Correction du concours blanc 2026 ALGÈBRE

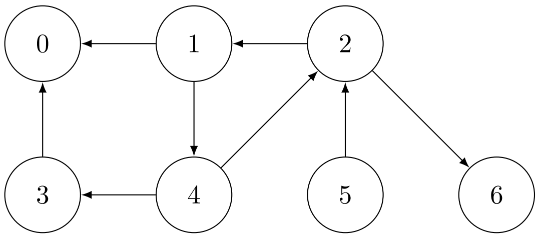
Correction de Roberto Pinciroli pour les exercices 1 et 2

Exercice 1

1. On suppose que les listes des sommets dans le dictionnaire d'adjacence ne comportent pas de sommets répétés plusieurs fois (ce qui est cohérent avec la définition usuelle d'un graphe, où il peut y avoir au plus un arc entre deux sommets).

```python
def degreMax(d: dict) -> int:
    dmax = 0              # degré maximum parmi ceux des sommets examinés
    for sommet in d:      # parcourt l'un après l'autre les sommets du graphe
        ds = len(d[sommet]) # calcule le degré sortant du sommet
        if ds > dmax:     # met à jour le maximum si nécessaire
            dmax = ds
    return dmax
```

2. Le graphe inverse de celui de l'énoncé peut être représenté ainsi :




```python
def grapheInv(d: dict) -> dict:
    # initialise un graphe sans arcs, ayant les mêmes sommets
    dInv = {s: [] for s in d}
    for s in d:           # pour chaque sommet s du graphe original G,
        for t in d[s]:    # et pour chaque successeur t de s dans G,
            dInv[t].append(s)   # ajoute s à la liste des successeurs de t
    return dInv
```

Remarque : la complexité de cette fonction est $O(N+M)$, où N est le nombre de sommets et M le nombre d'arcs du graphe.

3. On vérifie que tout arc relie des sommets ayant des couleurs différentes.

```python
def colorationValide(d: dict, L: list) -> bool:
    for s in d:           # s parcourt tous les sommets de le graphe G
        for t in d[s]:    # t parcourt tous les successeurs de s dans G
```

```
        if L[s] == L[t]:    # s'il existe un couple de sommets adjacents
            return False    # ayant la même couleur, la coloration est invalide
    return True
```

4. On note S l'ensemble des sommets et A l'ensemble des arcs (couples ordonnés de sommets reliés) : on a $N = |S|$ et $M = |A|$. Le corps de la fonction consiste d'une boucle parcourant les sommets $s \in S$ (N itérations) ; dans le corps de cette boucle on accède au dictionnaire `d` pour lire la liste des extrémités des arcs sortant de s (complexité $O(1)$) puis pour chacune de ces extrémités on vérifie si la couleur associée est différente de celle de s (complexité $O(|A(s)|)$). Si la coloration est invalide, l'instruction **`return`** interrompt la boucle (on a donc une vérification paresseuse de la validité de la coloration) ; dans le pire des cas (c'est-à-dire, si la coloration est valide), la complexité est dominée par $\sum_{s\in S} \big(1 + |A(s)|\big) = |S| + |A|$, à savoir elle est $\boxed{O(N+M)}$ (le parcours des sommets est toujours réalisé, même si le graphe ne possède aucun arc).

5.

```sql
SELECT MAX(duree) FROM LOCATIONS;
```

6.

```sql
SELECT L.codefilm, nomfilm, AVG(duree) AS duree_moyenne
FROM FILMS F JOIN LOCATIONS L ON F.codefilm = L.codefilm
GROUP BY L.codefilm
HAVING duree_moyenne < 100
ORDER BY duree_moyenne DESC;
```

Exercice 2

Dans cet exercice, on établit quelques propriétés élémentaires classiques des polynômes de Tchebychev P_n.

