CONCOURS COMMUN INP

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES 2

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Concours Blanc MP 2026 : CCinP

Les calculatrices sont interdites.

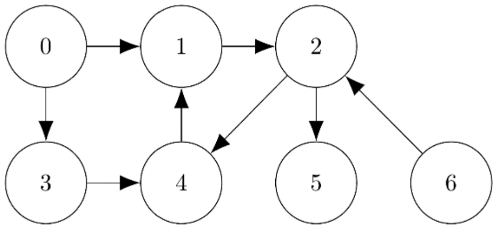
Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous indépendants.

EXERCICE 1

Hormis **Q3** et **Q4**, les questions de cet exercice sont indépendantes.

Dans cet exercice (informatique du tronc commun), les graphes ont leurs sommets numérotés à partir de 0 et ils sont orientés. On les représente par un dictionnaire d'adjacence.

Par exemple, le graphe :



est représenté par le dictionnaire :

```
d = { 0 : [1,3] , 1 :[2] , 2 :[4,5] , 3 : [4] , 4 : [1] , 5 : [], 6 : [2] }
```

Q1. Écrire en langage `Python` une fonction `degreMax( d : dict ) -> int` qui reçoit en entrée un dictionnaire d'adjacence représentant un graphe orienté et renvoie le degré sortant maximal parmi tous les degrés sortants des sommets du graphe.

Si `G` est un graphe orienté, on appelle graphe inverse de `G` le graphe possédant les mêmes sommets ainsi que les mêmes arêtes mais en sens inverse par rapport à celles de `G`.

Q2. Représenter le graphe inverse du graphe orienté donné en introduction.
Écrire en langage `Python` une fonction `grapheInv( d : dict ) -> dict` qui renvoie un dictionnaire d'adjacence du graphe inverse du graphe représenté par `d`.

On souhaite colorier notre graphe orienté. Les couleurs sont représentées par des entiers naturels. La coloration du graphe est modélisée par une liste `L` telle que `L[s]` est égale à la couleur attribuée au sommet `s`.

Deux sommets du graphe reliés par une arête ne doivent pas être de la même couleur (coloration du graphe valide).

Q3. Écrire en langage `Python` une fonction
`colorationValide( d : dict, L : list ) -> bool` qui renvoie `True` si la coloration `L` du graphe représenté par `d` est valide et `False` dans le cas contraire.

Q4. Donner la complexité dans le pire des cas de la fonction précédente en fonction du nombre N de sommets et du nombre M d'arêtes. Justifier votre réponse.

On considère deux tables : FILMS et LOCATIONS. La première contient des informations sur des films et la seconde des informations sur des locations de films par les clients.

La table FILMS contient les attributs suivants :

- codefilm : code d'un film (entier), clé primaire ;
- nomfilm (chaîne de caractères).

La table LOCATIONS contient les attributs suivants :

- codecli : code du client (entier), clé primaire avec l'attribut codefilm ;
- codefilm : code du film (entier), clé primaire avec l'attribut codecli ;
- datedebut : date de début de la location (chaîne de caractères) ;
- duree : durée de la location (flottant).

Q5. Écrire une requête SQL permettant de connaître la plus grande durée de location parmi tous les films.

Q6. Écrire une requête SQL permettant d'extraire le code du film, le nom du film et la durée moyenne de location des films qui ont été en moyenne loués moins de 2 jours. Le résultat doit être classé dans l'ordre décroissant des durées moyennes de location.

EXERCICE 2

On définit une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ en posant $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et pour tout entier naturel n :

$$P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n.$$

Dans les questions suivantes, n et k sont des entiers naturels.

Q7. Donner le degré et le terme dominant de P_n en fonction de n.

Q8. Justifier que pour tout réel θ :

$$P_n\big(cos(\theta)\big) = \cos(n\theta).$$

Pour P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, on pose :

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\,.$$

Q9. Justifier la convergence de cette intégrale.

Q10. Démontrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_k[X]$ (ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à k).

Q11. Calculer pour n et m entiers naturels, $\int_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)\,d\theta$.

Q12. Donner une base orthonormale de $\mathbb{R}_k[X]$ pour ce produit scalaire.

PROBLÈME

Dans ce problème, E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

Partie I

Q6. Un exemple

Vérifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Démontrer que les matrices $\Pi_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\Pi_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont des matrices de projecteur puis calculer $\Pi_1 + 5\Pi_2$, $\Pi_1 + \Pi_2$ et $\Pi_1\Pi_2$.

Q7. On rappelle le lemme de décomposition des noyaux :
Si $P_1, P_2, \ldots, P_r$ sont des éléments de $\mathbb{C}[X]$ deux à deux premiers entre eux de produit égal à T, si u est un endomorphisme de E alors :

$$\mathrm{Ker}\left[T(u)\right] = \mathrm{Ker}\left(P_1(u)\right) \oplus \mathrm{Ker}\left(P_2(u)\right) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Ker}\left(P_r(u)\right).$$

L'objet de cette question est de démontrer le cas particulier $r = 2$.

