Mathématiques spéciales

Corrigé de la feuille d'exercices n°3

1. Intégrales généralisée

Exercice 1.

Après en avoir justifié l'existence, calculer par récurrence la valeur de $I_n = \int_0^1 (\ln x)^n dx$.

Correction.

La fonction $x \mapsto (\ln x)^n$ est continue sur $]0,1]$. De plus, au voisinage de 0, on a

$$(\ln x)^n = o(1/\sqrt{x}).$$

Par comparaison avec une intégrale de Riemann, l'intégrale est convergente en 0. On va obtenir une formule de récurrence pour exprimer I_n en fonction de I_{n-1} en réalisant une intégration par parties. Pour cela, prenons $a \in]0,1[$. On a :

$$\begin{aligned} \int_a^1 (\ln x)^n dx &= [x(\ln x)^n]_a^1 - n\int_a^1 \frac{x(\ln x)^{n-1}}{x} dx \\ &= -a(\ln a)^n - n\int_a^1 (\ln x)^{n-1} dx. \end{aligned}$$

On fait tendre a vers 0 et on obtient, puisque $a(\ln a)^n \to 0$ lorsque $a \to 0$,

$$I_n = -n\int_0^1 (\ln x)^{n-1} dx = -nI_{n-1}.$$

Par récurrence, on prouve alors facilement que

$$I_n = (-1)^n n! I_0.$$

Or, $I_0 = 1$, et donc $I_n = (-1)^n n!$.

Exercice 2.

Soit f une fonction continue bornée sur $[0,+\infty[$.

1. Démontrer que les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^2} dx$ et $\int_0^{+\infty} \frac{f(1/x)}{1+x^2} dx$ sont convergentes.
2. Démontrer qu'elles sont égales.
3. Application : pour $n \geq 0$, calculer $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^n)}$ et $\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)} dx$.

Correction.

1. Soit $M > 0$ tel que $|f(t)| \leq M$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. La fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{1+x^2}$ est alors continue sur $[0, +\infty[$, et elle vérifie $|\frac{f(x)}{1+x^2}| \leq \frac{M}{1+x^2}$ qui est intégrable au voisinage de $+\infty$. Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^2} dx$ converge. De même, $x \mapsto \frac{f(1/x)}{1+x^2}$ est alors continue sur $]0, +\infty[$ (attention, on n'a plus obligatoirement continuité en 0). Le problème en $+\infty$ se traite exactement comme précédemment, et en 0, il suffit d'observer que
$$\frac{|f(1/x)|}{1+x^2} \leq M,$$
et comme les fonctions constantes sont intégrables au voisinage de tout point, on a aussi prouvé la convergence de l'intégrale au voisinage de 0.
2. Effectuons le changement de variables $u = 1/x$. On trouve
$$\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^2} dx = -\int_0^{+\infty} \frac{f(1/u)}{1+\frac{1}{u^2}} \frac{-1}{u^2} du = \int_0^{+\infty} \frac{f(1/x)}{1+x^2} dx.$$
3. On applique le résultat des questions précédentes avec $f(x) = \frac{1}{1+x^n}$ (qui est bien continue et bornée sur $[0, +\infty[$). On trouve
$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^n)} = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)} dx := A.$$
Mais si on effectue la somme de ces deux intégrales, on trouve :
$$2A \quad = \quad \int_0^{+\infty} \frac{1+x^n}{(1+x^2)(1+x^n)} dx = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$
Ces deux intégrales sont donc égales à $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 3.

1. Démontrer la convergence de $\int_0^{+\infty} \big(\arctan(x+1) - \arctan(x)\big) dx$.
2. Démontrer que $\lim_{X \to +\infty} \int_X^{X+1} \arctan(x) dx = \frac{\pi}{2}$.
3. Calculer $\int_0^1 \arctan(x) dx$.
4. Calculer $\int_0^{+\infty} \big(\arctan(x+1) - \arctan(x)\big) dx$

Correction.