1. On constate que l'égalité $\deg(P_n) = n$ est vraie pour $n \in \{0, 1\}$ (*initialisation*).
   Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $\deg(P_n) = n$ et $\deg(P_{n+1}) = n+1$; on a $\deg(2XPn+1) = 1+(n+1) = n+2 > \deg(P_n)$ donc $\deg(P_{n+2}) = \max\{\deg(2XP_{n+1}), \deg(P_n)\} = n+2$.
   Par récurrence (double), on conclut que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ \ \deg(P_n) = n}$
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note c_n le coefficient dominant de P_n. Le degré de $2XP_{n+1}$ est strictement plus grand que celui de P_n, donc le coefficient dominant de $P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$ est égal à celui de $2XP_{n+1}$, autrement dit $c_{n+2} = 2c_{n+1}$. Ainsi la suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$ est géométrique de raison 2 et de terme initial $c_1 = 1$, donc pour tout entier $n \geqslant 1$ on a $c_n = 2^{n-1}c_1 = 2^{n-1}$.
   Le coefficient dominant de P_0 vaut 1, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ le coefficient dominant de P_n vaut 2^{n-1}.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathcal{E}_n$ le prédicat $\forall \theta \in \mathbb{R} \ \ P_n\big(\cos(\theta)\big) = \cos(n\theta)$.
   L'égalité $\mathcal{E}_1$ découle directement de la substitution de l'indéterminée X par $\cos(\theta) = \cos(1\theta)$, et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a $\cos(0\theta) = \cos(0) = 1$, donc $\mathcal{E}_0$ est vraie aussi.
   Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on suppose que $\mathcal{E}_n$ et $\mathcal{E}_{n+1}$ sont vraies ; l'évaluation en $\cos(\theta)$ est un

morphisme d'algèbres de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}$, donc

$$\begin{aligned}P_{n+2}(\cos(\theta)) &= 2\cos(\theta)P_{n+1}\big(\cos(\theta)\big) - P_n\big(\cos(\theta)\big) = 2\cos(\theta)\cos\big((n+1)\theta\big) - \cos(n\theta)\\ &= \cos\big((n+1)\theta+\theta\big) + \cos\big((n+1)\theta-\theta\big) - \cos(n\theta) = \cos\big((n+2)\theta\big)\end{aligned}$$

cela établit $\mathcal{E}_{n+2}$. Par récurrence (double), on conclut que $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall \theta \in \mathbb{R}\quad P_n\big(\cos(\theta)\big) = \cos(n\theta)$.

3. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$. Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$, donc par produit et composition la fonction

$$f_{P,Q} : t \longmapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} = P(t)Q(t)(1-t)^{-1/2}(1+t)^{-1/2}$$

est continue sur $]-1,1[$.
On a $\lim\limits_{t\to 1^-} P(t)Q(t)(1+t)^{-1/2} = \dfrac{P(1)Q(1)}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$ donc $f_{P,Q}(t) = \underset{t\to 1^-}{O}\left(\dfrac{1}{(1-t)^{1/2}}\right)$; par comparaison à la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{(1-t)^{1/2}}$ qui est intégrable en 1^- (critère de Riemann), la fonction $f_{P,Q}$ est intégrable en 1^- aussi. D'une manière analogue, $\lim\limits_{t\to(-1)^+} P(t)Q(t)(1-t)^{-1/2} = \dfrac{P(-1)Q(-1)}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$ donc $f_{P,Q}(t) = \underset{t\to(-1)^+}{O}\left(\dfrac{1}{(1+t)^{1/2}}\right)$; par comparaison à la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{(1+t)^{1/2}}$ qui est intégrable en $(-1)^+$ (critère de Riemann), la fonction $f_{P,Q}$ est intégrable en $(-1)^+$ aussi.
Cela montre que $f_{P,Q}$ est intégrable sur $]-1,1[$; il en découle que l'intégrale définissant $\langle P,Q\rangle$ converge.

Deuxième raisonnement, et expression du produit scalaire comme intégrale sur un segment.
L'application $\varphi : \theta \longmapsto \cos(\theta)$ est de classe C^1, de dérivée $\varphi' : \theta \longmapsto -\sin(\theta)$, et induit une bijection strictement décroissante de $]0,\pi[$, où $\sin > 0$, vers $]-1,1[$. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$; par changement de variable, les intégrales

$$\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_{\pi}^{0} \frac{P(\cos(\theta))Q(\cos(\theta))}{\sqrt{1-\cos(\theta)^2}}(-\sin(\theta))\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi} P(\cos(\theta))Q(\cos(\theta))\,\mathrm{d}\theta$$

sont de même nature et valeur en cas de convergence. Par composition et produit de fonctions continues, $\theta \longmapsto P(\cos(\theta))Q(\cos(\theta))$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, donc sa restriction à $]-1,1[$ a un prolongement continu au segment $[-1,1]$: il en suit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} P(\cos(\theta))Q(\cos(\theta))\,\mathrm{d}\theta$ est faussement impropre, donc convergente, et on conclut que l'intégrale définissant $\langle P,Q\rangle$ est convergente et

$$\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2 \quad \langle P,Q\rangle = \int_0^{\pi} P(\cos(\theta))Q(\cos(\theta))\,\mathrm{d}\theta \tag{1}$$

