Mathématiques spéciales

Feuille d'exercices n°8

1. Algèbres / Polynômes annulateurs

a. Exercices basiques

Exercice 1.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $C = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R});\ AM = MA\}$. Montrer que C est une algèbre.

Exercice 2.

Pour $a, b, c \in \mathbb{R}$, on note

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

et $E = \{M(a,b,c);\ a,b,c \in \mathbb{R}\}$. Démontrer que E une algèbre, et en donner une base en tant qu'espace vectoriel.

Exercice 3.

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer $A^2 - 5A$ puis en déduire un polynôme annulateur de A. Est-ce le polynôme minimal de A ?
2. Montrer que A est inversible en exhibant son inverse.
3. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (3x + y, x + 3y)$.

1. Calculer $f^2 - 6f$ puis en déduire un polynôme annulateur de f. Est-ce le polynôme minimal de f ?
2. Montrer que f est bijective en exhibant son inverse.

b. Exercices d'entraînement

Exercice 5.

Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice ne comportant que des 1. Déterminer un polynôme annulateur pour J. En déduire la valeur de J^k pour $k \geq 2$.

Exercice 6.

Soit M une matrice triangulaire par blocs $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$. On suppose que P est un polynôme annulateur de A et que Q est un polynôme annulateur de B. Déterminer un polynôme annulateur de M.

c. Exercices d'approfondissement

Exercice 7.

Soit A une algèbre commutative intègre de dimension finie $n \geq 2$ sur $\mathbb{R}$. On identifie $\mathbb{R}$ avec $\mathbb{R}.1$, où 1 est l'élément neutre de A pour la multiplication.

1. Démontrer que tout $a \in A$ non-nul est inversible.
2. Soit $a \in A$ et non dans $\mathbb{R} = \mathrm{vect}(1)$. Prouver que la famille $(1, a)$ est libre, tandis que la famille $(1, a, a^2)$ est liée.
3. En déduire l'existence de $i \in \mathrm{vect}(1, a)$ tel que $i^2 = -1$.
4. En déduire que $\dim(A) = 2$.
5. En déduire que A est isomorphe à $\mathbb{C}$.

2. Ouverts

Exercice 8.

Déterminer si les ensembles suivants sont des ouverts. *Pour ce faire, on s'efforcera d'utiliser seulement la définition d'un ouvert dans un espace vectoriel normé - même si d'autres méthodes pourraient permettre de conclure.*

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 4\}$ dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$.
2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y\}$ dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$.
3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x\}$ dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$.
4. $D = \{f \in C([0,1], \mathbb{R}) \mid \forall x \in [0,1],\ f(x) > 0\}$ dans $(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.
5. $E = \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in [0,1],\ f(x) > 0\}$ dans $(C(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.
6. $F = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u \text{ converge }\}$ dans $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ où ℓ^∞ est l'ensemble des suites à valeurs réelles bornées.

Exercice 9.

Montrer que les ensembles suivants sont des ouverts :

1. $A =]-1, 1[^n$ dans $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
2. $B =]-1, 2[\times]6, 22[$ dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$.
3. $C = \{f \in C([0,1], \mathbb{R}) \mid \mathcal{G}_f \subset \mathbb{R}\times]-1, 1[\}$ dans $(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ où $\mathcal{G}_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ désigne le graphe de f.

Exercice 10.

Dans cet exercice, on s'efforcera d'essayer d'utiliser les propriétés relatives aux unions et réunions d'ouverts/fermés pour conclure. On pourra utiliser le fait que les boules ouvertes sont des ouverts et les boules fermées sont des fermés.

1. Montrer que les ensembles suivants sont des ouverts :
   (a) $A =]-1, 1[\times\mathbb{R}$ dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$.
   (b) $B = \{f \in C([0,1], \mathbb{R}) \mid 1 < \int_0^1 |f(t)| \, \mathrm{d}t < 2\}$ dans $(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$.
2. Montrer que les ensembles suivants sont des fermés :
   (a) $A = \{Re^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ dans $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ où $R \geq 0$.
   (b) $B = \{x = (x_1, ..., x_n) \mid R \leq |x_i| \leq R', \ \forall i \in [\![1, n]\!]\}$ dans $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $R' \geq R \geq 0$.

Exercice 11.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $A, B \subset E$. Montrer que si A est un ouvert de E, alors $A + B = \{a + b \mid a \in A, \ b \in B\}$ est un ouvert de E.

Exercice 12.

Soit E un espace vectoriel normé et A, B deux parties de E. On suppose que $\inf_{x\in A, y\in B} \|x-y\| > 0$. Démontrer qu'il existe deux ouverts U et V de E tels que $A \subset U$, $B \subset V$ et $U \cap V = \varnothing$.