widetilde{X}(e^{-i\theta})\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n x_k x_l \int_{-\pi}^\pi e^{i(k-l)}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n x_k x_l \delta_{k,l} 2\pi \\
&= \pi \sum_{k=0}^n x_k^2 = \pi\|X\|^2
\end{aligned}$$

où $\delta_{k,l}$ est le symbole de Kronecker. D'où l'inégalité demandée :

$${}^tXH_nX \leq \pi\|X\|^2.$$

8. Soit $X' = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$ avec $x_n = 0$, $X' \in \mathbb{R}^{n+1}$ et vérifie :

$${}^tX'H_{n+1}X' = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \frac{x_i x_j}{i+j+1} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x_i x_j}{i+j+1} = {}^tXH_nX.$$

Comme ${}^tXH_nX \leq \rho_n\|X\|^2$ et ${}^tX'H_{n+1}X' \leq \rho_{n+1}\|X'\|^2 = \rho_{n+1}\|X\|^2$ et $\|X\| \neq 0$, alors $\rho_n \leq \rho_{n+1}$. Ainsi la suite $(\rho_n)_{n\geq 1}$ est croissante. De plus d'après la question **7.**, la suite ρ_n est majorée par π, donc on peut conclure que la suite $(\rho_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

C. Opérateur intégral

9. Soit $f \in E$. Pour tout $x \in [0,1[$ et tout $t \in [0,1[$, $|K_n(tx)f(t)| \leq n|f(t)|$ et f est intégrable sur $[0,1[$, donc il est de même de la fonction $t \mapsto K_n(xt)f(t)$, donc l'application $T_n(f)$ est bien défini sur $[0,1[$.

De plus, pour tout $k \in [0,1]$, $|t^k f(t)| \leq |f(t)|$, donc on pet écrire :

$$\forall f \in E, \forall x \in [0,1[, \;\; T_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k \int_0^1 t^k f(t)\mathrm{d}t.$$

Ceci montre que T_n prend ses valeurs dans l'espace des fonctions polynomiales de degré inférieurs ou égal à $n-1$, qui est inclus dans E. L'application T_n est évidement linéaire, ainsi T_n défini un endomrphisme de E.

L'opérateur T_n ne peut pas être injective, sinon E serait isomorphe à un sous-espace de l'espace des fonctions polynomiales de degré inférieurs ou égal à $n-1$, ce qui est impossible puisque E est de dimension infinie, ainsi il existe $f \in E$, non nulle, telle que $T_n(f) = 0$, autrement 0 est une valeur propre de T_n.

10. Soit $X \in \mathbb{R}^n$, on a, pour tout $x \in [0,1[$:

$$T_n(\widetilde{X})(x) = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (tx)^k \sum_{j=0}^{n-1} x_j t^j \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{x_j x^k}{j+k+1},$$

qui s'écrit, matriciellement, sous la forme :

$$T_n(\widetilde{X})(x) = (1, x, ..., x^{n-1}) H_n \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}.$$

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de H_n(non nulle), donc il existe $X \in \mathbb{R}^n$, vecteur non nul, tel que $H_n(X) = \lambda X$, ainsi pour tout $x \in [0,1[$, on a :

$$T_n(\widetilde{X})(x) = (1, x, ..., x^{n-1}) H_n X = \lambda (1, x, ..., x^{n-1}) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \lambda \sum_{k=0}^{n-1} x_k x^k = \lambda \widetilde{X}(x).$$

Ceci montre que λ est une valeur propre de T_n, car $\widetilde{X}$ est une fonction non nulle.