4. D'après 3, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une application bien définie de $\mathbb{R}[X]^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
La multiplication sur $\mathbb{R}$ est distributive sur l'addition et commutative, et l'évaluation est un morphisme d'algèbres de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}$; il en suit que pour $P,Q,R \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, par linéarité de l'intégrale sur $]-1,1[$ on a

$$\langle Q,P\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{Q(t)P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \langle P,Q\rangle$$

$$\langle P,Q+\lambda R\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)+\lambda P(t)R(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t + \lambda\int_{-1}^{1} \frac{P(t)R(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \langle P,Q\rangle + \lambda\langle P,R\rangle$$

donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme symétrique et linéaire à droite, donc bilinéaire, sur $\mathbb{R}[X]$.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$: pour tout $t \in]-1,1[$ on a $\dfrac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}} \geqslant 0$ donc $\langle P,P\rangle \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale.

On suppose que $\langle P, P\rangle = 0$: la fonction $t \longmapsto \dfrac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur $]-1,1[$, donc elle est identiquement nulle sur cet intervalle ; il en suit que tout élément de l'intervalle $]-1,1[$, qui est un ensemble infini, est une racine du polynôme P, donc P est le polynôme nul.
On conclut que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$, donc il induit par restriction un produit scalaire sur le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_k[X]$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

5. Soient $n, m \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$; on linéarise un produit de fonctions circulaires :

$$\cos(n\theta)\cos(m\theta) = \frac{\cos((n+m)\theta) + \cos((n-m)\theta)}{2}$$

Or si p est un entier relatif non nul on a $\displaystyle\int_0^\pi \cos(p\theta)\,\mathrm{d}\theta = \left[\frac{\sin(p\theta)}{p}\right]_0^\pi = 0$, tandis que pour $p = 0$ on a $\displaystyle\int_0^\pi \cos(p\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi 1\,\mathrm{d}\theta = \pi$; par linéarité de l'intégrale, il en résulte que

$$\boxed{\int_0^\pi \cos(n\theta)\cos(m\theta)\,\mathrm{d}\theta = \begin{cases} \pi & \text{si } n = m = 0, \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si } n = m \neq 0, \\ 0 & \text{si } n \neq m. \end{cases}}$$

6. Pour $(n,m) \in \mathbb{N}^2$, on utilise 2, l'expression (1) du produit scalaire et le résultat de 5 :

$$\langle P_n, P_m\rangle = \int_0^\pi P_n(\cos(\theta))P_m(\cos(\theta))\,\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi \cos(n\theta)\cos(m\theta)\,\mathrm{d}\theta = \begin{cases} \pi & \text{si } n = m = 0, \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si } n = m \neq 0, \\ 0 & \text{si } n \neq m. \end{cases}$$

autrement dit, la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale et pour tout $n \in \mathbb{N}$ la norme euclidienne du polynôme P_n est égale à $\sqrt{\pi}$ si $n = 0$ et à $\sqrt{\pi/2}$ si $n > 2$; il en résulte que la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où

$$\boxed{Q_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad Q_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}P_n}$$

est orthonormale dans $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Pour $k \in \mathbb{N}$, la sous-famille $(Q_0, \ldots, Q_k)$ est une famille de $k+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_k[X]$ d'après 1, toujours orthonormale donc libre, et $\dim(\mathbb{R}_k[X]) = k+1$: on conclut que Pour $k \in \mathbb{N}$, la famille $(Q_0, \ldots, Q_k)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_k[X]$ pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

> Correction de Mustapha Laamoum pour le problème

PROBLEME
Partie I

6. **Un exemple -**

▷ La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle donc elle est diagonalisable.

