Mathématiques spéciales

Feuille d'exercices n°9

1. Exercices basiques

a. Ouverts / Fermés / Adhérence / Intérieur / Densité

Exercice 1.

Déterminer si les ensembles suivants sont ouverts ou fermés :

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x-1| < 1\} \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y\}$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1,\ |y| \leq 1\} \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q} \text{ et } y \in \mathbb{Q}\}$$
$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \notin \mathbb{Q} \text{ ou } \ y \notin \mathbb{Q}\} \qquad F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}.$$

Exercice 2.

Démontrer que les deux ensembles suivants sont ouverts :

$$F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 < \exp(\sin y) - 12\right\}, \qquad G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; -1 < \ln(x^2+1) < 1\}.$$

Exercice 3.

Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. On pose

$$O = \{f \in E :\ f(1) > 0\} \text{ et } F = \left\{f \in E :\ \int_0^{1/2} f(t)dt \leq 0\right\}.$$

1. Est-ce que O est un ouvert de $(E, \|\cdot\|_\infty)$? de $(E, \|\cdot\|_1)$?
2. Est-ce que F est un fermé de $(E, \|\cdot\|_\infty)$? de $(E, \|\cdot\|_1)$?

Exercice 4.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $F = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

1. On pose $A_1 = \{f \in E :\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0\}$. Est-ce que A_1 est une partie fermée de $(E, \|\cdot\|_\infty)$?
2. On pose $A_2 = \{f \in E :\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0\}$. Est-ce que A_2 est une partie ouverte de $(E, \|\cdot\|_\infty)$?
3. On pose $A_3 = \{f \in F :\ \forall x \in [0,1],\ f(x) > 0\}$. Est-ce que A_3 est une partie ouverte de $(F, \|\cdot\|_\infty)$?
4. Est-ce que A_3 est une partie ouverte de $(F, \|\cdot\|_1)$?

Exercice 5.

Soit (E, N) un espace vectoriel normé, et A et B deux parties de E. On définit :

$$A + B = \{z \in E;\ \exists x \in A,\ \exists y \in B,\ z = x + y\}.$$

1. Démontrer que si A est ouvert, alors pour tout $b \in E$, $A + \{b\}$ est ouvert.
2. Démontrer que si A est ouvert, alors $A + B$ est ouvert.
3. Démontrer que les parties $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ xy = 1\}$ et $B = \{0\} \times \mathbb{R}$ sont fermées.
4. Démontrer que $A + B$ n'est pas fermée, pour A et B les parties de $\mathbb{R}^2$ introduites à la question précédente.

Exercice 6.

Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E. On suppose que F est ouvert. Démontrer que $F = E$.

Exercice 7.

Dessiner, puis déterminer l'intérieur et l'adhérence des parties de $\mathbb{R}^2$ suivantes :

$$A = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0\big\} \qquad B = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ xy = 1\big\}$$
$$C = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ xy > 1\big\} \qquad D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2\big\} \setminus \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)^2 + y^2 < 1\big\}.$$

Exercice 8.

Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que l'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée de même centre et même rayon.

Exercice 9.

On considère sur E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ les deux normes suivantes :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| \text{ et } \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt.$$

On note $F = \{f \in E;\ f(0) = 0\}$. Déterminer l'adhérence de F dans E pour chacune des deux normes précédentes.

Exercice 10.

Soient U et V deux ouverts denses d'un espace vectoriel normé E. Démontrer que $U \cap V$ reste dense.

b. Continuité des applications linéaires

Exercice 11.

Déterminer si l'application linéaire $T : (E, N_1) \to (F, N_2)$ est continue dans les cas suivants :

1. $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$ et $T : (E, \|.\|_1) \to (E, \|.\|_1),\ f \mapsto fg$ où $g \in E$ est fixé.
2. $E = \mathbb{R}[X]$ muni de $\|\sum_{k\geq 0} a_k X^k\| = \sum_{k\geq 0} |a_k|$ et $T : (E, \|.\|) \to (E, \|.\|)$, $P \mapsto P'$.
3. $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni de $\|\sum_{k=0}^n a_k X^k\| = \sum_{k=0}^n |a_k|$ et $T : (E, \|.\|) \to (E, \|.\|)$, $P \mapsto P'$.
4. $E = \mathbb{R}[X]$ muni de $\|\sum_{k\geq 0} a_k X^k\| = \sum_{k\geq 0} k!|a_k|$ et $T : (E, \|.\|) \to (E, \|.\|)$, $P \mapsto P'$.
5. $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$, $F = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$ et $T : (E, \|.\|_2) \to (F, \|.\|_1),\ f \mapsto fg$ où $g \in E$ est fixé.

