

# Correction du concours blanc 2026 ANALYSE

## EXERCICE 1

Correction de Marie Hezard. Il s'agit de l'exercice 3 du sujet MP 2025 de mathématiques spécifique E3A.

1. Question de cours. Rappeler le développement en série entière de la fonction exponentielle et son domaine de validité.

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

On pose, lorsque cela est possible,  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$ .

2. Montrer que la fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

La suite  $(1/(n!)^2)$  associée à la série entière ne s'annulant pas, on utilise le critère de D'Alembert pour les séries entières pour déterminer le rayon de convergence de cette série entière :  $\frac{\frac{1}{(n+1)!^2}}{\frac{1}{n!^2}} = \frac{1}{(n+1)^2} \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$  donc  $R = +\infty$  et cela montre que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

3. Justifier que  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

Par propriété du cours, la somme d'une série entière est de classe  $C^\infty$  sur son intervalle ouvert de convergence (qui est  $\mathbb{R}$ ) ici.

4. Démontrer que la fonction  $f$  est lipschitzienne sur tout segment  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$ .

Sur tout segment  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  est de classe  $C^1$  donc  $f'$  y est bornée (par le théorème des bornes atteintes) et par corollaire du théorème des accroissements finis, elle est lipschitzienne.

5. Prouver que pour tout réel positif  $x$ ,  $f'(x) \leq e^x$ .

Soit  $x \geq 0$ . Par propriété du cours, on a  $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)}{(n+1)!^2} x^n$ . Or, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{n+1}{(n+1)!^2} \leq \frac{1}{n!}$  et donc finalement,  $f'(x) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$  ie  $f'(x) \leq e^x$ .

6. Soient  $x$  et  $y$  deux réels positifs. On note  $z = \max(x, y)$ . Prouver que l'on a :  $|f(x) - f(y)| \leq e^z |x - y|$ .

Pour tout  $t \in [x, y]$  (ou  $[y, x]$ ) on a  $|f'(t)| \leq e^z$ , donc, par corollaire du théorème des accroissements finis,  $|f(x) - f(y)| \leq e^z|x - y|$ .

7. Prouver que l'on a :  $f(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ .

On a  $f'(0) = 1$  donc, par TAYLOR-YOUNG,  $f(x) = f(0) + xf'(0) + o(x)$  au voisinage de 0 ie  $f(x) = 1 + x + o(x)$ . Et cela s'écrit aussi  $f(x) - 1 \sim x$  lorsque  $x \rightarrow 0$ .

On pose, pour tout  $x > 0$ ,  $g(x) = \int_1^x \frac{1}{t[f(t)]^2} dt$ .

8. Justifier que  $g$  est de classe  $C^\infty$  sur  $]0, +\infty[$ .

$g$  est bien définie par on a  $f(t) > 0$  pour  $t > 0$ .

Par théorème,  $g$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et pour tout  $x > 0$ ,  $g'(x) = \frac{1}{xf^2(x)}$ .

Comme  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $g'$  l'est aussi et finalement,  $g$  aussi.

9. Étudier le signe de  $g$  sur  $]0, +\infty[$ .

Par positivité de l'intégrale, si  $x \in ]0, 1]$ , on a  $g(x) \leq 0$  et si  $x \in [1, +\infty[$ , on a  $g(x) \geq 0$ .

10. Montrer que :  $g(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln(x)$ .

On a  $g(x) - \frac{1}{\ln x} = \int_1^x \frac{dt}{tf^2(t)} - \int_1^x \frac{dt}{t} = \int_1^x \frac{1-f^2(t)}{tf^2(t)} dt$ . Or, lorsque  $x \rightarrow 0$ ,  $\frac{1-f^2(x)}{xf^2(x)} = \frac{(1-f(x))(1+f(x))}{xf^2(x)} \sim 2$ . Cela prouve que  $\int_0^1 \frac{1-f^2(t)}{tf^2(t)} dt$  converge (c'est l'intégrale d'une fonction continue sur  $]0, 1]$  qui a une limite finie en 0).

Ainsi,  $g(x) - \ln x = o(\ln x)$  lorsque  $x \rightarrow 0$  et donc  $g(x) \sim \ln x$ .

11. Prouver que pour tout  $t > 0$ , on a :  $f(t) > 1 + t$ .

Soit  $t > 0$ . On a  $f(t) - (1 + t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n!^2} \geq 0$  puisque c'est la somme d'une série à termes positifs. Et c'est même  $> 0$  puisqu'au moins un des termes est  $> 0$ .

