Mathématiques spéciales

Feuille d'exercices n°6

1. Exercices importants

Exercice 1.

1. Soit $n, m \in \mathbb{Z}$. Montrer que $m|n$ (m divise n) si, et seulement si $n\mathbb{Z} \subset m\mathbb{Z}$.
2. a) Décrire les ensembles $3\mathbb{Z} \cap 4\mathbb{Z}$, $6\mathbb{Z} \cap 9\mathbb{Z}$, $4\mathbb{Z} \cap 8\mathbb{Z}$;
   b) Plus généralement, caractériser le sous-groupe $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z}$ pour $n, m \in \mathbb{N}$.
3. Soit $n, m \in \mathbb{Z}$.
   a) Montrer que
   $$n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = \{nu + mv \mid u, v \in \mathbb{Z}\}$$
   est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$;
   b) Caractériser ce sous-groupe.

Exercice 2. *Théorème de Lagrange*

Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini et H un sous-groupe de G.

1. Montrer que pour tout $a \in G$, H et $aH = \{ah;\ h \in H\}$ ont le même nombre d'éléments.
2. Soient $a, b \in G$. Démontrer que $aH = bH$ ou $aH \cap bH = \varnothing$.
3. En déduire que le cardinal de H divise le cardinal de G.

2. Exercices basiques

a. Ordre d'un élément dans un groupe

Exercice 3.

Quel est l'ordre de $\bar{9}$ dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$?

Exercice 4.

Soit G un groupe et $x \in G$ d'ordre n. Quel est l'ordre de x^2 ?

Exercice 5.

Soit G un groupe dont tous les éléments (sauf l'élément neutre) sont d'ordre au plus deux. Démontrer que G est abélien.

b. Idéaux

Exercice 6.

Soit $(A,+,\times)$ un anneau commutatif et M une partie de A. On appelle annulateur de M l'ensemble des $x\in A$ tels que $xy=0$ pour tout $y\in M$. Démontrer que l'annulateur de M est un idéal de $(A,+,\times)$.

Exercice 7.

On appelle nilradical d'un anneau commutatif $(A,+,\times)$ l'ensemble de ses éléments nilpotents, c'est-à-dire l'ensemble des $x\in A$ pour lesquels il existe $n\geq 1$ de sorte que $x^n=0$. Démontrer que le nilradical de A est un idéal de A.

Exercice 8.

Soit A un anneau commutatif.

1. On suppose que A n'admet que les idéaux triviaux $\{0\}$ et A. Démontrer que A est un corps.
2. On suppose que A est intègre et qu'il n'admet qu'un nombre fini d'idéaux. Démontrer que A est un corps.

Exercice 9.

Soit (I_n) une suite croissante d'idéaux de $\mathbb{K}[X]$, où $\mathbb{K}$ est un corps. Démontrer que la suite (I_n) est stationnaire.

Exercice 10.

Soit $(\mathbb{D},+,\times)$ l'anneau des nombres décimaux, c'est-à-dire l'ensemble des nombres de la forme $\frac{n}{10^k}$, avec $n\in\mathbb{Z}$ et $k\in\mathbb{N}$. Démontrer que cet anneau est principal.

Exercice 11.

On souhaite étudier dans cet exercice les idéaux de $\mathbb{Z}^2$.

1. Soit I un idéal de $\mathbb{Z}^2$ et $I_1=\{x\in\mathbb{Z};\ (x,0)\in I\}$, $I_2=\{y\in\mathbb{Z};\ (0,y)\in I\}$. Démontrer que I_1 et I_2 sont deux idéaux de $\mathbb{Z}$.
2. Démontrer que $I=I_1\times I_2$.
3. Conclure.

3. Exercices d'entraînement

a. Ordre d'un élément dans un groupe

Exercice 12.

Soit G un groupe de cardinal $2n$.

1. Démontrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur G par
$$x\mathcal{R}y \iff x = y \text{ ou } x = y^{-1}$$
est une relation d'équivalence sur G.
2. En déduire que G admet des éléments d'ordre deux.

Exercice 13.

Soient G et H deux groupes.

1. Montrer que si g est un élément d'ordre p de G et h un élément d'ordre q de H, alors (g, h) est d'ordre $\text{ppcm}(p, q)$ dans $G \times H$.
2. On suppose que G et H sont cycliques. Démontrer que $G \times H$ est cyclique si et seulement si les ordres de G et H sont premiers entre eux.

Exercice 14.

Soit G un groupe admettant un nombre fini de sous-groupes.

1. Démontrer que tout élément de G est d'ordre fini.
2. En déduire que G est fini.

Exercice 15.

Soit $G = (\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})^*$ le groupe des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$.

1. Donner la liste de tous les éléments de G.
2. Pour tout $a \in G$, déterminer le sous groupe $< a >$ engendré par a.
3. Déterminer un ensemble minimal de générateurs de $(G, \cdot)$.
4. $(G, \cdot)$ est-il un groupe cyclique ?
5. Déterminer tous les sous-groupes de G et, pour chaque sous-groupe, préciser un ensemble de générateurs.
6. Parmi les sous-groupes de $(G, \cdot)$, lesquels sont isomorphes à un groupe additif $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$?

b. Idéaux

Exercice 16.