1. Par l'inégalité des accroissements finis, et puisque la dérivée de arctan est une fonction décroissante sur $[0, +\infty[$, on sait que, pour tout $x \geq 0$, on a
$$|\arctan(x+1) - \arctan(x)| \leq \frac{1}{1+x^2} \times (x+1-x) = \frac{1}{1+x^2}.$$
Par comparaison à une intégrale de Riemann (convergente), la fonction $x \mapsto \arctan(x+1) - \arctan(x)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. La fonction arctan croit vers $\pi/2$ en $+\infty$. Il existe donc un réel A tel que, pour

tout $x \geq A$, on a
$$\frac{\pi}{2} - \varepsilon \leq \arctan x \leq \frac{\pi}{2}.$$
Mais alors, pour $X \geq A$, en intégrant cette dernière inégalité entre X et $X+1$, on a
$$\frac{\pi}{2} - \varepsilon \leq \int_X^{X+1} \arctan(x)dx \leq \frac{\pi}{2}$$
ce qui prouve bien ce que nous voulions démontrer. Une autre méthode est de remarquer que, puisque la fonction arctan est croissante, pour tout $x \in [X, X+1]$, on a
$$\arctan X \leq \arctan x \leq \arctan(X+1).$$
Par intégration, on a
$$\arctan X \leq \int_X^{X+1} \arctan(x)dx \leq \arctan(X+1).$$
Mais $\arctan(X) \to \pi/2$ et $\arctan(X+1) \to \pi/2$ lorsque $X \to +\infty$. Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $\int_X^{X+1} \arctan(x)dx$ tend vers $\pi/2$ également.

3. Calculons cette intégrale par intégration par parties. En effet,
$$\begin{aligned}\int_0^1 \arctan(x)dx &= [x \arctan x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}[\ln(1+x^2)]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2).\end{aligned}$$

4. Posons, pour $X > 0$, $F(X) = \int_0^X \big(\arctan(x+1) - \arctan(x)\big)dx$. Alors
$$\begin{aligned}F(X) &= \int_0^X \arctan(x+1)dx - \int_0^X \arctan(x)dx \\ &= \int_1^{X+1} \arctan(x)dx - \int_0^X \arctan(x)dx \\ &= \int_X^{X+1} \arctan(x)dx - \int_0^1 \arctan(x)dx.\end{aligned}$$
D'après les questions précédentes, en faisant tendre X vers $+\infty$, on en déduit que
$$\int_0^{+\infty} \big(\arctan(x+1) - \arctan(x)\big)dx = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}.$$

Exercice 4.

Justifier la convergence et calculer la valeur des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}dt$ **2.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-\sqrt{t}}dt$

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-at}dt,\ a>0.$

Correction.

1. Au voisinage de 0, la fonction à intégrer est équivalente à $\ln t$, qui est une fonction intégrable en 0. Au voisinage de 1, on a
$$\frac{\ln t}{\sqrt{1-t}} \sim_1 \frac{t-1}{\sqrt{1-t}} = -\sqrt{1-t}.$$
La fonction se prolonge donc par continuité en 1, ce qui achève de prouver la convergence de l'intégrale entre 0 et 1. Pour calculer sa valeur, on réalise le changement de variables $u=\sqrt{1-t}$. On trouve :
$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}dt &= 2\int_0^1 \ln(1-u^2)du\\ &= 2\int_0^1 \ln(1-u)du + 2\int_0^1 \ln(1+u)du\\ &= 2\int_0^1 \ln(x)dx + 2\int_1^2 \ln(x)dx\\ &= 2\int_0^2 \ln(x)dx\\ &= 2\left[x\ln x - x\right]_0^2\\ &= 4\ln 2 - 4.\end{aligned}$$

2. Pour la convergence de l'intégrale, il suffit de remarquer que la fonction est continue sur $[0,+\infty[$ et qu'au voisinage de $+\infty$, elle est dominée par $\frac{1}{t^2}$. En effet, on a
$$t^2\times te^{-\sqrt{t}} = t^3e^{-\sqrt{t}} = e^{3\ln t-\sqrt{t}} \to 0 \text{ en } +\infty.$$
Pour le calcul de l'intégrale, on commence par effectuer le changement de variables $u=\sqrt{t}$. On obtient :
$$\int_0^{+\infty} te^{-\sqrt{t}}dt = 2\int_0^{+\infty} u^3e^{-u}du.$$
On effectue ensuite des intégrations par parties successives :
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} te^{-\sqrt{t}}dt &= 2\left[-u^3e^{-u}\right]_0^{+\infty} + 6\int_0^{+\infty} u^2e^{-u}du\\ &= 6\left[-u^2e^{-u}\right]_0^{+\infty} + 12\int_0^{+\infty} ue^{-u}du\\ &= 12\left[-ue^{-u}\right]_0^{+\infty} + 12\int_0^{+\infty} e^{-u}du\\ &= 12.\end{aligned}$$