Soit u un endomorphisme de E et soit P et Q deux polynômes premiers entre eux.
Justifier que $\mathrm{Ker}\left(P(u)\right) \subset \mathrm{Ker}\left[(PQ)(u)\right]$ (de même, on a : $\mathrm{Ker}\left(Q(u)\right) \subset \mathrm{Ker}\left[(PQ)(u)\right]$).

Démontrer que : $\mathrm{Ker}\left[(PQ)(u)\right] = \mathrm{Ker}\left(P(u)\right) \oplus \mathrm{Ker}\left(Q(u)\right)$.

Dans la suite du problème, on pourra utiliser librement le lemme de décomposition des noyaux.

Q8. Soit u un endomorphisme de E et soit π_u son polynôme minimal.

On suppose que $\pi_u = P_1^{k_1} P_2^{k_2}$ où les polynômes P_1 et P_2 sont premiers entre eux. On pose, pour tout entier $i \in \{1, 2\}$, $Q_i = \dfrac{\pi_u}{P_i^{k_i}}$.

Justifier qu'il existe deux polynômes R_1 et R_2 de $\mathbb{C}[X]$ tels que $R_1Q_1 + R_2Q_2 = 1$.

Pour la suite de cette partie, on notera $\pi_u = P_1^{k_1} P_2^{k_2} \ldots P_m^{k_m}$ la décomposition en facteurs premiers du polynôme minimal et on admettra que, si pour tout entier $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $Q_i = \dfrac{\pi_u}{P_i^{k_i}}$, il existe des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que $R_1Q_1 + R_2Q_2 + \ldots + R_mQ_m = 1$.

Q9. On pose alors pour tout entier $i \in \{1,2,...,m\}$, $p_i = R_i(u) \circ Q_i(u)$.

Démontrer que pour tout couple (i,j) d'entiers distincts de $\{1,2,...,m\}$, on a les trois résultats suivants :

$$p_i \circ p_j = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = id_E,$$

et chaque p_i est un projecteur de E.

Les p_i seront appelés projecteurs associés à u.

Q10. Soit u un endomorphisme de E et soit χ_u son polynôme caractéristique : $\chi_u = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ (avec les λ_i deux à deux distincts et les α_i des entiers naturels non nuls) et pour tout entier $i \in \{1,2,...,m\}$, $N_i = \mathrm{Ker}(u - \lambda_i id_E)^{\alpha_i}$ le sous-espace caractéristique associé à λ_i.

Justifier que $E = N_1 \oplus N_2 \oplus ... \oplus N_m$.

Q11. Démontrer que $E = \mathrm{Im}\, p_1 \oplus \mathrm{Im}\, p_2 \oplus ... \oplus \mathrm{Im}\, p_m$.

Q12. Démontrer que pour tout entier $i \in \{1,2,...,m\}$, $\mathrm{Im}\, p_i = N_i$.

Partie II

Dans toute cette partie, on suppose que l'endomorphisme u est diagonalisable et on note $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ ses valeurs propres distinctes.

Q13. Quel est alors le polynôme minimal π_u de u ?

Q14. On note toujours, pour tout entier $i \in \{1,2,...,m\}$, $Q_i = \dfrac{\pi_u}{P_i}$ où $P_i = X - \lambda_i$, et on pose $\theta_i = \dfrac{1}{Q_i(\lambda_i)}$.

Donner, sans détails, la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{\pi_u}$ puis démontrer que les projecteurs associés à u sont, pour tout entier $i \in \{1,2,...,m\}$, $p_i = \dfrac{Q_i(u)}{Q_i(\lambda_i)}$.

Q15. Démontrer que $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i Q_i(X)}{Q_i(\lambda_i)}$ puis que $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i$ (décomposition spectrale de u).

Q16. Exemple : on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Justifier que la matrice A est diagonalisable et calculer la matrice A^2.
b) En déduire le polynôme minimal π_A de la matrice A puis la décomposition spectrale de la matrice A. On notera Π_1 et Π_2 les matrices des projecteurs associés.
c) Calculer, pour tout entier naturel q, A^q en fonction des matrices Π_1 et Π_2.

Q17. On note $\mathbb{C}[v]$ l'algèbre des polynômes d'un endomorphisme v d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.
Démontrer que la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{C}[v]$ est égal au degré du polynôme minimal π_v de l'endomorphisme v.

Q18. On revient au cas u diagonalisable avec $\pi_u = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)$.
Démontrer que la famille $(p_1, p_2, ..., p_m)$ des projecteurs associés à u est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{C}[u]$.

Q19. Dans le cas d'un endomorphisme u non diagonalisable, la famille $(p_1, p_2, ..., p_m)$ des projecteurs associés à u est-elle toujours une base de l'espace vectoriel $\mathbb{C}[u]$?

Q20. Nous avons vu que si u est un endomorphisme de E diagonalisable, il existe m endomorphismes non nuls p_i de E, tels que pour tout entier q on ait $u^q = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i{}^q p_i$.

Nous allons étudier une « réciproque ».

Soit u un endomorphisme de E, $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. On suppose qu'il existe m endomorphismes non nuls f_i de E et m complexes $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ distincts, tels que pour tout entier naturel q on ait $u^q = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i{}^q f_i$.
Démontrer que u est diagonalisable.

FIN