Mathématiques spéciales

Corrigé de la feuille d'exercices n°4

Après avoir fait quelques exercices de la partie 1 - Normes, n'oubliez pas d'aller jeter un oeil à la partie 2 - Boules/distances !

1. Normes

a. Exercices basiques

Exercice 1.

Sur $E = \mathbb{R}[X]$, on définit N_1 et N_2 par

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| \text{ et } N_2(P) = \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)|.$$

Démontrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur E.

Correction.

On vérifie d'abord que ces deux quantités sont bien définies. En particulier, la somme apparaissant dans $N_1(P)$ est en réalité une somme finie. Prenons ensuite P, Q dans E et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $k \geq 0$,

$$|(P+Q)^{(k)}(0)| \leq |P^{(k)}(0)| + |Q^{(k)}(0)|$$

et donc, en passant à la somme $N_1(P+Q) \leq N_1(P)+N_1(Q)$. On a clairement $N_1(\lambda P) = |\lambda| N_1(P)$. Enfin, si $N_1(P) = 0$, alors 0 est une racine de multiplicité infinie de P, ce qui entraîne que $P = 0$. Passons maintenant à N_2. On a, pour tout $t \in [-1, 1]$,

$$|(P+Q)(t)| \leq |P(t)| + |Q(t)| \leq N_2(P) + N_2(Q).$$

En passant au sup pour $t \in [-1, 1]$, on en déduit que

$$N_2(P+Q) \leq N_2(P) + N_2(Q).$$

Il est clair que $N_2(\lambda P) = |\lambda| N_2(P)$, et si $N_2(P) = 0$, alors P admet une infinité de racines, donc $P = 0$. Ainsi, N_2 est également une norme sur E.

Exercice 2.

Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. On définit

$$N(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty, \quad N'(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

Démontrer que N et N' sont deux normes sur E.

Correction.

Remarquons d'abord que N est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et prenons $f, g \in E$. Alors on a $N(f) = 0$ si et seulement $f(0) = 0$ et $f' \equiv 0$. La deuxième condition entraîne que f est constante sur $[0, 1]$ et la première que f est identiquement nulle. De plus, on a clairement $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$ et

$$N(f + g) \leq |f(0)| + |g(0)| + \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty = N(f) + N(g).$$

N est une norme, et la preuve est identique, mais plus simple, pour N'.

Exercice 3.

Soit E l'espace vectoriel des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ convergentes. On considère l'application $\|\cdot\|$ définit par :

$$\text{pour } u = (u_n) \in E, \qquad \|u\| = \lim_{n\to\infty} |u_n|.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une semi-norme sur E i.e. $\|.\|$ vérifie tous les axiomes d'une norme excepté l'axiome de séparation.
2. Donner un exemple de suite qui ne satisfait pas à l'axiome de séparation.

Correction.

1. Soit $u = (u_n), v = (v_n) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On note $U = \lim_{n\to\infty} |u_n|$ et $V = \lim_{n\to\infty} |v_n|$.
   - *Positivité* $\|u\| = \lim_{n\to\infty} |u_n| = |U| \geq 0$.
   - *Homogénéité* $\|\lambda u\| = \lim_{n\to\infty} |\lambda u_n| = |\lambda||U| = |\lambda|\|u\|$.
   - *Inégalité triangulaire*

$$\begin{aligned} \|u + v\| &= \lim_{n\to\infty} |u_n + v_n| \\ &\leq \lim_{n\to\infty} |u_n| + |v_n| \\ &\leq |U| + |V| = \|u\| + \|v\|. \end{aligned}$$

2. *Séparation non vérifiée :* Une suite qui converge vers 0 a une "norme" égale à 0 ! Or si elle possède au moins un terme non nul (on peut prendre par exemple $(e^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$), elle est différente de la suite constante en 0 (qui constitue le vecteur nul de E). Donc l'axiome de séparation n'est pas vérifié.

Exercice 4.

Dites si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :

1. Si (E, N) est un espace vectoriel normé, $x \in E$, $r > 0$ et $B(x, r)$ est la boule de centre x et de rayon $r > 0$, alors pour tout $\lambda > 0$, $\lambda B(x, r) = B(x, \lambda r)$.
2. $N : (x, y) \mapsto |5x + 3y|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et x, y deux vecteurs de E tels que $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$. Alors $x \in \text{vect}(y)$.
4. Soit $E = \mathbb{R}_1[X]$. Alors $N : P \mapsto |P(0)| + |P(1)|$ est une norme sur E.