3. On remarque d'abord que $|\sin(t)e^{-at}| \leq e^{-at}$ qui est une fonction intégrable sur $[0,+\infty[$ (car $a > 0$) et donc la fonction $t \mapsto \sin(t)e^{-at}$ est elle-même intégrable. Pour calculer l'intégrale, il suffit d'écrire que $\sin t$ est la partie imaginaire de e^{it}... Il vient

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-at} &= \Im m\left(\int_0^{+\infty} e^{(i-a)t}dt\right)\\ &= \Im m\left(\left[\frac{1}{i-a}e^{(i-a)t}\right]_0^{+\infty}\right)\\ &= \Im m\left(\frac{1}{a-i}\right)\\ &= \frac{1}{a^2+1}.\end{aligned}$$

Exercice 5.

Le but de cet exercice est de calculer la valeur de $I = \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$. Pour chaque entier n, on note

$$I_n = \int_0^{\pi/2}\frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin t}dt \text{ et } J_n = \int_0^{\pi/2}\frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{t}dt.$$

1. Justifier que, pour tout $n \geq 0$, I_n et J_n sont bien définis.
2. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $I_n - I_{n-1} = 0$. En déduire la valeur de I_n.
3. Soit $\phi : [0,\pi/2] \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\int_0^{\pi/2}\phi(t)\sin\big((2n+1)t\big)dt$ tend vers 0.
4. Démontrer que la fonction $t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}$ se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $[0,\pi/2]$.
5. En déduire que $J_n - I_n \to 0$.
6. Démontrer, en utilisant un changement de variables, que $J_n \to I$.
7. En déduire la valeur de I.

Correction.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin t}$ est continue sur $]0,\pi/2]$. Elle se prolonge par continuité en 0 par la valeur $2n+1$. Ainsi, il n'y a pas de problèmes de convergence en 0. Le raisonnement est identique pour la fonction $t \mapsto \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{t}$.
2. Il suffit de remarquer que $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et que, pour tout entier $n \geq 1$, on a grâce à une formule de trigonométrie
$$I_n - I_{n-1} = \int_0^{\pi/2} 2\cos(2nt)dt = 0.$$

3. Ceci résulte d'une intégration par parties. En effet,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\phi(t)\sin\big((2n+1)t\big)dt &= -\frac{1}{2n+1}\Bigg(\phi(\pi/2)\cos\big((2n+1)\pi/2\big)-\phi(0)\\ &\quad -\int_0^{\pi/2}\phi'(t)\cos\big((2n+1)t\big)dt.\Bigg)\end{aligned}$$

Puisque

$$\left|\int_0^{\pi/2}\phi'(t)\cos\big((2n+1)t\big)dt\right|\leq\int_0^{\pi/2}|\phi'(t)|dt,$$

on en déduit bien la convergence vers zéro souhaitée.

4. Il est facile de voir que $\phi(t)\sim_0 -\frac{t}{6}$, ce qui prouve que ϕ se prolonge par continuité en 0. De plus, on a

$$\phi'(t)=\frac{t^2\cos t-\sin^2 t}{t^2\sin^2 t}.$$

Pour t tendant vers 0, l'utilisation des développements limités prouve facilement que $\phi'(t)$ tend vers $-1/6$. Par le théorème de prolongement d'une dérivée, ceci prouve que ϕ définit une fonction C^1 sur $[0,\pi/2]$.

5. On a

$$I_n-J_n=\int_0^{\pi/2}\phi(t)\sin\big((2n+1)t\big)dt,$$

avec $\phi(t)=\frac{1}{\sin t}-\frac{1}{t}$. D'après les deux questions précédentes, on a bien $I_n-J_n\to 0$.