• Soit maintenant λ une valeur propre non nulle de T_n, donc il existe $f \in E$ vecteur non nul tel que $\forall x \in [0,1[, \;\; T_n(f)(x) = \lambda f(x)$ et donc $f(x) = T_n\left(\frac{f}{\lambda}\right)(x)$, comme T_n prend ses valeurs dans l'espace des fonctions polynomiales de degré inférieurs ou égal à $n-1$, alors f est une fonction polynomiale de degré inférieurs ou égal à $n-1$, posons donc $f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^k$ et $X = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$. X est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$, car la fonction f est

non nulle et on a :

$$\forall x \in [0,1[,\ \ T_n(f)(x) = T_n(\widetilde{X})(x) = (1, x, ..., x^{n-1})H_nX = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_k x^j}{j+k+1}.$$

Donc la condition $T_n(f) = \lambda f$ est équivalent à :

$$\forall x \in [0,1[,\ \ \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_k x^j}{j+k+1} = \lambda \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j$$

ou encore

$$\forall x \in [0,1[,\ \ \sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{j+k+1} - \lambda a_j\right) x^j = 0.$$

Le polynôme $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{j+k+1} - \lambda a_j\right) Y^j$ de l'indéterminée Y admet donc une infinité de racines, donc il est nul, c'est-à-dire $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{j+k+1} = \lambda a_j = 0$ ou encore

$$H_n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Ainsi λ est une valeur propre de H_n.
En conclusion T_n et H_n ont les mêmes valeurs propres non nulles.

11. Soit g un vecteur propre de T_n non nul associé à ρ_n. D'après ce qui précède g est une fonction polynomiale, donc elle est continue sur $[0,1]$. En écrivant l'équation de la valeur propre pour g et en divisant par $\varphi \in \mathscr{A}$, on obtient :

$$\forall x \in [0,1[,\ \ \rho_n\left(\frac{g}{\varphi}\right)(x) = \int_0^1 \frac{K_n(xt)\varphi(t)}{\varphi(x)}\left(\frac{g}{\varphi}\right)(t)\mathrm{d}t.$$

Cela montre que $\dfrac{g}{\varphi} \in \mathscr{C}[0,1]$ est une fonction propre de l'opérateur linéaire S_n défini sur $\mathscr{C}[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1[,\ \ S_n(f)(x) = \int_0^1 K_{n,\varphi}(x,t)f(t)\mathrm{d}t,$$

où $K_{n,\varphi}(x,t) = \dfrac{K_n(xt)\varphi(t)}{\varphi(x)}$. La question **4.** montre que les coefficients de g sont de même signe, donc g ne s'annule pas sur $[0,1[$, et en multipliant par -1, on peut supposer g à valeurs strictement positives sur $[0,1[$ et même sur $[0,1]$. En particulier $g \in \mathscr{A}$. De plus, $K_{n,\varphi}(x,t) \geq 0$.
D'autre part, soit λ une valeur propre de S_n(le spectre $\mathrm{Sp}(S_n)$ des valeurs propres de S_n est non vide, car il contient ρ_n), donc il existe $f \in \mathscr{C}[0,1]$, non nul tel que

$$\forall x \in [0,1],\ \ \lambda f(x) = \int_0^1 K_{n,\varphi}(x,t)f(t)\mathrm{d}t.$$

Donc $|\lambda||f(x)| \leq \|f\|_\infty \displaystyle\int_0^1 K_{n,\varphi}(x,t)\mathrm{d}t$, avec $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in]0,1[} |f(x)|$. Ainsi

$$|\lambda| \leq \sup_{x\in]0,1[} \int_0^1 K_{n,\varphi}(x,t)\mathrm{d}t = \sup_{x\in]0,1[} \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

Par conséquent,

$$\sup_{\lambda\in \mathrm{Sp}(S_n)} |\lambda| \leq \sup_{x\in]0,1[} \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)\mathrm{d}t,$$

et donc

$$\rho_n \leq \sup_{x\in]0,1[} \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)\mathrm{d}t \quad (1)$$

L'inégalité (1) est valable pour tout $\varphi \in \mathscr{A}$, d'où

$$\rho_n \leq \inf_{\varphi\in\mathscr{A}} \sup_{x\in[0,1[} \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)\mathrm{d}t \quad (2)$$

Comme $\forall x \in [0,1[, \quad \rho_n = \dfrac{1}{g(x)} \displaystyle\int_0^1 K_n(tx)g(t)\mathrm{d}t$ et $g \in \mathscr{A}$, alors l'inégalité (2) est une égalité.