Correction.

1. Non ! $\lambda B(x,r) = B(\lambda x, \lambda r)$ et la formule proposée ne fonctionne que si $x = 0$.
2. Posons $y = 5$ et $x = -3$. Alors $5x + 3y = 0$, d'où $N(-3,5) = 0$ sans que $(-3,5)$ ne soit le vecteur nul. N n'est pas une norme !
3. On va donner un contre exemple avec $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$. Prenons en effet $x = (1,0)$ et $y = (1,1)$. Alors $\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 1$ et $\|x+y\|_\infty = 2$ alors que (x,y) est libre.
4. Oui. La seule difficulté est de montrer que $N(P) = 0 \implies P = 0$. Mais si P est un polynôme de degré un (donc une fonction affine) qui s'annule en 0 et en 1, alors P est identiquement nul.

Exercice 5.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Démontrer que, pour tous $x, y \in E$, on a
$$\|x\| + \|y\| \leq \|x+y\| + \|x-y\|.$$
En déduire que
$$\|x\| + \|y\| \leq 2\max(\|x+y\|, \|x-y\|).$$
La constante 2 peut elle être améliorée ?
2. On suppose désormais que la norme est issue d'un produit scalaire. Démontrer que, pour tous $x, y \in E$, on a
$$(\|x\| + \|y\|)^2 \leq \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2.$$
En déduire que
$$\|x\| + \|y\| \leq \sqrt{2}\max(\|x+y\|, \|x-y\|).$$
La constante $\sqrt{2}$ peut elle être améliorée ?

Correction.

1. On écrit
$$x = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(x-y)$$
de sorte que, par l'inégalité triangulaire,
$$\|x\| \leq \frac{1}{2}\left(\|x+y\| + \|x-y\|\right).$$
De même, on a
$$\|y\| \leq \frac{1}{2}\left(\|x+y\| + \|x-y\|\right)$$
et en sommant les deux inégalités, on a l'inégalité demandé. Puisque $\|x+y\| \leq \max(\|x+y\|, \|x-y\|)$ et que $\|x-y\| \leq \max(\|x+y\|, \|x-y\|)$, on a finalement aussi
$$\|x\| + \|y\| \leq 2\max(\|x+y\|, \|x-y\|).$$
La constante 2 ne peut pas être améliorée, car elle est parfois atteinte avec $\|x\| \neq 0$ et $\|y\| \neq 0$. C'est le cas en effet par exemple pour $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ lorsque $x = (1,0)$ et $y = (0,1)$.

2. Soit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire dont est issu la norme. Alors

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2+2\langle x,y\rangle,$$
$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2-2\langle x,y\rangle,$$

d'où

$$\begin{array}{rcl}\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 & = & \|x\|^2+\|y\|^2+(\|x\|^2+\|y\|^2)\\ & \geq & \|x\|^2+\|y\|^2+2\|x\|\|y\|\\ & \geq & (\|x\|+\|y\|)^2.\end{array}$$

Puisque $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 \leq 2\max(\|x+y\|^2,\|x-y\|^2)$, on obtient bien la deuxième inégalité demandée. Enfin, la constante $\sqrt{2}$ ne peut pas être améliorée. Elle est atteinte sur $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique lorsque $x=(1,0)$ et $y=(0,1)$.

Exercice 6.

Soient $a_1,\dots,a_n$ des réels et $N:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ définie par

$$N(x_1,\dots,x_n)=a_1|x_1|+\dots+a_n|x_n|.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les a_k pour que N soit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Correction.

Notons $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors si N est une norme, on sait que $N(e_k)=a_k>0$, et donc il est nécessaire que tous les a_k soient strictement positifs. Cette condition est également suffisante. En effet, N est alors bien à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, il est clair que l'on a $N(\lambda x)=|\lambda|N(x)$ et que, si $N(x)=0$, alors

$$a_1|x_1|+\dots a_n|x_n|=0 \implies x=0$$

puisqu'on somme à gauche des éléments qui sont tous positifs. Leur somme étant nulle, chacun des éléments doit être nul. Enfin, l'inégalité triangulaire se prouve simplement comme pour la norme $\|\cdot\|_1$. En effet, si $x,y\in\mathbb{R}^n$, alors

$$\begin{array}{rcl}N(x+y) & = & a_1|x_1+y_1|+\dots+a_n|x_n+y_n|\\ & \leq & a_1(|x_1|+|y_1|)+\dots+a_n(|x_n|+|y_n|)\\ & \leq & a_1|x_1|+\dots+a_n|x_n|+a_1|y_1|+\dots+a_n|y_n|\\ & \leq & N(x)+N(y).\end{array}$$

Exercice 7.