6. Ceci vient du changement de variables $u=(2n+1)t$:

$$J_n=\int_0^{(2n+1)\pi/2}\frac{\sin t}{t}dt\to I.$$

7. On a $I=\lim_n J_n=\lim_n I_n=I_0=\frac{\pi}{2}$.

Exercice 6.

Soit $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ une fonction continue, et $b>a>0$ deux réels.

1. On suppose que $f(0)=0$. Démontrer que

$$\lim_{x\to 0^+}\int_{ax}^{bx}\frac{f(t)}{t}dt=0.$$

2. Déterminer $\lim_{x\to 0^+}\int_{ax}^{bx}\frac{f(t)}{t}dt$ si on ne suppose plus que $f(0)=0$.

Correction.

1. Notons, pour $x>0$, $\varepsilon(x)=\sup\{|f(t)|;\ t\in[ax,bx]\}$. Puisque f est continue en 0 et que

$f(0)=0$, alors $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$. Mais on peut écrire que

$$\left|\int_{ax}^{bx}\frac{f(t)}{t}dt\right|\leq \varepsilon(x)\int_{ax}^{bx}\frac{dt}{t}=\varepsilon(x)\ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Ceci tend bien vers 0 si x tend vers 0.

2. Posons $g(x)=f(x)-f(0)$. Alors d'après la question précédente,

$$\lim_{x\to 0^+}\int_{ax}^{bx}\frac{g(t)}{t}dt=0.$$

Mais, puisque $\int_{ax}^{bx}\frac{f(0)}{t}dt=f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$, on en déduit par linéarité que

$$\lim_{x\to 0^+}\int_{ax}^{bx}\frac{f(t)}{t}dt=f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Exercice 7.

Déterminer la limite, lorsque $x\to 0^+$, de $\int_x^{2x}\frac{\sin t}{t^2}dt$.

Correction.

On sait que $\sin t=t+t^2\varepsilon(t)$ où la fonction ε tend vers 0 en 0. On a donc

$$\int_x^{2x}\frac{\sin t}{t^2}dt=\int_x^{2x}\frac{dt}{t}+\int_x^{2x}\varepsilon(t)dt=\ln 2+\int_x^{2x}\varepsilon(t)dt.$$

Puisque la fonction ε est bornée (disons par M) au voisinage de 0, on a

$$\left|\int_x^{2x}\varepsilon(t)dt\right|\leq Mx\to 0,$$

et donc la limite recherchée est $\ln 2$.

Exercice 8.

Donner un équivalent de $\int_1^x\frac{\arctan t}{t}dt$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Correction.

Au voisinage de $+\infty$, $\frac{\arctan t}{t}\sim_{+\infty}\frac{\pi}{2t}$, qui est une fonction positive et dont l'intégrale diverge au voisinage de $+\infty$. D'après le théorème d'intégration des relations de comparaison, on déduit que

$$\int_1^x\frac{\arctan t}{t}dt\sim_{+\infty}\int_1^x\frac{\pi}{2t}dt.$$

Puisque cette dernière intégrale se calcule aisément, on conclut que

$$\int_1^x \frac{\arctan t}{t} dt \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2} \ln x.$$

Exercice 9.

Déterminer un équivalent simple en $+\infty$ de $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

Correction.

On remarque d'abord que $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ converge : en effet, la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$ et $\lim_{t\to+\infty} t^2 \frac{e^{-t}}{t} = 0$. On intègre ensuite par parties, en intégrant $t \mapsto e^{-t}$ et en dérivant $t \mapsto \frac{1}{t}$. On obtient, pour $x > 1$,

$$\begin{aligned}\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt &= \left[-\frac{e^{-t}}{t}\right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt \\ &= \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt.\end{aligned}$$

Or, au voisinage de $+\infty$,

$$\frac{e^{-t}}{t^2} =_{+\infty} o\left(\frac{e^{-t}}{t}\right).$$

Par intégration des relations de comparaison (les fonctions sont positives et intégrables), on trouve

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt =_{+\infty} o\left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\right).$$

On en déduit que

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \sim_{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}.$$