▷ On vérifie facilement que : $\Pi_1^2 = \Pi_1$, $\Pi_2^2 = \Pi_2$ ainsi Π_1 et Π_2 sont des matrices de projecteur. $\Pi_1 + 5\Pi_2 = A$, $\Pi_1 + \Pi_2 = I_2$ et $\Pi_1\Pi_2 = 0$

7. u un endomorphisme de E et P et Q deux polynômes premiers entre eux.

   $\triangleright$ Soit $x \in \operatorname{Ker}(P(u))$ donc $P(u)(x) = 0$ et $(QP)(u) = Q(u) \circ P(u)$ donc $[(QP)(u)](x) = Q(u)(P(u)(x)) = 0$ ce qui donne $x \in \operatorname{Ker}[(PQ)(u)]$, ainsi $\operatorname{Ker}(P(u)) \subset \operatorname{Ker}[(PQ)(u)]$ (de même, on a : $\operatorname{Ker}(Q(u)) \subset \operatorname{Ker}[(PQ)(u)]$).

   $\triangleright$ On applique le théorème de Bézout : Il existe $A, B \in \mathbb{C}[X]$ tels que $AP+BQ = 1$. Ce qui donne

   $$\mathrm{Id}_E = (AP + BQ)(u) = A(u) \circ P(u) + B(u) \circ Q(u)$$

   Donc si $x \in \ker P(u) \cap \ker Q(u)$, on a :

   $$\begin{aligned} x &= (A(u) \circ P(u))(x) + (B(u) \circ Q(u))(x) \\ &= \underbrace{A(u)(P(u)(x))}_{=0} + \underbrace{B(u)(Q(u)(x))}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Ainsi $\ker P(u) \cap \ker Q(u) = \{0\}$.

   $\triangleright$ On a $\ker(P \times Q)(u) \subset \ker P(u) + \ker Q(u)$ et si $x \in \ker(P \times Q)(u)$, alors :

   $$x = \underbrace{(A(u) \circ P(u))(x)}_{\in \ker Q(u)} + \underbrace{(B(u) \circ Q(u))(x)}_{\in \ker P(u)}.$$

   En effet, $Q(u)(P(u) \circ A(u)(x)) = (A(u) \circ (P \times Q)(u))(x) = 0$ et $P(u)(Q(u) \circ B(u)(x)) = (B(u) \circ (P \times Q)(u))(x) = 0$. Donc $\operatorname{Ker}[(PQ)(u)] = \operatorname{Ker}(P(u)) + \operatorname{Ker}(Q(u))$
   Finalement on a montrer : $\operatorname{Ker}[(PQ)(u)] = \operatorname{Ker}(P(u)) \oplus \operatorname{Ker}(Q(u))$.

8. On a $\pi_u = P_1^{k_1} P_2^{k_2}$, P_1 et P_2 sont premiers entre eux,$Q_1 = P_2^{k_2}$ et $Q_2 = P_1^{k_1}$.
   Q_1 et Q_2 sont premiers entre eux, le théorème de Bézout donne l'existence deux polynômes R_1 et R_2 de $\mathbb{C}[X]$ tels que $R_1Q_1 + R_2Q_2 = 1$.
   On a $\pi_u = P_1^{k_1} P_2^{k_2} \ldots {P_m}^{k_m}$ et pour tout entier $i \in \{1, 2, \ldots, m\}, Q_i = \dfrac{\pi_u}{{P_i}^{k_i}}$, il existe des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que $R_1Q_1 + R_2Q_2 + \ldots + R_mQ_m = 1$.

9. On a $\pi_u = P_1^{k_1} P_2^{k_2} \ldots {P_m}^{k_m}$,pour tout entier $i \in \{1, 2, \ldots, m\}, Q_i = \dfrac{\pi_u}{{P_i}^{k_i}}$. $i \in \{1, 2, \ldots, m\}, p_i = R_i(u) \circ Q_i(u)$.

   $\triangleright$ Il existe des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que $R_1Q_1 + R_2Q_2 + \ldots + R_mQ_m = 1$ et pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, m\}, p_i = R_i(u) \circ Q_i(u)$ donc

   $$R_1(u) \circ Q_1(u) + \ldots + R_m(u) \circ Q_m(u) = id_E$$

   par suite $\boxed{\sum_{i=1}^{m} p_i = id_E}$.