Soit $(A,+,\times)$ un anneau commutatif. Si I et J sont deux idéaux de A, on note

$$\begin{array}{rcl} I+J & = & \{i+j;\ i\in I,\ j\in J\} \\ I.J & = & \{i_1j_1+\cdots+i_nj_n;\ n\geq 1,\ i_k\in I,\ j_k\in J\} \end{array}$$

On dit que deux idéaux I et J sont étrangers si $I+J=A$.

1. Montrer que $I+J$ et IJ sont encore des idéaux de A.
2. Montrer que $I.J\subset I\cap J$.
3. Montrer que $(I+J).(I\cap J)\subset I.J$.
4. Montrer que si I et J sont étrangers, alors $I.J=I\cap J$.

Exercice 17.

Soit p un nombre premier. On note

$$\mathbb{Z}_p=\left\{x=\frac{m}{n};\ (m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*,\ p\wedge n=1\right\}.$$

1. Vérifier que $\mathbb{Z}_p$ est un sous-anneau de $(\mathbb{Q},+,\times)$.
2. Soit $k\geq 0$. On note
$$J_{p^k}=\left\{\frac{m}{n};\ (m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*,\ p\wedge n=1,\ p^k|m\right\}.$$
Vérifier que J_{p^k} est un idéal de $\mathbb{Z}_p$.
3. Réciproquement, montrer que si I est un idéal de A, il existe $k\geq 1$ tel que $I=J_{p^k}$.

Exercice 18.

Soit $n\geq 2$. Démontrer que tous les idéaux de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont principaux. A quelle condition $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est-il principal ?

Exercice 19.

Soit $\mathbb{Z}[i]=\{a+ib;\ a,b\in\mathbb{Z}^2\}$.

1. Démontrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{C},+,\times)$.
2. Quels sont les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$?
3. Soit $z\in\mathbb{C}$. Démontrer qu'il existe $\omega\in\mathbb{Z}[i]$ tel que $|z-\omega|<1$.
4. Soient $u,v\in\mathbb{Z}[i]$ avec $v\neq 0$. Démontrer qu'il existe $q,r\in\mathbb{Z}[i]$ avec $u=qv+r$ et $|r|<|v|$. A-t-on unicité ?
5. Démontrer que $\mathbb{Z}[i]$ est principal.

4. Exercices d'approfondissement

a. Ordre d'un élément dans un groupe

Exercice 20.

Soit G un groupe abélien, x et y deux éléments de G d'ordres respectifs p et q.

1. On suppose que p et q sont premiers entre eux. Démontrer que xy est d'ordre pq.
2. Importance des hypothèses - 1 : Si $H = GL_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, vérifier que A et B sont d'ordre fini, mais que AB n'est pas d'ordre fini.
3. Importance des hypothèses - 2 : Si p et q ne sont pas supposés premiers entre eux, démontrer que le produit xy n'est pas nécessairement d'ordre pq, ou d'ordre $\mathrm{ppcm}(p, q)$.
4. Une application :
   (a) Soit d un diviseur de p. Démontrer qu'il existe un élément d'ordre d dans G.
   (b) En déduire que G admet des éléments d'ordre $\mathrm{ppcm}(p, q)$.
   (c) On suppose de plus que G est fini. Démontrer que G admet un élément dont l'ordre est le ppcm de l'ordre des éléments de G.

Exercice 21.

Soit G un groupe cyclique et soit H un sous-groupe de G. Démontrer que H est cyclique.

Exercice 22.

1. Soit G un groupe et H, K deux sous-groupes de G d'ordre des entiers premiers. Démontrer que $H = K$ ou que $H \cap K = \{e\}$.
2. Démontrer que dans un groupe d'ordre 35, il existe un élément d'ordre 5 et un élément d'ordre 7.

b. Idéaux

Exercice 23.

Soit A un anneau commutatif (unitaire). Si I est un idéal de A, on appelle radical de I l'ensemble $\sqrt{I} = \{x \in A;\ \exists n \geq 1,\ x^n \in I\}$.

1. Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A.
2. Soient I, J deux idéaux de A et $p \geq 1$. Montrer que

$$\sqrt{I.J} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J},\ \sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I} \text{ et } \sqrt{I^p} = \sqrt{I}.$$

3. Si $A = \mathbb{Z}$ et $I = k\mathbb{Z}$, $k \geq 1$, déterminer le radical de I.

Exercice 24.

Soit $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib;\ a, b \in \mathbb{Z}^2\}$.

1. Démontrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{C}, +, \times)$.
2. Quels sont les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$?
3. Soit $z \in \mathbb{C}$. Démontrer qu'il existe $\omega \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $|z - \omega| < 1$.
4. Soient $u, v \in \mathbb{Z}[i]$ avec $v \neq 0$. Démontrer qu'il existe $q, r \in \mathbb{Z}[i]$ avec $u = qv + r$ et $|r| < |v|$. A-t-on unicité ?
5. Démontrer que $\mathbb{Z}[i]$ est principal.