12. En déduire que  $g$  possède une limite finie lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

$g$  est croissante sur  $[1, +\infty[$  (puisque sa dérivée y est positive) et par le théorème de la limite monotone, elle admet donc une limite en  $+\infty$ . De plus cette limite est infinie lorsque  $g$  n'est pas majorée et finie sinon.

De plus, pour  $x \geq 1$ , par croissance de l'intégrale, on a  $g(x) \leq \int_1^x \frac{dt}{t(1+t)^2}$ . Or,  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t)^2}$  converge car c'est l'intégrale généralisée d'une fonction positive, continue et équivalent en  $+\infty$  à  $\frac{1}{t^3}$  qui est intégrable par Riemann.

Finalement, comme  $\frac{1}{t(1+t)^2} \geq 0$ , on  $g(x) \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t)^2}$ .

Cela prouve que  $g$  est majorée et qu'ainsi sa limite en  $+\infty$  est finie.

13. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle  $F(X) = \frac{1}{X(1+X)^2}$ .

On sait qu'il existe  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tel que

$$\frac{1}{X(1+X)^2} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{(X+1)^2}$$

Par les méthodes classiques, on obtient  $a = 1$  et  $c = -1$ .

Puis en faisant  $\times X$  puis en passant aux fonctions rationnelles et en faisant tendre  $x \rightarrow +\infty$ , on obtient  $0 = a + b$  donc  $b = -1$ .

On conclut

$$\frac{1}{X(1+X)^2} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1} - \frac{1}{(X+1)^2}$$

14. Démontrer que pour tout  $x > 1$ , on a :

$$g(x) \leq \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1} + \ln(2) - \frac{1}{2}$$

En reprenant la majoration de la question 12, et en utilisant la croissance de l'intégrale, on obtient pour  $x > 1$ ,  $g(x) \leq \int_1^x \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2} dt$  ce qui donne par calcul

$$g(x) \leq \ln x - \ln(x+1) + \frac{1}{x} - 1 + \frac{1}{2} + \ln 2$$

ce qui est bien l'inégalité demandée.

15. En déduire que  $g$  est majorée par  $\ln(2)$  sur  $]0, +\infty[$ .

$g$  est négative sur  $]0, 1]$  donc majorée par  $\ln 2$ . Si  $x \geq 1$ , on a  $\ln \frac{x}{x+1} \leq 0$  puisque  $\frac{x}{x+1} \leq 1$ ,  $\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{2}$  et finalement,  $g(x) \leq \ln 2$ .

## PROBLEME

Correction de Bruno Winckler. Il s'agit du problème du sujet MP 2024 Mathématiques 1 du CCinP.

8. Par le théorème de sommation par paquets (qu'on peut utiliser ici sans hypothèse de sommabilité puisqu'on somme des termes positifs), avec le recouvrement  $\mathbb{N} \setminus \{0\} = (2\mathbb{N} \setminus \{0\}) \sqcup (2\mathbb{N} + 1)$ , on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n \in 2\mathbb{N} \setminus \{0\}} \frac{1}{n^2} + \sum_{n \in 2\mathbb{N} + 1} \frac{1}{n^2} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{1}{(2\ell)^2} + \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\ell+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\ell+1)^2}.$$

Comme la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  converge évidemment (c'est une série de Riemann d'exposant  $2 > 1$ ), cette égalité peut se réécrire :

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\ell+1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

ce dont on déduit :  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{3/4} \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}$ .

### Partie I

9. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . La dérivée de  $x \mapsto (\sin(x))^{n+1}$  est  $x \mapsto (n+1)(\sin(x))^n \cos(x)$ .

Pour obtenir une relation entre les intégrales  $W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{n+2} dx$  et  $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^n dx$ , nous allons intégrer par parties afin d'abaisser le degré de l'exposant  $n+2$ . Plus précisément : pour obtenir l'exposant  $n$ , nous allons dériver  $x \mapsto (\sin(x))^{n+1}$  et intégrer  $x \mapsto \sin(x)$ . La formule de l'intégration par parties donne alors :

$$W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{n+2} dx = [-\cos(x) \cdot (\sin(x))^{n+1}]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cdot (\sin(x))^n \cos(x) dx,$$

donc :  $W_{n+2} = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^n (\cos(x))^2 dx$ . En utilisant la formule :  $\cos^2 = 1 - \sin^2$ , on obtient :

$$W_{n+2} = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^n dx - (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{n+2} dx = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2},$$

c'est-à-dire  $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ , puis :

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

On en déduit la relation demandée par récurrence. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $P_n$  la proposition :  
«  $W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$ . »