D. Une majoration explicite des rayons spectraux

12. Posons, pour $x \in]0,1[$ et $t \in [0,1[$, $h(x,t) = \dfrac{t^n\varphi(t)}{1-tx}$. La fonction h admet une dérivée partielle par rapport à x qui vaut :

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \frac{t^{n+1}\varphi(t)}{(1-tx)^2}.$$

De plus, pour $x \in]0,a]$ avec $0 < a < 1$, on a : $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leq \dfrac{t^{n+1}|\varphi(t)|}{(1-ta)^2}$, cette dernière fonction, indépendante de x, est intégrable sur $[0,1[$ puisque $t \mapsto \dfrac{t^{n+1}}{(1-ta)^2}$ est majorée sur $[0,1[$, donc par théorème de dérivation des fonctions définies par des intégrales, la fonction J_n est dérivables sur $]0,1[$ et on a :

$$\forall x \in]0,1[, \quad J_n(x) = \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^{n+1}\varphi(t)}{(1-tx)^2}\mathrm{d}t.$$

D'autre part, si $x \in]0,1[$, on obtient :

$$xJ_n(x) = \int_0^1 \frac{xt^{n+1}\varphi(t)}{(1-tx)^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{(1+tx-1)t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{1-tx}\mathrm{d}t - J_n(x).$$

13. • Cas : $n = 0$: On a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\mathrm{d}t &= \left[\frac{(1-t)\varphi(t)}{1-tx}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{(1-t)}{1-tx}\right)\varphi(t)\mathrm{d}t \\
&= -\varphi(0) - \int_0^1 \frac{(x-1)}{(1-tx)^2}\varphi(t)\mathrm{d}t \\
&= -\varphi(0) - (x-1)\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{(1-tx)^2}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Donc $0 = \varphi(0) + (x-1)\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{(1-tx)^2}\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{(1-t)\varphi'(t)}{(1-tx)^2}\mathrm{d}t$, dans ce cas $c = \varphi(0)$.

• Cas $n \geq 1$: On a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^n(1-t)\varphi(t)}{1-tx}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t^n(1-t)}{1-tx}\right)\varphi(t)\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^1 \frac{(nt^{n-1} - (n+1)t^n)(1-tx) + xt^n(1-t)}{(1-tx)^2}\varphi(t)\mathrm{d}t \\
&= -n\int_0^1 \frac{t^{n-1}\varphi(t)}{1-tx}\mathrm{d}t + (n+1)\int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{1-tx}\mathrm{d}t - x\int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2}\mathrm{d}t \\
&\quad + \int_0^1 \frac{(xt)t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2}\mathrm{d}t \\
&= -nJ_{n-1}(x) + (n+1)J_n(x) - (x-1)\int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2}\mathrm{d}t - J_n(x)
\end{aligned}$$

D'où :

$$nJ_n(x) = nJ_{n-1}(x) + (x-1)\int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2}\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\mathrm{d}t$$

Donc, si $n \geq 1$, $c = 0$.

14. On a :

$$\begin{aligned}
x(1-x)J_n'(x) &= (1-x)\int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2}\mathrm{d}t - (1-x)J_n(x) \\
&= (x-1)J_n(x) + c_n + nJ_{n-1}(x) + \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\mathrm{d}t - nJ_n(x) \\
&= c + (x-n-1)J_n(x) + n\int_0^1 \frac{t^{n-1}\varphi'(t)}{1-tx}\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\mathrm{d}t \\
&= c + (x-n-1)J_n(x) + n\int_0^1 \frac{t^{n-1}(1-tx+tx)\varphi(t)}{1-tx}\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\mathrm{d} \\
&= c + (x-n-1+nx)J_n(x) + n\int_0^1 t^{n-1}\varphi(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\mathrm{d}t \\
&= c + (x-1)(n+1)J_n(x) + n\int_0^1 t^{n-1}\varphi(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

15. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, la solution générale est de la forme $y(t) = K(1-t)^\gamma$. On a les propriétés suivantes :

— y est continue sur $[0,1[$ quel que soit la valeur de γ,
— y est strictement positive sur $[0,1[$ si, et seulement si, $K>0$,
— $\dfrac{1}{y}$ se prolonge par continuité sur $[0,1]$ si, et seulement si, $\gamma<0$,
— y est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1[$ quel que soit la valeur de γ,
— $\lim\limits_{t\to 1^-}(1-t)y(t)=K\lim\limits_{t\to 1^-}(1-t)^{\gamma+1}=0$ si, et seulement si, $\gamma+1>0$.

