Mathématiques spéciales

Corrigé de la feuille d'exercices n°5

1. Exercices basiques

a. Comparaison de normes

Exercice 1.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit pour $f\in E$

$$\|f\|_\infty=\sup\{|f(x)|;\ x\in[0,1]\},\ \|f\|_1=\int_0^1|f(t)|dt.$$

Vérifier que $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_1$ sont deux normes sur E. Montrer que, pour tout $f\in E$, $\|f\|_1\leq\|f\|_\infty$. En utilisant la suite de fonctions $f_n(x)=x^n$, prouver que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Correction.

Remarquons d'abord qu'une fonction continue sur $[0,1]$ est bornée (et atteint ses bornes). Ceci justifie que $\|f\|_\infty$ est bien défini pour tout $f\in E$. De plus, on a toujours $\|f\|_\infty\geq 0$. D'autre part, si $\|f\|_\infty=0$, alors pour tout x dans $[0,1]$, on a $f(x)=0$, et donc $f=0$. Etudions l'inégalité triangulaire : soient f et g deux éléments de E. Pour tout x de $[0,1]$, on a :

$$|f(x)+g(x)|\leq|f(x)|+|g(x)|\leq\|f\|_\infty+\|g\|_\infty.$$

Passant au max, on obtient :

$$\|f+g\|_\infty\leq\|f\|_\infty+\|g\|_\infty.$$

Concernant l'homogénéité, prenons $\lambda\in\mathbb{R}$ et f dans E. Pour tout x de $[0,1]$, on a :

$$|\lambda f(x)|=|\lambda||f(x)|,$$

et passant au max, on a bien l'égalité voulue. Pour la norme $\|.\|_1$: on arrive bien dans $\mathbb{R}^+$. Rappelons que l'intégrale d'une fonction continue positive est nulle si, et seulement si, il s'agit de la fonction nulle. Rappelons d'autre part que si f est continue, alors $|f|$ est continue. On a donc démontré $\|f\|_1=0\implies f=0$. D'autre part, pour tout x de $[0,1]$, l'inégalité triangulaire de la valeur absolue donne :

$$|f(x)+g(x)|\leq|f(x)|+|g(x)|.$$

Intégrer cette inégalité entre 0 et 1 donne l'inégalité triangulaire pour $\|.\|_1$. En effet, la linéarité de l'intégrale donne

$$\int_0^1|\lambda f(x)|dx=|\lambda|\int_0^1|f(x)|dx.$$

Remarquons que, pour chaque x de $[0,1]$, on a :

$$|f(x)|\leq\|f\|_\infty.$$

On intègre cette inégalité entre 0 et 1, et on trouve :

$$\|f\|_1 \leq \int_0^1 \|f\|_\infty dx = \|f\|_\infty.$$

Pour $f_n(x) = x^n$, on a

$$\|f_n\|_\infty = 1, \|f_n\|_1 = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

Si les normes étaient équivalentes, il existerait une constante $C > 0$ telle que $\|f\|_\infty \leq C\|f\|_1$. Pour $f = f_n$, on obtient :

$$\|f_n\|_\infty \leq C\|f_n\|_1 \iff 1 \leq \frac{C}{n+1},$$

et un passage à la limite en n donne $1 \leq 0$.

Exercice 2.

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes. On définit sur E trois normes par, si $P = \sum_{i=0}^p a_i X^i$:

$$N_1(P) = \sum_{i=0}^p |a_i|,\ N_2(P) = \left(\sum_{i=0}^p |a_i|^2\right)^{1/2},\ N_\infty(P) = \max_i |a_i|.$$

Vérifier qu'il s'agit de 3 normes sur $\mathbb{R}[X]$. Sont-elles équivalentes deux à deux ?

Correction.

La démonstration qu'il s'agit de normes suit en tout point celle classique concernant les mêmes normes sur $\mathbb{R}^n$. Supposons que $N_1(P) \leq CN_\infty(P)$. Prenons $P_n = 1 + X + \cdots + X^n$. Alors $N_1(P_n) = n + 1 \leq C$, ce qui est impossible pour n grand. Si $N_2(P) \leq CN_\infty(P)$, pour le même polynôme P_n, on a $N_2(P_n) = \sqrt{n+1} \leq C$, ce qui est toujours impossible. Enfin, la même suite de polynômes, et le même raisonnement, prouve qu'une inégalité $N_1(P_n) \leq CN_2(P_n)$ est tout aussi impossible. Remarquons que la preuve que ces trois normes ne sont pas équivalentes repose sur le fait que $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie.