Pour  $n = 0$  on a :  $W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx = [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$ , et :  $\frac{2^{2 \cdot 0}(0!)^2}{(2 \cdot 0 + 1)!} = 1 = W_1$ , d'où  $P_0$ . À

présent, si  $n \in \mathbb{N}$  est un entier tel que  $P_n$ , alors :

$$\begin{aligned} W_{2(n+1)+1} &= W_{2n+3} = \frac{2n+2}{2n+3} W_{2n+1} \stackrel{[P_n]}{=} \frac{2n+2}{2n+3} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{(2n+2)^2}{(2n+3)(2n+2)} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \\ &= \frac{2^2 \cdot (n+1)^2 \cdot 2^{2n}(n!)^2}{(2n+3)!} \\ &= \frac{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2}{(2(n+1)+1)!}, \end{aligned}$$

d'où  $P_{n+1}$ .

Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité, par principe de récurrence on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

10. L'application  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  peut s'écrire  $x \mapsto (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$  : or nous connaissons le développement en série entière de  $x \mapsto (1+x)^\alpha$  pour tout  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Nous allons l'utiliser avec  $\alpha = -\frac{1}{2}$  et le composer avec  $x \mapsto -x^2$ , pour obtenir celui demandé. On a, pour rappel :

$$\forall \alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}, \quad \forall x \in ]-1, 1[, \quad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k)}{n!} x^n.$$

Posons  $\alpha = -\frac{1}{2}$ . Pour tout  $x \in ]-1, 1[$ , on a  $-x^2 \in ]-1, 1[$ , et on peut donc évaluer en  $-x^2$  l'égalité ci-dessus pour obtenir :

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2} - k\right)}{n!} (-x^2)^n.$$

Pour les besoins de la question suivante, nous allons simplifier le terme général. Pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , on a :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2} - k\right) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2} \cdot (2k+1)\right) = \frac{(-1)^n}{2^n} \prod_{k=0}^{n-1} (2k+1).$$

La méthode pour écrire sous forme compacte un produit d'entiers impairs est standard : on multiplie et divise par le produit de tous les entiers pairs, afin de faire apparaître le produit de tous les entiers jusqu'à un certain rang (et donc une factorielle), et on factorise chaque entier pair par 2. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) = \prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) \frac{\prod_{k=1}^n (2k)}{\prod_{k=1}^n (2k)} = \frac{(2n)!}{2^n \prod_{k=1}^n k} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \prod_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2} - k\right) = \frac{(-1)^n}{2^n} \times \frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} n!}.$$

Comme, de plus, pour tout  $x \in ]-1, 1[$  et tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  on a :  $(-x^2)^n = (-1)^n x^{2n}$ , on en déduit le développement en série entière plus compact :

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}.$$

Passons à l'arc sinus. On a :

$$\arcsin(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} t^{2n} dt.$$

Or la série entière  $\sum_{n \geq 0} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$  est de rayon de convergence 1, donc on peut l'intégrer terme à terme sur tout segment inclus dans  $] - 1, 1[$ . On en déduit :

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

En conclusion, pour tout  $x \in ] - 1, 1[$  :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}, \quad \arcsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

11. Soit  $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$ . En posant  $x = \sin(t) \in [0, 1[$  dans le développement en série entière de l'arc sinus, on obtient :

$$\arcsin(\sin(t)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{(\sin(t))^{2n+1}}{2n+1},$$

et  $\arcsin(\sin(t)) = t$  car  $t \in [0, \frac{\pi}{2}[ \subseteq [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , d'où le résultat désiré (quitte à renommer  $t$  en  $x$ ).

12. Il s'agit de justifier l'interversion des symboles  $\sum_{n=0}^{+\infty}$  et  $\int_0^{\frac{\pi}{2}}$ . Nous allons utiliser le théorème d'intégration terme à terme positif. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[ , \quad g_n(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{(\sin(x))^{2n+1}}{2n+1}.$$

L'application  $g_n$  se prolonge en une fonction continue sur le segment  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , donc elle y est intégrable et elle est intégrable sur  $[0, \frac{\pi}{2}[$ . De plus elle est positive sur cet intervalle et sa somme est continue (c'est la fonction  $x \mapsto x$  d'après la question précédente), donc par le théorème d'intégration terme à terme positif on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} g_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g_n$$

ce qui donne immédiatement le résultat voulu.