   $\triangleright$ Soit i, j des entiers distincts de $\{1, 2, \ldots, m\}$, on a

   $$\begin{aligned} p_i \circ p_j &= R_i(u) \circ Q_i(u) \circ R_j(u) \circ Q_j(u) \\ &= R_i(u) \circ R_j(u) \circ Q_i(u) \circ Q_j(u) \\ &= (R_iR_j)(u) \circ (Q_iQ_j)(u) \end{aligned}$$

   et $Q_iQ_j = \dfrac{\pi_u}{{P_i}^{k_i}} \dfrac{\pi_u}{{P_j}^{k_j}} = \pi_u . \dfrac{\pi_u}{{P_i}^{k_i} {P_j}^{k_j}}$, *car* ${P_i}^{k_i} {P_j}^{k_j}$ *divise* π_u , par suite π_u divise Q_iQ_j , il est donc annulateur de u d'où $p_i \circ p_j = 0$.

$\triangleright$ Soit i dans $\{1, 2, \ldots, m\}$, on a

$$\begin{aligned} p_i &= p_i \circ id_E \\ &= p_i \circ \sum_{j=1}^{m} p_j \\ &= p_i^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} p_i \circ p_j \end{aligned}$$

or si $i \neq j$ on a $p_i \circ p_j = 0$ donc $p_i^2 = p_i$, et p_i est un projecteur .

10. On a $\chi_u = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et pour tout $i \in \{1, 2, ..., m\}$, $N_i = \ker(u - \lambda_i id_E)^{\alpha_i}$.
Les polynômes $(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ sont deux à deux premiers entre eux , le théorème de décomposition des noyaux donne

$$\ker \chi_u(u) = \bigoplus_{i=1}^{m} \ker(u - \lambda_i id_E)^{\alpha_i}$$

d'après le théorème de Cayley-Hamilton on a $\chi_u(u) = 0$ donc $\ker \chi_u(u) = E$ d'où

$$E = \bigoplus_{i=1}^{m} N_i$$

11. $\triangleright$ La somme $\mathrm{Im} p_1 + \ldots + \mathrm{Im} p_m$ est directe :
Soit $(y_1, ..., y_m) \in \mathrm{Im} p_1 \times \ldots \times \mathrm{Im} p_m$ tels que $y_1 + ... + y_m = 0$, il existe $x_1, ..., x_m$ dans E verifiant $y_i = p_i(x_i)$ pour tout i dans $\{1, ..., m\}$. Soit i, j distinct dans $\{1, ..., m\}$ alors

$$p_i(y_j) = (p_i \circ p_j)(x_j) = 0 \text{ et } p_i(y_i) = (p_i \circ p_i)(x_i) = p_i(x_i) = y_i$$

ce qui donne

$$p_i(y_1) + ... + p_i(y_m) = y_i = 0$$

donc $(y_1, ..., y_m) = (0, ..., 0)$, ce qui prouve que la somme $\mathrm{Im} p_1 + \ldots + \mathrm{Im} p_m$ est directe
$\triangleright$ $E = \mathrm{Im} p_1 + \ldots + \mathrm{Im} p_m$:
On a $\mathrm{Im} p_1 + \ldots + \mathrm{Im} p_m \subset E$ et $p_1 + \ldots + p_m = id_E$ donc pour tout x dans E on a $x = p_1(x) + \ldots + p_m(x)$ donc $x \in \mathrm{Im} p_1 + \ldots + \mathrm{Im} p_m$ par suite $E \subset \mathrm{Im} p_1 + \ldots + \mathrm{Im} p_m$, d'où $E = \mathrm{Im} p_1 + \ldots + \mathrm{Im} p_m$.
Ainsi on a $E = \mathrm{Im} p_1 \oplus \ldots \oplus \mathrm{Im} p_m$