Exercice 3.

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. On définit les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ par

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt,\ \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2\right)^{1/2} \text{ et } \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Démontrer que ces trois normes ne sont pas équivalentes deux à deux.

Correction.

Considérons, pour $n \geq 1$, $f_n(x) = x^n$. On a alors

$$\|f_n\|_\infty = 1,\ \|f_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \text{ et } \|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}.$$

Si $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$ étaient équivalentes, il existerait $A, B > 0$ tels que, pour tout n,

$$A \leq \frac{\|f_n\|_2}{\|f_n\|_\infty} \leq B.$$

Mais $\frac{\|f_n\|_2}{\|f_n\|_\infty} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ et un tel encadrement est impossible (on obtiendrait à la limite $A \leq 0$).

Exercice 4.

Sur $E = \mathbb{R}[X]$, on définit N_1 et N_2 par

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| \text{ et } N_2(P) = \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)|.$$

1. Démontrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur E.
2. Étudier pour chacune des deux normes la convergence de la suite (P_n) définie par $P_n = \frac{1}{n}X^n$.
3. Les deux normes sont-elles équivalentes ?

Correction.

1. On vérifie d'abord que ces deux quantités sont bien définies. En particulier, la somme apparaissant dans $N_1(P)$ est en réalité une somme finie. Prenons ensuite P, Q dans E et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $k \geq 0$,
$$|(P+Q)^{(k)}(0)| \leq |P^{(k)}(0)| + |Q^{(k)}(0)|$$
et donc, en passant à la somme $N_1(P+Q) \leq N_1(P) + N_1(Q)$. On a clairement $N_1(\lambda P) = |\lambda| N_1(P)$. Enfin, si $N_1(P) = 0$, alors 0 est une racine de multiplicité infinie de P, ce qui entraîne que $P = 0$. Passons maintenant à N_2. On a, pour tout $t \in [-1,1]$,
$$|(P+Q)(t)| \leq |P(t)| + |Q(t)| \leq N_2(P) + N_2(Q).$$
En passant au sup pour $t \in [-1,1]$, on en déduit que
$$N_2(P+Q) \leq N_2(P) + N_2(Q).$$
Il est clair que $N_2(\lambda P) = |\lambda| N_2(P)$, et si $N_2(P) = 0$, alors P admet une infinité de racines, donc $P = 0$. Ainsi, N_2 est également une norme sur E.
2. On a
$$N_1(P_n) = (n-1)! \text{ et } N_2(P_n) = \frac{1}{n}.$$
Ainsi, la suite (P_n) converge vers 0 pour N_2, mais n'est pas bornée et donc ne converge pas pour N_1.
3. Les normes ne peuvent pas être équivalentes, sinon une suite convergente pour une norme serait une suite convergente pour l'autre norme.

2. Exercices d'entraînement

a. Norme p d'une autre manière

Exercice 5.

Soient $(x, y, p, q) \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $1/p + 1/q = 1$, et $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ $2n$ réels strictement positifs.

1. Montrer que
$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q.$$
2. On suppose dans cette question que $\sum_{i=1}^n a_i^p = \sum_{i=1}^n b_i^q = 1$. Montrer que $\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq 1$.
3. En déduire la splendide inégalité de Hölder :
$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q}.$$
4. On suppose en outre que $p > 1$. Déduire de l'inégalité de Hölder l'inégalité de Minkowski :
$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{1/p}.$$
5. On définit pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}.$$
Démontrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Correction.

1. La fonction ln est concave, et on a donc :
$$\ln\left(\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q\right) \geq \frac{1}{p}\ln(x^p) + \frac{1}{q}\ln(y^q) = \ln(xy).$$
Il suffit ensuite d'utiliser la croissance de la fonction exponentielle pour en déduire le résultat voulu.
2. Il suffit de sommer les n équations :
$$a_i b_i \leq \frac{1}{p}a_i^p + \frac{1}{q}b_i^q.$$
3. On pose $\alpha_i = \frac{a_i}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}}$ et $\beta_i = \frac{b_i}{\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q}}$. D'après la question précédente,
$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \leq 1.$$
Il suffit ensuite de remplacer α_i et β_i par leur valeur pour trouver la formule.