Donc y vérifie les conditions faites sur φ si, et seulement si, $K>0$ et $\gamma\in]-1,0[$.

16. Soit $x\in]0,1[$, on a :

$$\begin{aligned}
\Phi'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1-x)^{-\gamma}x^n\right)J_n(x)+(1-x)^{-\gamma}x^nJ_n(x)'(x)\\
&= \left(\frac{\gamma}{1-x}+\frac{n}{x}\right)(1-x)^{-\gamma}x^nJ_n(x)\\
&\quad +(1-x)^{-\gamma-1}x^{n-1}\left(c+(x-1)(n+1)J_n(x)+n\int_0^1 t^{n-1}\varphi(t)\mathrm{d}t+\int_0^1\frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\right.\\
&= \left(\frac{\gamma}{1-x}+\frac{n}{x}\right)\Phi_n(x)+\frac{cx^{n-1}}{(1-x)^{\gamma}}-\frac{n+1}{x}\Phi_n(x)\\
&\quad +\frac{x^{n-1}}{(1-x)^{\gamma+1}}\left(n\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{\gamma}\mathrm{d}t-\gamma J_n(x)\right)\\
&= -(\gamma+1)\frac{\Phi_n(x)}{x}+c_n\frac{x^{n-1}}{(1-x)^{1+\gamma}}
\end{aligned}$$

où $c_n=c+n\displaystyle\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{\gamma}\mathrm{d}t=c+n\frac{\Gamma(n)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(n+\gamma+1)}=c+\frac{n!}{(n+\gamma)(n+\gamma-1)...(\gamma+1)}$.

17. La solution de l'équation homogène est de la forme $y(x)=\dfrac{K}{x^{\gamma+1}}$. La méthode de la variation de la constante, donc une solution de la forme :

$$t\mapsto\lambda+c_n\int_0^x\frac{t^{n+\gamma}}{(1-t)^{1+\gamma}}\mathrm{d}t$$

et comme $\Phi_n(0)=0$, alors

$$\forall x\in]0,1[,\quad \Phi_n(x)=\frac{c_n}{x^{1+\gamma}}\int_0^x\frac{t^{n+\gamma}}{(1-t)^{1+\gamma}}\mathrm{d}t.$$

18. Pour tout $x\in]0,1[$, on a :

$$\begin{aligned}
r_n(x) &= \frac{1}{\varphi(x)}\int_0^1\sum_{k=0}^{n-1}(tx)^k\varphi(t)\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{\varphi(x)}\int_0^1\frac{1-(tx)^n}{1-tx}\varphi(t)\mathrm{d}t,\quad tx\neq 1\\
&= \frac{1}{\varphi(x)}\int_0^1\frac{\varphi(x)}{1-tx}\mathrm{d}t-\frac{x^n}{\varphi(x)}\int_0^1\frac{t^n\varphi(x)}{1-tx}\mathrm{d}t\\
&= \frac{x^0J_0(x)}{\varphi(x)}-\frac{x^nJ_n(x)}{\varphi(x)}\\
&= \Phi_0(x)-\Phi_n(x).
\end{aligned}$$