12. D'après le théorème de Cayley-Hamilton on a π_u divise $\chi_u = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et l'ensemble des racines de π_u est exactement le spectre de u , donc $\pi_u = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)^{\beta_i}$ avec $0 < \beta_i \leq \alpha_i$, on a alors $P_i^{k_i} = (X - \lambda_i)^{\beta_i}$, a l'indice près .
Soit $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ et $y_i = p_i(x_i) \in \mathrm{Im} p_i$, puisque $P_i^{k_i}$ divise $(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et $P_i^{k_i}(p_i) = \pi_u(u) = 0$ alors $(X - \lambda_i)^{\alpha_i}(p_i) = 0$, par suite $y_i \in N_i$ et $\mathrm{Im} p_i \subset N_i$.
D'autre part $E = \mathrm{Im} p_1 \oplus \ldots \oplus \mathrm{Im} p_m = N_1 \oplus \ldots \oplus N_m$ donc

$$\dim(\mathrm{Im} p_1) \oplus \ldots \oplus \dim(\mathrm{Im} p_m) = \dim(N_1) \oplus \ldots \oplus \dim(N_m)$$

Supposons qu'il existe $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tel que $\mathrm{Im} p_i \neq N_i$ donc $\dim(\mathrm{Im} p_i) < \dim(N_i)$ par suite

$$\dim(\mathrm{Im} p_1) \oplus \ldots \oplus \dim(\mathrm{Im} p_m) < \dim(N_1) \oplus \ldots \oplus \dim(N_m)$$

ce qui est absurde donc $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ on a $\dim(\mathrm{Im} p_i) = \dim(N_i)$ et $\mathrm{Im} p_i = N_i$.

Partie II

13. u est diagonalisable donc son polynôme minimal est scindé à racines simples, et l'ensemble de ses racines est exactement le spectre de u d'où :

$$\pi_u = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)$$

14. On a , pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, m\}, Q_i = \dfrac{\pi_u}{P_i}$ où $P_i = X - \lambda_i$, et $\theta_i = \dfrac{1}{Q_i(\lambda_i)}$.

▷ Avec un peut de détails, la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{\pi_u}$ s'écrit :

$$\frac{1}{\pi_u} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{X - \lambda_i}$$

avec $a_i = \left[\dfrac{P_i(X)}{\pi_u(X)}\right]_{X=\lambda_i} = \left[\dfrac{1}{Q_i(X)}\right]_{X=\lambda_i} = \theta_i$ donc

$$\frac{1}{\pi_u} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\theta_i}{X - \lambda_i}$$

▷ Cette relation donne

$$1 = \sum_{i=1}^{m} \theta_i \frac{\pi_u}{X - \lambda_i} = \sum_{i=1}^{m} \theta_i Q_i$$

suivant les notation de Q10 on a pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, m\}, p_i = \theta_i Q_i(u) = \dfrac{Q_i(u)}{Q_i(\lambda_i)}$.

15. On suppose que $\deg \pi_u > 1$. On a $1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \theta_i \frac{\pi_u}{X - \lambda_i}$ donc

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^{m} \theta_i \frac{X - \lambda_i + \lambda_i}{X - \lambda_i} \pi_u \\ &= \left(\sum_{i=1}^{m} \theta_i\right) \pi_u + \sum_{i=1}^{m} \theta_i \lambda_i Q_i(X) \end{aligned}$$

De la relation $\dfrac{1}{\pi_u} = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{\theta_i}{X - \lambda_i}$ on a $\dfrac{x}{\pi_u(x)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \theta_i \frac{x}{x - \lambda_i}$ et on fait tendre x vers $+\infty$, on obtient $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \theta_i = 0$, d'où

$$X = \sum_{i=1}^{m} \theta_i \lambda_i Q_i(X) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i Q_i(X)}{Q_i(\lambda_i)} \quad (*)$$

Par substitution de X par u on obtient

$$u = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{Q_i(u)}{Q_i(\lambda_i)} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i.$$

Si $\deg \pi_u = 1$: la relation $(*)$ n'a pas de sens, mais on a $\pi_u = X - \lambda_1$ et $u = \lambda_1 . p_1$ avec $p_1 = id_E$.

16. **Exemple :** on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) La matrice A est symétrique réelle donc elle est diagonalisable. Et $A^2 = 4I_4$.