4. On décompose $(a_i+b_i)^p$ en $(a_i+b_i)^{p-1}a_i+(a_i+b_i)^{p-1}b_i$. Soit q tel que $1/p+1/q=1$, c'est à dire que $pq-q=p$. En appliquant Hölder à chacun des membres, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^p &\leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}\times\left(\sum_{i=1}^n |a_i+b_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q}+\left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{1/p}\times\left(\sum_{i=1}^n |a_i+b_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q}\\ &\leq \left[\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{1/p}\right]\times\left(\sum_{i=1}^n |a_i+b_i|^p\right)^{1-1/p}.\end{aligned}$$

Il suffit de tout refaire passer au premier membre pour obtenir le résultat. Remarquons que le résultat est aussi vrai pour $p=1$. Dans ce cas, il est juste trivial !

5. L'inégalité précédente se traduit très facilement en disant que $\|\cdot\|_p$ vérifie l'inégalité triangulaire $\|x+y\|_p\leq\|x\|_p+\|y\|_p$. Il est en outre trivial de vérifier que $\|\lambda x\|_p=|\lambda|\|x\|_p$ et que $\|x\|_p=0\iff x=0$. Ainsi, $\|\cdot\|_p$ définit bien une norme sur $\mathbb{R}^n$.

b. Comparaison de normes

Exercice 6.

Soit $E=\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Pour $f\in E$, on pose

$$N(f)=\left(f^2(0)+\int_0^1 (f'(t))^2dt\right)^{1/2}.$$

1. Démontrer que N est une norme sur E.
2. Démontrer que, pour tout $f\in E$, $\|f\|_\infty\leq\sqrt{2}N(f)$.
3. Les deux normes N et $\|\cdot\|_\infty$ sont elles équivalentes ?

Correction.

1. Posons, pour $f,g\in E$, $\phi(f,g)=f(0)g(0)+\int_0^1 f'(t)g'(t)dt$. Il est clair que $N(f)=\sqrt{\phi(f,f)}$ et donc il suffit de démontrer que ϕ est un produit scalaire. C'est clairement une forme bilinéaire, symétrique et positive. De plus, si $\phi(f,f)=0$, alors $f(0)=0$ et $\int_0^1(f'(t))^2dt=0$. Puisque $(f')^2$ est une fonction continue et positive sur $[0,1]$, et d'intégrale nulle, f' est identiquement nulle sur $[0,1]$. Ainsi, $f'=0$ donc f est constante, et comme $f(0)=0$, f est la fonction nulle. ϕ est une forme bilineaire symétrique définie positive, et donc N est une norme.
2. Soit $x\in[0,1]$. Alors on écrit

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)dt.$$

On en déduit que

$$|f(x)|\leq|f(0)|+\int_0^x|f'(t)|dt.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'intégrale, on tire

$$\begin{aligned}|f(x)| &\leq |f(0)|+\left(\int_0^x |f'(t)|^2\right)^{1/2}\left(\int_0^x 1^2dt\right)^{1/2}\\ &\leq |f(0)|+\left(\int_0^1 |f'(t)|^2dt\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

On applique ensuite (encore !) l'inégalité de Cauchy-Schwarz, mais cette fois dans $\mathbb{R}^2$. On en déduit que

$$|f(x)|\leq \left(|f(0)|^2+\int_0^1 (f'(t))^2dt\right)^{1/2}\times \left(1^2+1^2\right)^{1/2}.$$

Prenant le sup pour $x\in[0,1]$, on en déduit bien que

$$\|f\|_\infty\leq \sqrt{2}N(f).$$

3. Il est facile de vérifier que $\|x^n\|_\infty=1$ tandis que $N(x^n)=\frac{n}{\sqrt{2n-1}}$. Ainsi, les deux normes ne peuvent pas être équivalentes.

Exercice 7.

Soit A une partie bornée d'un espace vectoriel normé $(E,\|\cdot\|)$. On note $\mathcal{L}$ l'espace vectoriel des applications lipschitziennes de A dans E.

1. Démontrer que les éléments de $\mathcal{L}$ sont des fonctions bornées.
2. Pour $f\in\mathcal{L}$, on pose
$$K_f=\{k\in\mathbb{R}_+;\ \forall (x,y)\in A^2,\ \|f(x)-f(y)\|\leq k\|x-y\|\}.$$
Démontrer que K_f admet une borne inférieure. Dans la suite, on notera C_f cette borne inférieure.
3. Justifier que $C_f\in K_f$.
4. Démontrer que si $f,g\in\mathcal{L}$, alors $C_{f+g}\leq C_f+C_g$.
5. Pour $a\in A$, on note $N_a(f)=\|f(a)\|+C_f$. Démontrer que N_a est une norme sur $\mathcal{L}$.
6. Soient $a\neq b\in A$. Les normes N_a et N_b sont-elles équivalentes ?

