Feuille d'exercices n°2

1. Convexité

Exercice 1.

Soit C_1 et C_2 deux ensembles convexes de $\mathbb{R}^n$ et $C_1+C_2=\{x+y;\ x\in C_1,\ y\in C_2\}$. Démontrer que C_1+C_2 est convexe.

Exercice 2.

Soit $\mathscr{E}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}$. Montrer que $\mathscr{E}$ est un convexe de $\mathbb{R}^2$ (on utilisera la convexité de la fonction $x\mapsto x^2$).

Exercice 3.

Soit C_1, C_2 deux parties convexes d'un espace vectoriel réel E et soit $s\in[0,1]$. On pose $C=sC_1+(1-s)C_2=\{sx+(1-s)y;\ x\in C_1,\ y\in C_2\}$. Démontrer que C est convexe.

Exercice 4.

1) $O_n(\mathbb{R})$ est-il un convexe de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?

2) Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques (matrices $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j}\geqslant 0$ et $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}=1$) est un convexe de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5.

Pour tout $E\subset\mathbb{R}^n$, on appelle enveloppe convexe de E l'ensemble

$$K(E)=\bigcap_{A\in\mathcal{E}(E)}A$$

où $\mathcal{E}(E)$ désigne l'ensemble des convexes de $\mathbb{R}^n$ contenant E.

1. Démontrer que $K(E)$ est convexe.
2. Déterminer $K(E)$ lorsque E est la courbe de la fonction $y=\tan x$ pour $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 6.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Démontrer que f est continue sur I. Le résultat subsiste-t-il si I n'est plus supposé ouvert ?

Exercice 7.

Soit E un espace vectoriel réel et A une partie de E

1. Montrer que l'intersection de deux parties convexes de E est convexe. Que dire d'une intersection quelconque de parties convexes ? Que dire d'une réunion de convexes ?
2. Montrer qu'il existe un plus petit convexe, au sens de l'inclusion, contenant A. On appelle cet ensemble *enveloppe convexe* de a et on le note $\mathrm{Conv}(A)$.
3. Montrer que $\mathrm{Conv}(A)$ est égal à l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de toute famille finies de points de A.

2. Intégrales généralisée

Exercice 8.

Les intégrales généralisées suivantes sont-elles convergentes ?

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln t dt$ **2.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{e^t - 1}$ **2.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} dt$

Exercice 9.

Quelle est la nature de l'intégrale suivante

$$\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln t}} dt$$

Exercice 10.

Les intégrales généralisées suivantes sont-elles convergentes ?

1. $\displaystyle\int_0^1 \ln t dt$ **2.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x \sin x e^{-x} dx$ **4.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln t e^{-t} dt$

5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}$

Exercice 11.

Les intégrales généralisées suivantes sont-elles convergentes ?

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t - 1}$ **2.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}dt$

3. $\displaystyle\int_0^1 \cos^2\left(\frac{1}{t}\right) dt$

Exercice 12.

Les intégrales généralisées suivantes sont-elles convergentes ?

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1}dt$ **2.** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}dx$

3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln t}}dt$

Exercice 13.

Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on souhaite déterminer la nature de

$$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}.$$

1. On suppose $\alpha > 1$. En comparant avec une intégrale de Riemann, démontrer que l'intégrale étudiée est convergente.
2. On suppose $\alpha = 1$. Calculer, pour $X > e$, $\int_e^X \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}$. En déduire les valeurs de β pour lesquelles l'intégrale converge.
3. On suppose $\alpha < 1$. En comparant à $1/t$, démontrer que l'intégrale étudiée diverge.

Exercice 14.

1. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge, et soit (x_n) et (y_n) deux suites tendant vers $+\infty$. Démontrer que $\int_{x_n}^{y_n} f(t)dt$ tend vers 0.
2. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t\sin t}dt$ diverge.

Exercice 15.

Discuter, suivant la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^\alpha}dt$ **2.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha \ln\left(x + e^{\alpha x}\right) dx$

Exercice 16.

Les intégrales généralisées suivantes sont-elles convergentes ?

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1-\sqrt{t}}$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 + t\ln\left(\frac{t}{t+1}\right)\right) dt$
3. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \left(\sqrt{x^4+x^2+1} - x\sqrt[3]{x^3+ax}\right) dx,\ a \in \mathbb{R}.$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) dt.$