Soient N_1 et N_2 deux normes sur un espace vectoriel E. On pose $N=\max(N_1,N_2)$. Démontrer que N est une norme sur E.

Correction.

On vérifie les trois propriétés définissant une norme (on remarque que N est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_+$). D'une part, si $N(x) = 0$, alors $N_1(x) = 0$ et donc $x = 0$ puisque N_1 est une norme. Ensuite, si $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} N(\lambda x) &= \max\big(N_1(\lambda x), N_2(\lambda x)\big) \\ &= \max\big(|\lambda|N_1(x), |\lambda|N_2(x)\big) \\ &= |\lambda| \max\big(N_1(x), N_2(x)\big) \\ &= |\lambda|N(x). \end{aligned}$$

Enfin, prouvons l'inégalité triangulaire pour N. En effet, si x et y sont dans E, alors d'une part

$$N_1(x+y) \leq N_1(x) + N_1(y) \leq N(x) + N(y)$$

et d'autre part

$$N_2(x+y) \leq N_2(x) + N_2(y) \leq N(x) + N(y).$$

En passant au maximum, on obtient bien

$$N(x+y) \leq N(x) + N(y).$$

Exercice 8.

On définit une application sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en posant

$$N(A) = n \max_{i,j} |a_{i,j}| \text{ si } A = (a_{i,j}).$$

Vérifier que l'on définit bien une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puis qu'il s'agit d'une norme d'algèbre, c'est-à-dire que

$$N(AB) \leq N(A)N(B) \text{ pour toutes matrices } A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Correction.

La démonstration du fait qu'il s'agit une norme est une simple modification du cas classique de la norme infinie dans $\mathbb{R}^p$. On peut d'ailleurs procéder par isomorphisme entre $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^{n^2}$. Montrons qu'il s'agit d'une norme d'algèbre, en prenant $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et en posant $C = AB$. Ecrivons $C = (c_{i,j})$. On a $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}$. On a donc :

$$\begin{aligned} n|c_{i,j}| &\leq n \sum_{k=1}^n |a_{i,k}||b_{k,j}| \\ &\leq n \sum_{k=1}^n \frac{N(A)}{n} \frac{N(B)}{n} \\ &\leq N(A)N(B). \end{aligned}$$

Exercice 9.

Soit $a, b > 0$. On pose, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $N(x, y) = \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}$.

1. Prouver que N est une norme.
2. Dessiner la boule de centre 0 et de rayon 1.
3. Déterminer le plus petit nombre $p > 0$ tel que $N \leq p\|.\|_2$ et le plus grand nombre q tel que $q\|.\|_2 \leq N$.

Correction.

1. Le seul point non immédiat est de vérifier que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, on s'inspire du même résultat concernant la norme euclidienne usuelle. Prenons en effet $X_1 = (x_1, y_1)$ et $X_2 = (x_2, y_2)$ dans $\mathbb{R}^2$. Alors :

$$\begin{aligned} N^2(X_1 + X_2) &= a^2(x_1 + x_2)^2 + b^2(y_1 + y_2)^2 \\ &= a^2x_1^2 + a^2x_2^2 + b^2y_1^2 + b^2y_2^2 + 2a^2x_1x_2 + 2b^2y_1y_2 \\ &= a^2x_1^2 + a^2x_2^2 + b^2y_1^2 + b^2y_2^2 + 2\big((ax_1)(ax_2) + (by_1)(by_2)\big) \\ &\leq a^2x_1^2 + a^2x_2^2 + b^2y_1^2 + b^2y_2^2 + 2\sqrt{a^2x_1^2 + b^2y_1^2}\sqrt{a^2x_2^2 + b^2y_2^2} \end{aligned}$$

   où la dernière ligne est une conséquence immédiate de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On a donc obtenu

$$N^2(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \leq \left(\sqrt{a^2x_1^2 + b^2y_1^2} + \sqrt{a^2x_2^2 + b^2y_2^2}\right)^2 = (N(X_1) + N(X_2))^2$$

   ce qui est bien l'inégalité triangulaire voulue. On pouvait aussi remarquer que N est la norme issue du produit scalaire suivant :

$$\phi((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = a^2x_1x_2 + b^2y_1y_2.$$

2. (x, y) est dans cette boule si et seulement si $a^2x^2 + b^2y^2 \leq 1$. On reconnait une ellipse dont les extrémités des axes sont les points $\left(\pm\frac{1}{a}, 0\right)$ et $\left(0, \pm\frac{1}{b}\right)$.
3. Supposons par exemple $a \leq b$. Alors, pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$, on a

$$N(x, y) \leq \sqrt{b^2x^2 + b^2y^2} \leq b\|(x, y)\|_2.$$

   De plus, pour tous les éléments de la forme $(0, y)$, on a égalité. Le nombre p recherché est donc $\max(a, b)$. Un raisonnement similaire montre que le nombre q recherché est $\min(a, b)$.

Exercice 10.

Sur $E = \mathbb{R}[X]$, on définit N_1 et N_2 par

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| \text{ et } N_2(P) = \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)|.$$

1. Démontrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur E.
2. Étudier pour chacune des deux normes la convergence de la suite (P_n) définie par $P_n =$

$\frac{1}{n}X^n$.

Correction.

1. On vérifie d'abord que ces deux quantités sont bien définies. En particulier, la somme apparaissant dans $N_1(P)$ est en réalité une somme finie. Prenons ensuite P, Q dans E et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $k \geq 0$,
$$|(P+Q)^{(k)}(0)| \leq |P^{(k)}(0)| + |Q^{(k)}(0)|$$
et donc, en passant à la somme $N_1(P+Q) \leq N_1(P) + N_1(Q)$. On a clairement $N_1(\lambda P) = |\lambda| N_1(P)$. Enfin, si $N_1(P) = 0$, alors 0 est une racine de multiplicité infinie de P, ce qui entraîne que $P = 0$. Passons maintenant à N_2. On a, pour tout $t \in [-1, 1]$,
$$|(P+Q)(t)| \leq |P(t)| + |Q(t)| \leq N_2(P) + N_2(Q).$$
En passant au sup pour $t \in [-1, 1]$, on en déduit que
$$N_2(P+Q) \leq N_2(P) + N_2(Q).$$
Il est clair que $N_2(\lambda P) = |\lambda| N_2(P)$, et si $N_2(P) = 0$, alors P admet une infinité de racines, donc $P = 0$. Ainsi, N_2 est également une norme sur E.
2. On a
$$N_1(P_n) = (n-1)! \text{ et } N_2(P_n) = \frac{1}{n}.$$
Ainsi, la suite (P_n) converge vers 0 pour N_2, mais n'est pas bornée et donc ne converge pas pour N_1.

Exercice 11.

Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose
$$N(f) = \left(f^2(0) + \int_0^1 (f'(t))^2 dt\right)^{1/2}.$$

1. Démontrer que N est une norme sur E.
2. Démontrer que, pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2} N(f)$.

Correction.

1. Posons, pour $f, g \in E$, $\phi(f,g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$. Il est clair que $N(f) = \sqrt{\phi(f,f)}$ et donc il suffit de démontrer que ϕ est un produit scalaire. C'est clairement une forme bilinéaire, symétrique et positive. De plus, si $\phi(f,f) = 0$, alors $f(0) = 0$ et $\int_0^1 (f'(t))^2 dt = 0$. Puisque $(f')^2$ est une fonction continue et positive sur $[0,1]$, et d'intégrale nulle, f' est identiquement nulle sur $[0,1]$. Ainsi, $f' = 0$ donc f est constante, et comme $f(0) = 0$, f est la fonction nulle. ϕ est une forme bilineaire symétrique définie positive, et donc N est une norme.

2. Soit $x \in [0,1]$. Alors on écrit

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt.$$

On en déduit que

$$|f(x)| \leq |f(0)| + \int_0^x |f'(t)|dt.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'intégrale, on tire

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f(0)| + \left(\int_0^x |f'(t)|^2\right)^{1/2} \left(\int_0^x 1^2 dt\right)^{1/2} \\ &\leq |f(0)| + \left(\int_0^1 |f'(t)|^2 dt\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

On applique ensuite (encore !) l'inégalité de Cauchy-Schwarz, mais cette fois dans $\mathbb{R}^2$. On en déduit que

$$|f(x)| \leq \left(|f(0)|^2 + \int_0^1 (f'(t))^2 dt\right)^{1/2} \times \left(1^2 + 1^2\right)^{1/2}.$$

Prenant le sup pour $x \in [0,1]$, on en déduit bien que

$$\|f\|_\infty \leq \sqrt{2} N(f).$$

b. Exercices d'entraînement

Exercice 12.

Pour tout $x = (a,b) \in \mathbb{R}^2$, on définit

$$N(x) = \sqrt{a^2 + 2ab + 5b^2}.$$

Démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Correction.

On va démontrer que N est la norme issue d'un produit scalaire (remarquons que pour le moment, nous n'avons pas encore prouvé que N est toujours définie). Pour cela, on procède par polarisation, et pour $x = (a,b)$, $x' = (a',b')$, on pose

$$\phi(x,x') = aa' + a'b + ab' + 5bb'.$$

ϕ est clairement une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^2$, il reste à voir qu'elle est définie et positive. Mais on a

$$\phi(x,x) = a^2 + 2ab + 5b^2 = (a+b)^2 + 4b^2$$

(l'idée est ici de reconnaitre dans $a^2 + 2ab$ le début du développement d'un carré). On en déduit que l'on a toujours $\phi(x,x) \geq 0$ et de plus, si $\phi(x,x) = 0$, alors on a $(a+b) = 0$ et $b = 0$, ce qui entraîne bien sûr $a = b = 0$. Ainsi, N est la norme associée au produit scalaire ϕ.

Exercice 13.

Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit
$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B).$$

1. Démontrer que cette formule définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On notera N la norme associée.
2. Démontrer que, pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $N(AB) \leq N(A)N(B)$.

Correction.

1. Il est très facile de vérifie que $\langle ., .\rangle$ définit une forme bilinéaire symétrique. Reste à démontrer qu'elle est définie positive. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et notons $(b_{i,j}) = A^T A$. Alors
$$b_{i,i} = \sum_{k=1}^n a_{k,i}^2 \geq 0.$$
Ainsi,
$$\mathrm{tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{k,i}^2 \geq 0.$$
On a bien affaire à une forme positive. De plus, si $\langle A, A\rangle = 0$, alors pour tout $i = 1, \dots, n$ et tout $k = 1, \dots, n$, on a $a_{k,i} = 0$, et donc $A = 0$: la forme est définie.
2. Notons $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ de sorte que $AB = (c_{i,j})$ avec
$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}.$$
On a alors
$$N(AB)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}\right)^2.$$
On applique alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $\mathbb{R}^n$ à la somme sur k. On en déduit que
$$\begin{aligned} N(AB)^2 &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_{j,k}\right)^2 \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n b_{j,k}^2\right) \\ &\leq N(A)N(B). \end{aligned}$$

c. Exercices d'approfondissement

Exercice 14. $(*)$ *Les normes p sur $\mathbb{R}^n$, pour $1 < p < +\infty$*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Montrer que pour tous $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}_+$ et tous $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^{\frac{1}{q}}.$$

2. En déduire que, pour tous $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}_+$ et $b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{q}};$$

puis montrer que cette dernière inégalité est toujours vraie quand $b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}_+$.

Cette inégalité est connue sous le nom de **Inégalité de Hölder**.

3. En utilisant l'inégalité de Hölder, démontrer l'**inégalité de Minkowski**, i.e. pour tous $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}_+$ et $y_1, ..., y_n \in \mathbb{R}_+$:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

4. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et l'application de $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\text{pour } x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Montrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Correction.

1. On considère la fonction $f : x \mapsto x^p$. Celle-ci est convexe sur $\mathbb{R}_+$. En effet, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f' : x \mapsto x^{p-1}$ qui est croissante sur $\mathbb{R}_+$ car $p - 1 > 0$.
Remarque : on aurait pu utiliser la dérivée seconde de f et montrer qu'elle est positive, mais ceci seulement sur $\mathbb{R}_+^*$ et non $\mathbb{R}_+$ dans le cas où $1 < p < 2$ car pour ces valeurs de p, f n'est pas deux fois dérivable en 0.
Soit $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}_+$ et $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}_+^*$. Alors on applique l'inégalité de Jensen à la fonction f et à la famille de points pondérés $\left((x_i, \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i})\right)_{1 \leq i \leq n}$ (on remarque que la somme des pondérations est bien égale à 1) :

$$\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right)^p \leq \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^p.$$

Ce qui nous donne le résultat demandé en appliquant la racine p-ième (fonction croissante) de l'inéquation puis en la multipliant par $\sum_{i=1}^n \lambda_i$.

2. On obtient le résultat en appliquant l'inégalité obtenue à la question précédente à $\lambda_i = b_i^p$ et $x_i = a_i(b_i)^{-\frac{q}{p}}$ pour $i = 1, ..., n$ (il faut également remarquer que $q = \frac{p}{p-1}$).
Maintenant, pour $b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}_n$; on note $I = \{i \mid b_i \neq 0\}\}$, et on applique l'inégalité précédente aux familles $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$. Alors :

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = \sum_{i\in I} a_i b_i \leq \left(\sum_{i\in I} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i\in I} b_i^p\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{\frac{1}{q}}.$$

3. On remarque, pour $i = 1, ..., n$, $(a_i + b_i)^p = a_i(a_i + b_i)^{p-1} + b_i(a_i + b_i)^{p-1}$, d'où

$$\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p = \sum_{i=1}^n x_i(x_i + y_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^n y_i(x_i + y_i)^{p-1}.$$

On applique alors l'inégalité de Hölder aux deux sommes obtenus avec $a_i = x_i$ et $b_i = (x_i + y_i)^{p-1}$ pour la première somme et $a_i = y_i$ et $b_i = (x_i + y_i)^{p-1}$ pour la deuxième somme. Par suite,

$$\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p \leq \left(\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

D'où le résultat.

4. Montrons que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$. Il est clair que $\|\cdot\|_p$ est positive.
Soit $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda_i n \mathbb{R}$.
   - *Séparation :* Si $\|x\|_p = 0$, alors $\sum_{i=1}^n |x_i|^p = 0$ donc pour $i = 1, ..., n$, $x_i = 0$. Par suite, $x = (0, ..., 0)$.
   - *Homogénéité :* On a $\|\lambda x\|_p^p = |\lambda|^p \sum_{i=1}^n |x_i|^p$ donc $\|\lambda x\|_p = |\lambda| \|x\|_p$.
   - *Inégalité triangulaire :* On a :

$$\begin{aligned} \|x + y\|_p &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{d'après 3)} \\ &\leq \|x\|_p + \|y\|_p \end{aligned}$$

   Donc $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 15.

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose

$$\|P\|_A = \sup_{x\in A} |P(x)|.$$

Quelles conditions A doit-elle satisfaire pour que l'on obtienne une norme sur $\mathbb{R}[X]$?

Correction.

Une première condition nécessaire sur A apparaît en remarquant qu'il faut que $\|P\|_A < +\infty$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$. C'est en particulier vrai pour le polynôme $P(X) = X$ et donc il est nécessaire que A soit bornée. Une seconde condition nécessaire apparaît quand on écrit que $\|P\|_A = 0 \implies P = 0$. Supposons en effet que $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ soit fini. Alors prenons $P(X) = (X - a_1)\cdots(X - a_n)$. Alors on a $\|P\|_A = 0$ et pourtant $P \neq 0$. Réciproquement, prouvons que si A est une partie infinie bornée, alors $\|\cdot\|_A$ définit une norme sur $\mathbb{R}[X]$. D'une part, cette quantité est bien finie et positive pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$. D'autre part, vérifions les trois propriétés de la définition d'une norme :

1. On a toujours, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, $\sup_{x\in A} |\lambda P(x)| = |\lambda| \times \sup_{x\in A} |P(x)|$ et donc $\|\lambda P\|_A = |\lambda| \times \|P\|_A$.
2. Si $\|P\|_A = 0$, alors P admet une infinité de racines, et donc P est le polynôme nul.
3. Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Alors, pour tout $x \in A$,

$$|P(x) + Q(x)| \leq |P(x)| + |Q(x)| \leq \|P\|_A + \|Q\|_A.$$

En passant au sup, on obtient que $\|P + Q\|_A \leq \|P\|_A + \|Q\|_A$. En conclusion, $\|\cdot\|_A$ définit une norme sur $\mathbb{R}[X]$ si et seulement si A est une partie infinie bornée.

2. Boules / Distances

Exercice 16.

On considère l'espace vectoriel normé $(\ell^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

1. Déterminer la distance de la suite u constante en 1 au sous-espace vectoriel $c_0(\mathbb{R})$ des suites à valeurs réelles convergeant vers 0.
2. Déterminer la distance de la suite $v = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ au sous-espace vectoriel $\mathcal{C}$ des suites à valeurs réelles convergentes.

Correction.

On note 0 la suite constante en 0.

— On a clairement $d(u, c_0(\mathbb{R})) \leq d(u, 0) = 1$. Montrons l'inégalité réciproque.
Soit $x = (x_n) \in c_0(\mathbb{R})$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|x_n - 1| \leq \|x - u\|_\infty.$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient :

$$1 \leq d(u, x).$$

Donc $d(u, c_0(\mathbb{R})) \geq 1$.
Il en résulte que $d(u, c_0(\mathbb{R})) = 1$.

— On a clairement $d(v, \mathcal{C}) \leq d(v, 0) = 1$. Montrons l'inégalité réciproque.
Soit $x = (x_n) \in \mathcal{C}$ et l sa limite. On a, pour tout entier pair $n = 2k$,

$$\|x - v\|_\infty \geq |x_{2k} - v_{2k}| = |x_{2k} - 1|,$$

et pour tout entier impair $n = 2k+1$,

$$\|x - v\|_\infty \geq |x_{2k+1} - v_{2k+1}| = |x_{2k+1} + 1|.$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient :

$$|l - 1| \leq d(v, x) \text{ et } |l + 1| \leq d(v, x).$$

Par suite,

$$1 = |\frac{1}{2}(1 - l) + \frac{1}{2}(1 + l)| \leq \frac{1}{2}|1 - l| + \frac{1}{2}|1 + l| \leq d(v, x).$$

Donc $d(v, \mathcal{C}) \geq 1$.
Il en résulte que $d(v, \mathcal{C}) = 1$.

Exercice 17.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $x, y \in E$. Démontrer que $x + B_f(y, r) = B_f(x + y, r)$.
Remarque : $x + B_f(y, r)$ est l'ensemble $\{x + z \mid z \in B_f(y, r)\}$.

Correction.

On procède par double inclusion.

— $x + B_f(y, r) \subset B_f(x + y, r)$.
Soit $u \in x + B_f(y, r)$. Alors il existe $z \in B_f(y, r)$ tel que $u = x + z$. On a :

$$d(u, x + y) = \|(x + y) - (x + z)\| = \|y - z\| = d(z, y) \leq r.$$

Donc $u \in B_f(x + y, r)$.

— $x + B_f(y, r) \supset B_f(x + y, r)$.
Soit $u \in B_f(x + y, r)$. On note $z = u - x$. Alors $u = x + z$ et on a :

$$d(y, z) = \|(u - x) - y\| = \|u - (x + y)\| = d(x + y, u) \leq r.$$

D'où $z \in B_f(y, r)$ et donc $u \in x + B_f(y, r)$.

Il en résulte $x + B_f(y, r) = B_f(x + y, r)$.

Exercice 18.

Soit E un espace vectoriel et $N : E \mapsto \mathbb{R}$ une fonction telle que :

i) N est positive sur E ;

i) pour tout $x \in E$, $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$;

iii) pour tous $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$;

Montrer que N est une norme si, et seulement si, $B_f = \{x \in E \mid N(x) \leq 1\}$ est convexe.

Correction.

Si N est une norme, ses boules sont convexes et B_f étant la boule unité fermée de N, c'est donc une partie convexe.

Réciproquement, supposons B_f est convexe. Tout d'abord, montrons que la "boule fermée" centrées en 0 et de tout rayon sont convexes également.
Soit $r > 0$ et $B_f(r) = \{x \in E \mid N(x) \leq r\}$. Soit $x, y \in B_f(r)$ et $t \in [0,1]$. Comme $\frac{1}{r}x$ et $\frac{1}{r}y$ sont dans B_f qui est convexe, $\frac{1}{r}(tx + (1-t)y) = t\frac{1}{r}x + (1-t)\frac{1}{r}y \in B_f$. Ainsi, $N(\frac{1}{r}(tx + (1-t)y)) \leq 1$ et donc, par l'axiome iii), $N(tx + (1-t)y) \leq r$ i.e. $tx + (1-t)y \in B_f(r)$. Il en résulte que $B_f(r)$ est convexe.