Correction.

1. Soit $f\in\mathcal{L}$. Il existe donc $K\in\mathbb{R}_+$ tel que, pour tous $x,y\in A$, $\|f(x)-f(y)\|\leq K\|x-y\|$. Fixons $a\in A$. Alors, pour tout $x\in A$, on a par l'inégalité triangulaire
$$\|f(x)\|\leq \|f(a)\|+\|f(x)-f(a)\|\leq \|f(a)\|+K\|x-a\|\leq \|f(a)\|+K\mathrm{diam}(A).$$
Ainsi, f est bornée.
2. K_f est une partie non vide (car f est lipschitzienne) et minorée. Elle admet donc une borne inférieure.

3. Soit (k_n) une suite de K_f qui converge vers C_f. Alors, pour tous $x, y \in A$, on a
$$\|f(x) - f(y)\| \leq k_n \|x - y\|.$$
On fait tendre n vers l'infini et on a
$$\|f(x) - f(y)\| \leq C_f \|x - y\|$$
ce qui entraîne bien que $C_f \in K_f$.
4. Fixons $x, y \in A$. Alors on a par l'inégalité triangulaire
$$\|(f+g)(x) - (f+g)(y)\| \leq \|f(x) - f(y)\| + \|g(x) - g(y)\|.$$
Puisque $C_f \in K_f$ et que $C_g \in K_g$, on a encore
$$\|(f+g)(x) - (f+g)(y)\| \leq C_f\|x-y\| + C_g\|x-y\| \leq (C_f + C_g)\|x-y\|.$$
Autrement dit, $C_f + C_g \in K_{f+g}$ et donc $C_{f+g} \leq C_f + C_g$.
5. N_a est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Si $f = 0$, on a $N_a(f) = 0$ et réciproquement, si $N_a(f) = 0$, alors $f(a) = 0$ et pour tout $x \in A$, on a $\|f(x) - f(a)\| \leq 0\|x - a\|$, soit $f(x) = f(a) = 0$. La fonction est bien identiquement nulle. De plus, si $f, g \in \mathcal{L}$, alors on a
$$N_a(f+g) = |f(a) + g(a)| + C_{f+g} \leq |f(a)| + |g(a)| + C_f + C_g = N_a(f) + N_a(g).$$
Comme de plus, $C_{\lambda f} = |\lambda| C_f$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ (pourquoi ?), on a également que $N_a(\lambda f) = |\lambda| N_a(f)$.
6. Par symétrie du rôle joué par a et b, il suffit de trouver une constante $M > 0$ telle que $N_b(f) \leq M N_a(f)$ pour tout $f \in \mathcal{L}$ et même, en faisant attention à la forme de N_a et de N_b, il suffit de prouver que $|f(b)| \leq M(|f(a)| + C_f)$. Mais,
$$\|f(b)\| \leq \|f(a)\| + \|f(b) - f(a)\| \leq \|f(a)\| + C_f\|b - a\| \leq \|f(a)\| + \mathrm{diam}(A) C_f \leq M N_a(f)$$
où $M = \max(\mathrm{diam}(A), 1)$. Ainsi, les deux normes sont équivalentes.

Exercice 8.

Soit N l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$: $(x, y) \mapsto \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|x+ty|}{\sqrt{1+t^2}}$.

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. La comparer à la norme euclidienne.
3. Expliquer.

Correction.

1. D'abord, si $N(x, y) = 0$, alors pour tout t, on a $x + ty = 0$. Choisir $t = 0$ montre que l'on a $x = 0$. Ensuite, si on prend $t = 1$, on obtient également $y = 0$, et donc $(x, y) = 0$. L'homogénéité est claire. Enfin, pour tous (x, y) et tous (x', y'), on a
$$|((x + x') + t(y + y')| \leq |x + ty| + |x' + ty'|,$$

en utilisant simplement l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue. On en déduit :

$$\frac{|(x+x')+t(y+y')|}{\sqrt{1+t^2}} \leq \frac{|x+ty|}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{|x'+ty'|}{\sqrt{1+t^2}} \leq N(x,y)+N(x',y').$$