(b) On a $A^2 = 4I_4$ donc $X^2 - 4$ est annulateur de A et π_A divise $X^2 - 4$, A n'est pas de la forme αI_4 donc forcement $\deg \pi_A \geq 2$ par suite $\pi_A = X^2 - 4$.
On a
$$\frac{1}{\pi_u} = \frac{\theta_1}{X-2} + \frac{\theta_2}{X+2}$$
avec $\theta_1 = \left[\frac{X-2}{\pi_u(X)}\right]_{X=2} = \frac{1}{4}$ et $\theta_2 = \left[\frac{X+2}{\pi_u(X)}\right]_{X=-2} = \frac{-1}{4}$, donc
$$\frac{1}{\pi_u} = \frac{1}{4}\left(\frac{-1}{X+2} + \frac{1}{X-2}\right)$$
et $Q_1 = X - 2$, $Q_2 = X + 2$.
Par suite $\Pi_1 = \frac{Q_1(A)}{Q_1(-2)} = \frac{-1}{4}(A - 2I_4)$ et $\Pi_2 = \frac{Q_2(A)}{Q_2(2)} = \frac{1}{4}(A + 2I_4)$.
On trouve
$$\Pi_1 = \frac{1}{4}(-A + 2I_4) = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\Pi_2 = \frac{1}{4}(A + 2I_4) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(c) On a les relations :
- ▷ $A = \lambda_1 \Pi_1 + \lambda_2 \Pi_2$
- ▷ $\Pi_1 . \Pi_2 = \Pi_2 . \Pi_1 = 0$
- ▷ $\Pi_1^k = \Pi_1$, $\Pi_2^k = \Pi_2$ pour tout entier naturel k.

On btient pour tout entier naturel k $A^k = \lambda_1^k \Pi_1 + \lambda_2^k \Pi_2$, donc
$$A^k = 2^k \Pi_1 + (-2)^k \Pi_2 = 2^k \left(\Pi_1 + (-1)^k \Pi_2\right).$$

Ainsi pour tout entier naturel k on a
$$A^{2k} = 4^k I_4 \text{ et } A^{2k+1} = 4^k A$$

17. On a $\mathbb{C}[v] = \{P(v) \ , P \in \mathbb{C}[X]\}$, posons $\pi_v(X) = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + .. + a_0$.
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ on effectue la division euclidienne de P par π_v :
$$P = Q\pi_v + R \ \text{ avec } \ \deg R \leq d - 1,$$
par substitution on a
$$P(v) = Q(v) \circ \pi_v(v) + R(v) = R(v),$$
donc $P(v) \in \text{vect}\left\{id_E, v, ..., v^{d-1}\right\}$ et $\mathbb{C}[v] \subset \text{vect}\left\{id_E, v, ..., v^{d-1}\right\}$. Par suite $\dim \mathbb{C}[v] \leq d$.
Si on suppose que $\dim \mathbb{C}[v] \leq d - 1$ alors la famille $\left\{id_E, v, ..., v^{d-2}\right\}$ est liée ainsi il existe un polynôme annulateur de v de degré inferieur à $d - 1$ ce qui contredit le fait que , π_v est annulateur de degré minimal égal à d .
Donc $\dim \mathbb{C}[v] = d$.

18. On a $\deg \pi_u = m = \dim \mathbb{C}[u]$.
La famille $(p_1, \ldots, p_m)$ est libre :
Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ dans $\mathbb{C}^m$ tels que $\alpha_1 p_1 + \ldots + \alpha_m p_m = 0$, on compose par p_j , sachant que $p_i \circ p_j = 0$ si $i \neq j$ et $p_i \circ p_i = p_i$, on obtient $\alpha_j = 0$, ainsi $(p_1, \ldots, p_m)$ est libre.
$(p_1, \ldots, p_m)$ est libre de cardinal m donc c'est une base de $\mathbb{C}[u]$.
19. Si u non diagonalisable, *par axemple nilpotent non nul*, alors π_u n'est pas à racines simple et $\deg \pi_u > m$, donc la famille $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ n'est pas génératrice et n'est pas une base de $\mathbb{C}[u]$.
20. On suppose qu'il existe m endomorphismes non nuls f_i de E et m complexes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ distincts, tels que pour tout entier naturel q on ait $u^q = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^q f_i$.
Donc pour tout polynôme P on a $P(u) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i) f_i$, en particulier le polynôme $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)$ est annulateur à racines simples , donc u est diagonalisable .

Fin.