**Autre démonstration.** On pouvait aussi démontrer cette interversion avec l'autre théorème d'intégration terme à terme, valable *a priori* sur les segments, mais cela nécessite de remarquer que la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$  converge aussi en  $x = 1$ . Faisons-le. Si on essaie d'appliquer la règle

de D'Alembert, on tombe sur le cas d'incertitude  $L = 1$ . Pour étudier sa nature, nous allons donc déterminer un équivalent asymptotique simple de son terme général, avec la formule de Stirling. On a, pour tout  $n$  au voisinage de  $+\infty$  :

$$\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{1}{2n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2^{2n} (2\pi n) \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} \times \frac{1}{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{n\sqrt{n}} > 0,$$

or la série de Riemann  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$  converge parce que son exposant est  $\frac{3}{2} > 1$ . Donc, d'après le

théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{1}{2n+1}$  converge. Par

le théorème d'Abel radial, on en déduit que le développement en série entière de l'arc sinus reste valable pour  $x = 1$ , et donc que la relation de la question 11 reste valable pour  $x = \frac{\pi}{2}$ . Ainsi elle est valable sur un SEGMENT et il suffit de montrer la convergence uniforme sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  pour intégrer terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad g_n(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{(\sin(x))^{2n+1}}{2n+1}.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , on a :  $|g_n(x)| \leq \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{1}{2n+1}$ . On en déduit, par propriété de la borne supérieure :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|g_n\|_{\infty} \leq \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{1}{2n+1}.$$

Or nous avons démontré ci-dessus que la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{1}{2n+1}$  converge. D'après le théorème

de comparaison des séries à termes positifs, la série  $\sum_{n \geq 0} \|g_n\|_{\infty}$  converge donc : d'où le résultat.

Ayant la convergence uniforme de la série de fonctions continues  $\sum_{n \geq 0} g_n$  sur le segment  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , on a d'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{(\sin(x))^{2n+1}}{2n+1} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{1}{2n+1} (\sin(x))^{2n+1} dx,$$

d'où le résultat.

13. D'après la question 9 on a :  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{2n+1} dx = W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$ . Donc par la question précédente et la question 11 :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{(2n)!}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Or on a facilement :  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}$ . Donc :

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

On conclut avec la question 8, et on a :  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

## Partie II

14. Soit  $x \in ]-1, 1[$ . On a :  $|x^2| < 1$ , donc :

$$\frac{1}{x^2 - 1} = -\frac{1}{1 - x^2} = -\sum_{n=0}^{+\infty} (x^2)^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}.$$

On a donc :  $\frac{\ln(x^2)}{x^2 - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^{2n} \ln(x))$  pour tout  $x \in ]0, 1[$ , puis :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^{2n} \ln(x)) dx \stackrel{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-x^{2n} \ln(x)) dx,$$

toutes les fonctions en jeu étant continues par morceaux sur  $]0, 1[$ . L'égalité (\*) est licite par le théorème d'intégration terme à terme positif. En effet :

- on a positivité et continuité par morceaux sur  $]0, 1[$  de la fonction  $f_n : x \mapsto -x^{2n} \ln(x)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ;
- la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge simplement et sa somme est  $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2 - 1}$ , qui est bien continue sur  $]0, 1[$ ;
- il reste à justifier l'intégrabilité sur  $]0, 1[$  de  $f_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  (comme  $f_n \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , cela équivaut à la convergence de son intégrale sur  $]0, 1[$ ); nous allons faire mieux en calculant l'intégrale sur  $]0, 1[$  de  $f_n$  en même temps, *via* une intégration par parties, où l'on dérive  $x \mapsto -\ln(x)$  et intègre  $x \mapsto x^{2n}$ ; comme :

$$\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 1} -\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \ln(x) = 0,$$

la formule de l'intégration par parties assure que les intégrales  $\int_0^1 -x^{2n} \ln(x) dx$  et  $\int_0^1 -\frac{x^{2n}}{2n+1} dx$  sont de même nature (donc convergentes, puisque la seconde est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment), et on a :

$$\int_0^1 -x^{2n} \ln(x) dx = \left[ -\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \ln(x) \right]_0^1 + \frac{1}{2n+1} \int_0^1 x^{2n} dt = \frac{1}{(2n+1)^2},$$

ce qui montre à la fois l'intégrabilité de  $f_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  sur  $]0, 1[$ , et que son intégrale égale  $\frac{1}{(2n+1)^2}$ .

En conclusion, on a montré :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-x^{2n} \ln(x)) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Ce calcul montre en passant que l'intégrale  $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} dx$  converge, étant donné que cette somme est finie (la famille de réels positifs  $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$  est sommable puisque sa somme est celle d'une série de Riemann d'exposant  $2 > 1$ , donc ses familles extraites sont sommables également).