Passant au sup, on obtient :

$$N\big((x,y)+(x',y')\big) \leq N(x,y)+N(x',y').$$

2. D'après l'inégalité de Cauchy Schwarz, on a :

$$|x+ty| \leq \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+t^2},$$

ce qui donne

$$\frac{|x+ty|}{\sqrt{1+t^2}} \leq N_2(x,y).$$

Pour minorer $N(x,y)$ à l'aide de $N_2(x,y)$, on va donner une valeur particulière au paramètre t. Pour cela, on va (enfin !) étudier la fonction qui à t associe $|x+ty|/\sqrt{1+t^2}$, ou plus précisément le carré de cette fonction. On pose donc :

$$f(t) = \frac{(x+ty)^2}{1+t^2}.$$

Le calcul de la dérivée donne, après simplifications :

$$f'(t) = \frac{2(x+ty)(y-tx)}{(1+t^2)^2}.$$

Supposons d'abord $x \neq 0$. f est alors maximale pour $t = y/x$. Et si on évalue en y/x la quantité $|x+ty|/\sqrt{1+t^2}$, on trouve précisément... $N_2(x,y)$. Si maintenant $x = 0$, on a

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{|ty|}{\sqrt{1+t^2}} = |y| = N_2(x,y)$$

et donc $N(x,y) \geq N_2(x,y)$. On vient donc de démontrer que $N(x,y) = N_2(x,y)$, ce qui nous aurait bien simplifié la vie pour les questions précédentes... il suffit de donner par exemple la valeur 1 et la valeur -1 au paramètre t.

3. Voila une explication, parmi d'autres, au fait que $N = N_2$. La distance (dans le plan muni d'un repère euclidien) du point M de coordonnées (x,y) à la droite d'équation $X + tY = 0$ vaut précisément $|x+ty|/\sqrt{1+t^2}$. Cette distance est toujours inférieure à la distance de M à l'origine, qui vaut $N_2(x,y)$. Voila pourquoi on a $N(x,y) \leq N_2(x,y)$. Cette distance vaut exactement la distance à l'origine lorsque la droite que l'on considère est perpendiculaire à (OM). C'est ainsi que l'on a $N(x,y) \geq N_2(x,y)$.

Exercice 9.

Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Pour $f,g \in E$, on pose $N_g(f) = \|gf\|_\infty$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N_g soit une norme.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N_g soit équivalente à la norme infinie.

Correction.

1. La seule propriété qui pose problème est de prouver que si $N_g(f) = 0$, alors $f = 0$. Si N_g n'est pas une norme, alors il existe $f \in \mathcal{C}([0,1])$, $f \neq 0$, avec $N_g(f) = 0$. Autrement, $f(x)g(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$. Puisque f est continue et non-nulle, il existe un intervalle I, non réduit à un point, sur lequel f ne s'annule pas. Mais alors, on en déduit que g doit être nulle sur I. Réciproquement, si g s'annule sur un intervalle I non-réduit à un point, alors on peut construire f continue qui s'annule hors de I et tel qu'il existe $a \in I$ avec $f(a) \neq 0$ (faire un dessin et construire f comme un "pic"). On a donc $f \neq 0$ et $N_g(f) = 0$, donc N_g n'est pas une norme. Par contraposée, on en déduit que N_g est une norme si et seulement si g ne s'annule pas sur un intervalle non réduit à un point.
2. Remarquons déjà que g, continue sur le segment $[0,1]$, est bornée par une constante $M > 0$. On a donc $N_g(f) \leq M\|f\|_\infty$ pour tout $f \in E$. Supposons de plus que g ne s'annule pas. Alors, puisque $|g|$ est continue et atteint ses bornes sur $[0,1]$, il existe $\delta > 0$ tel que $|g(x)| \geq \delta$ pour tout $x \in [0,1]$. On a alors clairement $N_g(f) \geq \delta\|f\|_\infty$ et les deux normes sont équivalentes. Réciproquement, si g s'annule, prouvons que les deux normes ne sont pas équivalentes. Soit $M > 0$. On va construire $f \in E$, $f \neq 0$, tel que $\|f\|_\infty \geq MN_g(f)$. Pour cela, on sait, par continuité de g, qu'il existe un intervalle I, non-réduit à un point, et contenu dans $[0,1]$, tel que $|g(x)| \leq \frac{1}{M}$ pour tout $x \in I$. Comme à la question précédente, on peut construire f nulle en dehors de I, avec $\|f\|_\infty \leq 1$ et $f(a) = 1$ pour au moins un a de I. On a alors
$$\|f\|_\infty = 1 \text{ tandis que } N_g(f) = \sup_{x\in I} |g(x)f(x)| \leq \frac{1}{M}.$$
Ceci prouve bien l'inégalité annoncée, et les deux normes ne sont pas équivalentes. En conclusion, on a démontré que les deux normes sont équivalentes si et seulement si g ne s'annule pas.