

## Feuille d'exercices n°4

Après avoir fait quelques exercices de la partie 1 - Normes, n'oubliez pas d'aller jeter un oeil à la partie 2 - Boules/distances !

**1. Normes****a. Exercices basiques****Exercice 1.**

Sur  $E = \mathbb{R}[X]$ , on définit  $N_1$  et  $N_2$  par

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| \text{ et } N_2(P) = \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)|.$$

Démontrer que  $N_1$  et  $N_2$  sont deux normes sur  $E$ .

**Exercice 2.**

Soit  $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ . On définit

$$N(f) = |f(0)| + \|f'\|_{\infty}, \quad N'(f) = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty}.$$

Démontrer que  $N$  et  $N'$  sont deux normes sur  $E$ .

**Exercice 3.**

Soit  $E$  l'espace vectoriel des suites à valeurs dans  $\mathbb{K}$  convergentes. On considère l'application  $\|\cdot\|$  défini par :

$$\text{pour } u = (u_n) \in E, \quad \|u\| = \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n|.$$

1. Montrer que  $\|\cdot\|$  est une semi-norme sur  $E$  i.e.  $\|\cdot\|$  vérifie tous les axiomes d'une norme excepté l'axiome de séparation.
2. Donner un exemple de suite qui ne satisfait pas à l'axiome de séparation.

**Exercice 4.**

Dites si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :

1. Si  $(E, N)$  est un espace vectoriel normé,  $x \in E$ ,  $r > 0$  et  $B(x, r)$  est la boule de centre  $x$  et de rayon  $r > 0$ , alors pour tout  $\lambda > 0$ ,  $\lambda B(x, r) = B(x, \lambda r)$ .

2.  $N : (x, y) \mapsto |5x + 3y|$  est une norme sur  $\mathbb{R}^2$ .
3. Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé, et  $x, y$  deux vecteurs de  $E$  tels que  $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ . Alors  $x \in \text{vect}(y)$ .
4. Soit  $E = \mathbb{R}_1[X]$ . Alors  $N : P \mapsto |P(0)| + |P(1)|$  est une norme sur  $E$ .

### Exercice 5.

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé.

1. Démontrer que, pour tous  $x, y \in E$ , on a

$$\|x\| + \|y\| \leq \|x + y\| + \|x - y\|.$$

En déduire que

$$\|x\| + \|y\| \leq 2 \max(\|x + y\|, \|x - y\|).$$

La constante 2 peut elle être améliorée ?

2. On suppose désormais que la norme est issue d'un produit scalaire. Démontrer que, pour tous  $x, y \in E$ , on a

$$(\|x\| + \|y\|)^2 \leq \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2.$$

En déduire que

$$\|x\| + \|y\| \leq \sqrt{2} \max(\|x + y\|, \|x - y\|).$$

La constante  $\sqrt{2}$  peut elle être améliorée ?

### Exercice 6.

Soient  $a_1, \dots, a_n$  des réels et  $N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$N(x_1, \dots, x_n) = a_1|x_1| + \dots + a_n|x_n|.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les  $a_k$  pour que  $N$  soit une norme sur  $\mathbb{R}^n$ .

### Exercice 7.

Soient  $N_1$  et  $N_2$  deux normes sur un espace vectoriel  $E$ . On pose  $N = \max(N_1, N_2)$ . Démontrer que  $N$  est une norme sur  $E$ .

### Exercice 8.

On définit une application sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  en posant

$$N(A) = n \max_{i,j} |a_{i,j}| \text{ si } A = (a_{i,j}).$$

Vérifier que l'on définit bien une norme sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , puis qu'il s'agit d'une norme d'algèbre,

c'est-à-dire que

$$N(AB) \leq N(A)N(B) \text{ pour toutes matrices } A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

### Exercice 9.

Soit  $a, b > 0$ . On pose, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $N(x, y) = \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}$ .

1. Prouver que  $N$  est une norme.
2. Dessiner la boule de centre 0 et de rayon 1.
3. Déterminer le plus petit nombre  $p > 0$  tel que  $N \leq p\|\cdot\|_2$  et le plus grand nombre  $q$  tel que  $q\|\cdot\|_2 \leq N$ .

### Exercice 10.

Sur  $E = \mathbb{R}[X]$ , on définit  $N_1$  et  $N_2$  par

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| \text{ et } N_2(P) = \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)|.$$

1. Démontrer que  $N_1$  et  $N_2$  sont deux normes sur  $E$ .
2. Étudier pour chacune des deux normes la convergence de la suite  $(P_n)$  définie par  $P_n = \frac{1}{n}X^n$ .