Donc $r_n(x) = \frac{c_0}{x^{1+\gamma}} \int_0^x \frac{t^\gamma}{(1-t)^{1+\gamma}} \mathrm{d}t - \frac{c_n}{x^{1+\gamma}} \int_0^x \frac{t^{n+\gamma}}{(1-t)^{1+\gamma}} \mathrm{d}t$. $c_0 = \varphi(0) = 1$ et si $n \geq 1$,

$$c_n = \frac{n!}{(n+\gamma)(n+\gamma-1)...(\gamma+1)} = \theta_n.$$

Ainsi,

$$r_n(x) = \frac{}{x^{1+\gamma}} \int_0^x \frac{t^\gamma}{(1-t)^{1+\gamma}} \mathrm{d}t - \frac{c_n}{x^{1+\gamma}} \int_0^x \frac{t^\gamma}{(1-t)^{1+\gamma}} \mathrm{d}t = \frac{1}{x^{1-\alpha}} \int_0^x \frac{1-\theta_n t^n}{t^\alpha (1-t)^{1-\alpha}} \mathrm{d}t.$$

Quand α décrit l'intervalle $]0,1[$, la fonction φ décrit $\mathscr{A}$, donc on peut conclure que :

$$\rho_n \leq \inf_{\alpha \in]0,1[} \sup_{x \in]0,1[} r_n(x) = \inf_{\alpha \in]0,1[} \sup_{x \in]0,1[} \frac{1}{x^{1-\alpha}} \int_0^x \frac{1-\theta_n t^n}{t^\alpha (1-t)^{1-\alpha}} \mathrm{d}t.$$

19. De la question précédente on peut déduire, en particulier pour $\alpha = \frac{1}{2}$, que

$$\rho_n \leq \theta_n^{\frac{1-\frac{1}{2}}{n}} \int_0^{\theta_n^{\frac{-1}{n}}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-1)}}.$$

La fonction $t \mapsto -2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-t}{t}}\right) = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{t}{1-t}}\right) - \pi = 2\arcsin\sqrt{t} - \pi$ est une primitive de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$, donc :

$$\theta_n^{\frac{1-\frac{1}{2}}{n}} \int_0^{\theta_n^{\frac{-1}{n}}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-1)}} = \theta_n^{\frac{1}{2n}} \left(2\arcsin \theta_n^{\frac{-1}{2n}}\right) = 2w_n \arcsin\left(\frac{1}{w_n}\right).$$

Ainsi,

$$\rho_n \leq 2w_n \arcsin\left(\frac{1}{w_n}\right).$$

20. Utilisons la formule de Stirling $n! \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$, pour trouver un équivalent de w_n :

$$w_n = 2\left(\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right)^{\frac{1}{2n}} \underset{+\infty}{\sim} 2\frac{\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\right)^{\frac{1}{n}}}{\left(\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4\pi n}\right)^{\frac{1}{2n}}} = 2\frac{\frac{n}{e} \sqrt[2n]{2\pi} n^{\frac{1}{n}}}{\frac{2n}{e} \sqrt[4n]{4\pi} n^{\frac{1}{2n}}} \underset{+\infty}{\sim} n^{\frac{1}{4n}}.$$

D'où, $n(w_n - 1) \underset{+\infty}{\sim} n\left(n^{\frac{1}{4n}} - 1\right) = n\left(e^{\frac{\ln(n)}{4n}} - 1\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{4}$ et donc :

$$w_n - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{4n},$$

ce qui implique immédiatement

$$\pi - 2w_n \arcsin\left(\frac{1}{w_n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \pi - 2n^{\frac{1}{4n}} \frac{\pi}{2} = \pi\left(1 - e^{\frac{\ln(n)}{4n}}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\pi \ln(n)}{4n}.$$

Donc $\lim_{n\to\infty} \pi - 2w_n \arcsin\left(\frac{1}{w_n}\right) = 0$ et $\pi - 2w_n \arcsin\left(\frac{1}{w_n}\right) \leq 0$ pour n assez grand. D'après la partie **B**, la question **7.**, $\forall n \geq 0, \quad \rho_n \leq \pi$, par conséquent, et pour n assez grand,

$$0 \leq \pi - \rho_n \leq 2w_n \arcsin\left(\frac{1}{w_n}\right) - \pi.$$

Ainsi,

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n = \pi.$$