Mathématiques spéciales

Feuille d'exercices n°3

1. Intégrales généralisée

Exercice 1.

Après en avoir justifié l'existence, calculer par récurrence la valeur de $I_n = \int_0^1 (\ln x)^n dx$.

Exercice 2.

Soit f une fonction continue bornée sur $[0, +\infty[$.

1. Démontrer que les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^2} dx$ et $\int_0^{+\infty} \frac{f(1/x)}{1+x^2} dx$ sont convergentes.
2. Démontrer qu'elles sont égales.
3. Application : pour $n \geq 0$, calculer $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^n)}$ et $\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)} dx$.

Exercice 3.

1. Démontrer la convergence de $\int_0^{+\infty} \big(\arctan(x+1) - \arctan(x)\big) dx$.
2. Démontrer que $\lim_{X \to +\infty} \int_X^{X+1} \arctan(x) dx = \frac{\pi}{2}$.
3. Calculer $\int_0^1 \arctan(x) dx$.
4. Calculer $\int_0^{+\infty} \big(\arctan(x+1) - \arctan(x)\big) dx$

Exercice 4.

Justifier la convergence et calculer la valeur des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}} dt$ **2.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} t e^{-\sqrt{t}} dt$

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-at} dt, \ a > 0.$

Exercice 5.

Le but de cet exercice est de calculer la valeur de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$. Pour chaque entier n, on note

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin t} dt \text{ et } J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{t} dt.$$

1. Justifier que, pour tout $n \geq 0$, I_n et J_n sont bien définis.
2. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $I_n - I_{n-1} = 0$. En déduire la valeur de I_n.

3. Soit $\phi : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\int_0^{\pi/2} \phi(t) \sin\big((2n+1)t\big)dt$ tend vers 0.
4. Démontrer que la fonction $t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}$ se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi/2]$.
5. En déduire que $J_n - I_n \to 0$.
6. Démontrer, en utilisant un changement de variables, que $J_n \to I$.
7. En déduire la valeur de I.

Exercice 6.

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, et $b > a > 0$ deux réels.

1. On suppose que $f(0) = 0$. Démontrer que

$$\lim_{x \to 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} dt = 0.$$

2. Déterminer $\lim_{x \to 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} dt$ si on ne suppose plus que $f(0) = 0$.

Exercice 7.

Déterminer la limite, lorsque $x \to 0^+$, de $\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2} dt$.

Exercice 8.

Donner un équivalent de $\int_1^x \frac{\arctan t}{t} dt$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 9.

Déterminer un équivalent simple en $+\infty$ de $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.