### Exercice 11.

Soit  $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ . Pour  $f \in E$ , on pose

$$N(f) = \left( f^2(0) + \int_0^1 (f'(t))^2 dt \right)^{1/2}.$$

1. Démontrer que  $N$  est une norme sur  $E$ .
2. Démontrer que, pour tout  $f \in E$ ,  $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2}N(f)$ .

## b. Exercices d'entraînement

### Exercice 12.

Pour tout  $x = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ , on définit

$$N(x) = \sqrt{a^2 + 2ab + 5b^2}.$$

Démontrer que  $N$  est une norme sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 13.**

Pour  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on définit

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B).$$

1. Démontrer que cette formule définit un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On notera  $N$  la norme associée.
2. Démontrer que, pour tous  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on a  $N(AB) \leq N(A)N(B)$ .

**c. Exercices d'approfondissement****Exercice 14.** (\*) *Les normes  $p$  sur  $\mathbb{R}^n$ , pour  $1 < p < +\infty$* 

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p, q \in ]1, +\infty[$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

1. Montrer que pour tous  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+$  et tous  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+^*$ , on a :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \leq \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i \right)^{\frac{1}{q}}.$$

2. En déduire que, pour tous  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+$  et  $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}_+^*$ , on a :

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}};$$

puis montrer que cette dernière inégalité est toujours vraie quand  $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}_+$ .

Cette inégalité est connue sous le nom de **Inégalité de Hölder**.

3. En utilisant l'inégalité de Hölder, démontrer l'**inégalité de Minkowski**, i.e. pour tous  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+$  et  $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}_+$  :

$$\left( \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{i=1}^n y_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

4. On considère l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$  et l'application de  $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  définie par :

$$\text{pour } x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Montrer que  $\|\cdot\|_p$  est une norme sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Exercice 15.**

Soit  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$ . Pour tout polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$ , on pose

$$\|P\|_A = \sup_{x \in A} |P(x)|.$$

Quelles conditions  $A$  doit-elle satisfaire pour que l'on obtienne une norme sur  $\mathbb{R}[X]$  ?

**2. Boules / Distances****Exercice 16.**

On considère l'espace vectoriel normé  $(\ell^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ .

1. Déterminer la distance de la suite  $u$  constante en 1 au sous-espace vectoriel  $c_0(\mathbb{R})$  des suites à valeurs réelles convergant vers 0.
2. Déterminer la distance de la suite  $v = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  au sous-espace vectoriel  $\mathcal{C}$  des suites à valeurs réelles convergentes.

**Exercice 17.**

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé et  $x, y \in E$ . Démontrer que  $x + B_f(y, r) = B_f(x + y, r)$ .

*Remarque :*  $x + B_f(y, r)$  est l'ensemble  $\{x + z \mid z \in B_f(y, r)\}$ .

**Exercice 18.**

Soit  $E$  un espace vectoriel et  $N : E \mapsto \mathbb{R}$  une fonction telle que :

- i)  $N$  est positive sur  $E$  ;
- ii) pour tout  $x \in E$ ,  $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$  ;
- iii) pour tous  $x \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$  ;

Montrer que  $N$  est une norme si, et seulement si,  $B_f = \{x \in E \mid N(x) \leq 1\}$  est convexe.

**Exercice 19.**

Soit  $E = C([0, 1], \mathbb{R})$  muni de la norme infinie et

$$A = \left\{ f \in E \mid f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t)dt \geq 1 \right\}.$$

Montrer que pour tout  $f \in A$ ,  $\|f\|_\infty > 1$  et déterminer  $d(0_E, A)$ .

**Exercice 20.**

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé avec  $E \neq \{0\}$  et  $x, x' \in E$  et  $r, r' \in \mathbb{R}_+^*$ .  
Montrer  $B_f(x, r) = B_f(x', r')$  si, et seulement si,  $x = x'$  et  $r = r'$ .

**Indication.**

Une implication est évidente, montrer l'implication réciproque par contraposée en commençant par le cas :  $x = x'$  et  $r \neq r'$ .  
Ensuite, dans le cas  $x \neq x'$ , faire un dessin !

**Exercice 21.**

Soit  $E$  un espace vectoriel normé. Pour  $a \in E$  et  $r > 0$ , on note  $\bar{B}(a, r)$  la boule fermée de centre  $a$  et de rayon  $r$ . On fixe  $a, b \in E$  et  $r, s > 0$ .

1. On suppose que  $\bar{B}(a, r) \subset \bar{B}(b, s)$ . Démontrer que  $\|a - b\| \leq s - r$ .
2. On suppose que  $\bar{B}(a, r) \cap \bar{B}(b, s) = \emptyset$ . Montrer que  $\|a - b\| > r + s$ .