15. Nous allons utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètres. Posons :

$$\forall (x, t) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad g(x, t) = \frac{\arctan(tx)}{1 + t^2}.$$

Alors :

- pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , l'application  $x \mapsto g(x, t)$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ ;
- pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ , l'application  $t \mapsto g(x, t)$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}_+$ ;

— pour tout  $(t, x) \in (\mathbb{R}_+)^2$ , on a :

$$|g(x, t)| \leq \frac{1}{1+t^2} \quad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION})$$

et l'application  $\varphi : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$  puisqu'elle est continue sur cet intervalle, et que  $|\varphi| = \varphi$  admet comme primitive l'arc tangente, qui admet une limite finie (égale à  $\frac{\pi}{2}$ ) en  $+\infty$ .

Par le théorème de continuité sous le signe intégrale, d'une part  $t \mapsto g(x, t)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ , et d'autre part  $f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}_+$ , ce qu'il fallait démontrer.

16. On reprend les notations de la question précédente. Nous allons utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètres :

— pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , l'application  $x \mapsto g(x, t)$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, 1[$  et on a :

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times ]0, 1[, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \frac{t}{1+(xt)^2} \frac{1}{1+t^2};$$

— pour tout  $x \in ]0, 1[$ , l'application  $t \mapsto g(x, t)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  d'après la question précédente;

— pour tout  $x \in ]0, 1[$ , l'application  $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}_+$ ;

— pour tout segment  $[a, b]$  inclus dans  $]0, 1[$  et tout  $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times [a, b]$ , on a :

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{t}{(1+(at)^2)(1+t^2)}. \quad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION})$$

Justifions que l'application  $\varphi : t \mapsto \frac{t}{(1+(at)^2)(1+t^2)}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$  : elle est continue sur cet intervalle, et on a :

$$\varphi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{a^2} \frac{1}{t^3} > 0,$$

or on sait que les fonctions de Riemann d'exposant strictement supérieur à 1 sont intégrables au voisinage de  $+\infty$ , donc par comparaison il en est de même de  $\varphi$  : d'où le résultat.

Par le théorème de dérivation sous le signe intégrale, vérifié sur tout segment de  $]0, 1[$ , d'une part  $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  pour tout  $x \in ]0, 1[$ , et d'autre part  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, 1[$ . De plus :

$$\forall x \in ]0, 1[, \quad f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+(xt)^2} \frac{1}{1+t^2} dt.$$

17. Soit  $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times ]0, 1[$ . On a :

$$\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2 t}{1+t^2 x^2} = \frac{t(1+t^2 x^2) - x^2 t(1+t^2)}{(1+t^2)(1+t^2 x^2)} = (1-x^2) \frac{t}{(1+t^2)(1+t^2 x^2)}$$

et on en déduit, par la question précédente :

$$\begin{aligned}
 \forall x \in ]0, 1[, \quad f'(x) &= \frac{1}{1-x^2} \int_0^{+\infty} \left( \frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2 t}{1+t^2 x^2} \right) dt \\
 &= \frac{1}{1-x^2} \left[ \frac{\ln(1+t^2) - \ln(1+t^2 x^2)}{2} \right]_0^{+\infty} \\
 &= \frac{1}{1-x^2} \left[ \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+t^2}{1+t^2 x^2} \right) \right]_0^{+\infty} \\
 &= \frac{\ln \left( \frac{1}{x^2} \right)}{2(1-x^2)} \\
 &= -\frac{\ln(x)}{1-x^2},
 \end{aligned}$$

d'où le résultat, quitte à multiplier par  $-1$  le dénominateur.

18. On a :

$$f(0) = \int_0^{+\infty} 0 \, dt = 0, \quad f(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{1+t^2} \, dt = \left[ \frac{\arctan(t)^2}{2} \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi^2}{8},$$

or en intégrant la relation de la question précédente, on a l'existence de  $c \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\forall x \in ]0, 1[, \quad f(x) = c + \int_0^x \frac{\ln(t)}{t^2-1} \, dt.$$

Calculons la limite de chaque membre en 0. Comme l'intégrale  $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1} \, dx$  converge par la question

14, on a :  $\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^x \frac{\ln(t)}{t^2-1} \, dt = 0$ . De plus  $f$  est continue en 0 par la question 15, donc :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$ . Ainsi l'égalité ci-dessus donne, quand  $x \rightarrow 0$  :

$$0 = c.$$

Cette même égalité donne, quand  $x \rightarrow 1$ , toujours par continuité de  $f$  :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1} \, dx = f(1) = \frac{\pi^2}{8}.$$

On en déduit, par la question 14 :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

On conclut avec la question 8, et on a :  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .