Mathématiques spéciales

Feuille d'exercices n°5

1. Exercices basiques

a. Comparaison de normes

Exercice 1.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit pour $f \in E$

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|;\ x \in [0,1]\},\ \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt.$$

Vérifier que $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_1$ sont deux normes sur E. Montrer que, pour tout $f \in E$, $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$. En utilisant la suite de fonctions $f_n(x) = x^n$, prouver que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 2.

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes. On définit sur E trois normes par, si $P = \sum_{i=0}^p a_i X^i$:

$$N_1(P) = \sum_{i=0}^p |a_i|,\ N_2(P) = \left(\sum_{i=0}^p |a_i|^2\right)^{1/2},\ N_\infty(P) = \max_i |a_i|.$$

Vérifier qu'il s'agit de 3 normes sur $\mathbb{R}[X]$. Sont-elles équivalentes deux à deux ?

Exercice 3.

Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. On définit les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ par

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt,\ \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2\right)^{1/2} \text{ et } \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Démontrer que ces trois normes ne sont pas équivalentes deux à deux.

Exercice 4.

Sur $E = \mathbb{R}[X]$, on définit N_1 et N_2 par

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| \text{ et } N_2(P) = \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)|.$$

1. Démontrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur E.

2. Étudier pour chacune des deux normes la convergence de la suite (P_n) définie par $P_n = \frac{1}{n}X^n$.
3. Les deux normes sont-elles équivalentes ?

2. Exercices d'entraînement

a. Norme p d'une autre manière

Exercice 5.

Soient $(x, y, p, q) \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $1/p + 1/q = 1$, et $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ $2n$ réels strictement positifs.

1. Montrer que
$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q.$$
2. On suppose dans cette question que $\sum_{i=1}^n a_i^p = \sum_{i=1}^n b_i^q = 1$. Montrer que $\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq 1$.
3. En déduire la splendide inégalité de Hölder :
$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q}.$$
4. On suppose en outre que $p > 1$. Déduire de l'inégalité de Hölder l'inégalité de Minkowski :
$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{1/p}.$$
5. On définit pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}.$$
Démontrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

b. Comparaison de normes

Exercice 6.

Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose
$$N(f) = \left(f^2(0) + \int_0^1 (f'(t))^2 dt\right)^{1/2}.$$

1. Démontrer que N est une norme sur E.
2. Démontrer que, pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2}N(f)$.
3. Les deux normes N et $\|\cdot\|_\infty$ sont elles équivalentes ?

Exercice 7.

Soit A une partie bornée d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$. On note $\mathcal{L}$ l'espace vectoriel des applications lipschitziennes de A dans E.

1. Démontrer que les éléments de $\mathcal{L}$ sont des fonctions bornées.
2. Pour $f \in \mathcal{L}$, on pose

$$K_f = \{k \in \mathbb{R}_+;\ \forall (x,y) \in A^2,\ \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x-y\|\}.$$

   Démontrer que K_f admet une borne inférieure. Dans la suite, on notera C_f cette borne inférieure.
3. Justifier que $C_f \in K_f$.
4. Démontrer que si $f, g \in \mathcal{L}$, alors $C_{f+g} \leq C_f + C_g$.
5. Pour $a \in A$, on note $N_a(f) = \|f(a)\| + C_f$. Démontrer que N_a est une norme sur $\mathcal{L}$.
6. Soient $a \neq b \in A$. Les normes N_a et N_b sont-elles équivalentes ?

Exercice 8.

Soit N l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$: $(x,y) \mapsto \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|x+ty|}{\sqrt{1+t^2}}$.

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. La comparer à la norme euclidienne.
3. Expliquer.

Exercice 9.

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. Pour $f, g \in E$, on pose $N_g(f) = \|gf\|_\infty$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N_g soit une norme.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N_g soit équivalente à la norme infinie.