Montrons alors que N est une norme : vérifions l'inégalité triangulaire. Soit $x, y \in E$ et $r = \frac{1}{2}(N(x) + N(y))$.
Comme x, y sont dans $B_f(r)$ et que $B_f(r)$ est convexe, le vecteur $\frac{1}{2}(x+y)$ appartient à $B_f(r)$ et donc :

$$\frac{1}{2}N(x+y) = N\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) \leq r = \frac{1}{2}(N(x) + N(y))$$

D'où $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.
Par suite, N est une norme sur E.

Exercice 19.

Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie et

$$A = \left\{ f \in E \mid f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t)dt \geq 1 \right\}.$$

Montrer que pour tout $f \in A$, $\|f\|_\infty > 1$ et déterminer $d(0_E, A)$.

Exercice 20.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé avec $E \neq \{0\}$ et $x, x' \in E$ et $r, r' \in R_+^*$.
Montrer $B_f(x, r) = B_f(x', r')$ si, et seulement si, $x = x'$ et $r = r'$.

Indication.

Une implication est évidente, montrer l'implication réciproque par contraposée en commençant par le cas : $x = x'$ et $r \neq r'$.
Ensuite, dans le cas $x \neq x'$, faire un dessin !

Correction.

Il est clair $x = x'$ et $r = r'$ implique $B_f(x,r) = B_f(x',r')$.

Prouvons la réciproque par contraposée. On suppose $(x,r) \neq (x',r')$. Montrons que les boules sont différentes.
1er cas : $x = x'$ et $r' \neq r$. Quitte à échanger r et r', on peut supposer $r' > r$. Soit u un vecteur unitaire de E (il existe car $E \neq \{0\}$) et $y = x + r'u$. Alors $d(x,y) = \|x-y\| = r'\|u\| = r' > r$ et donc $y \in B_f(x',r')$ et $y \notin B(x,r)$. Par suite les deux boules ne sont pas égales. *2eme cas :* $x \neq x'$. Quitte à échanger r et r', on peut supposer $r' \geq r$. Considérons un élément y sur la droite passant par x et x' tel que x' soit entre x et y et tel qu'il soit assez loin pour ne pas être dans la boule centrée en x. Définissons formellement un tel élément.

Soit u le vecteur unitaire défini par $u = \frac{1}{\|x'-x\|}x' - x$ et on pose $y = x' + r'u$. Comme précédemment, on a $d(x',y) = r'$ et donc $y \in B_f(x',r')$. Or on a :

$$y - x = (x'-x)(1 + \frac{r'}{\|x'-x\|}),$$

d'où

$$d(x,y) = (1 + \frac{r'}{\|x'-x\|})\|(x'-x)\| = \|(x'-x)\| + r' > r.$$

Il en résulte que $y \notin B_f(x,r)$.

Dans tous les cas, $B_f(x,r) \neq B_f(x',r')$.

Exercice 21.

Soit E un espace vectoriel normé. Pour $a \in E$ et $r > 0$, on note $\bar{B}(a,r)$ la boule fermée de centre a et de rayon r. On fixe $a, b \in E$ et $r, s > 0$.

1. On suppose que $\bar{B}(a,r) \subset \bar{B}(b,s)$. Démontrer que $\|a-b\| \leq s - r$.
2. On suppose que $\bar{B}(a,r) \cap \bar{B}(b,s) = \varnothing$. Montrer que $\|a-b\| > r + s$.

Correction.

Pour comprendre ce type d'exercice, il faut impérativement commencer par réaliser un dessin.

1. La contrainte la plus forte exprimée par l'inclusion $\bar{B}(a,r) \subset \bar{B}(b,s)$ est obtenue pour le point de $\bar{B}(a,r)$ le plus éloigné de b possible. On considère ce point qui est donné par $x = a + r(a-b)/\|a-b\|$. x est dans $\bar{B}(a,r)$, donc dans $\bar{B}(b,s)$. Or

$$x - b = \left(1 + \frac{r}{\|b-a\|}\right)(a-b) \implies \|x-b\| = \|b-a\| + r.$$

   Puisque $\|x-b\| \leq s$, on en déduit le résultat recherché.
2. Cette fois, on considère y "le" point de $\bar{B}(a,r)$ le plus proche de b. On a donc $y = a + r(b-$

$a)/\|b-a\|$. Puisque $y \notin \bar{B}(b,s)$, on a $\|y-b\| > s$. Mais on a aussi

$$y - b = \left(1 - \frac{r}{\|b-a\|}\right)(a-b) \implies \|y-b\| = \|b-a\| - r.$$

Ceci donne le résultat voulu.