Exercice 12.

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt,$$

dont on admettra qu'il s'agit d'une norme sur E. Soit ϕ l'endomorphisme de E défini par

$$\phi(f)(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

1. Justifier la terminologie : "ϕ est un endomorphisme de E."
2. Démontrer que ϕ est continue.
3. Pour $n \geq 0$, on considère f_n l'élément de E défini par $f_n(x) = ne^{-nx}$, $x \in [0,1]$. Calculer $\|f_n\|_1$ et $\|\phi(f_n)\|_1$.
4. On pose $\|\|\phi\|\| = \sup_{f\neq 0_E} \frac{\|\phi(f)\|_1}{\|f\|_1}$. Déterminer $\|\|\phi\|\|$.

Exercice 13.

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. On pose

$$A = \left\{ f \in E;\ f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t)dt \geq 1 \right\}.$$

Démontrer que A est une partie fermée de E.

Exercice 14.

Soit E un espace préhilbertien muni de la norme associée au produit scalaire. Démontrer que l'orthogonal de toute partie A de E est un fermé de E.

Exercice 15.

Soit N_1 et N_2 deux normes sur l'espace vectoriel E. Montrer que N_1 et N_2 sont équivalentes si et seulement si $Id : (E, N_1) \to (E, N_2)$ et $Id : (E, N_2) \to (E, N_1)$ sont continues.

c. Norme subordonnée

Exercice 16.

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la norme N définie pour tout $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ par $N(A) = \sup_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right\}$ (on admet qu'il s'agit d'une norme). Démontrer que l'application trace $\mathrm{Tr} : E \to \mathbb{R}$ est continue, et calculer sa norme subordonnée.

Exercice 17.

Soit $E = \mathcal{C}([0,1])$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ et $F = \mathcal{C}^1([0,1])$ muni de $\|f\|_F = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Soit $T : E \to F$ défini par $Tf(x) = \int_0^x f(t)dt$. Démontrer que T est continue et calculer sa norme subordonnée.

Exercice 18.

On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme suivante :

$$\|\sum_{k=0}^n a_k X^k\| = \sup\{|a_k|;\ 0 \leq k \leq n\}.$$

Pour $c \in \mathbb{R}$, on définit la forme linéaire $\phi_c : (\mathbb{R}[X], \|\cdot\|) \to (\mathbb{R}, |\cdot|), P \mapsto P(c)$. Pour quelles valeurs de c la forme linéaire ϕ_c est-elle continue ? Dans ce cas, déterminer la norme subordonnée de ϕ_c.

2. Exercices d'entraînement

a. Ouverts / Fermés / Adhérence / Intérieur / Densité

Exercice 19.

Soit E un espace vectoriel normé. Démontrer que les seules parties à la fois ouvertes et fermées de E sont $\varnothing$ et E.

Exercice 20.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de $\|\cdot\|_\infty$. On note D l'ensemble des fonctions de E qui sont dérivables et P l'ensemble des fonctions de E qui sont polynomiales. Déterminer l'intérieur de D et de P.

Exercice 21.

Soit C une partie convexe d'un espace vectoriel normé. Démontrer que l'adhérence de C est convexe, puis que l'intérieur de C est convexe.

Exercice 22.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et (u_n) une suite de E. On note V l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n).

1. Démontrer que $V = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{u_p : \ p \geq n\}}$.
2. En déduire que V est fermé.

Exercice 23.

Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$.

1. Justifier l'existence de $m = \inf\{x \in H; \ x > 0\}$.
2. On suppose que $m > 0$. Démontrer que $m \in H$ puis que $H = m\mathbb{Z}$.
3. On suppose que $m = 0$. Démontrer que H est dense dans $\mathbb{R}$.
4. En déduire que, si a et b sont deux réels non nuls, $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$.

b. Continuité des applications linéaires

Exercice 24.

Soit $E = \mathbb{R}[X]$, muni de la norme $\|\sum_i a_i X^i\| = \sum_i |a_i|$.

1. Est-ce que l'application linéaire $\phi : (E, \|.\|) \to (E, \|.\|)$, $P(X) \mapsto P(X+1)$ est continue sur E ?
2. Est-ce que l'application linéaire $\psi : (E, \|.\|) \to (E, \|.\|)$, $P(X) \mapsto AP$, où A est un élément fixé de E, est continue sur E ?

Exercice 25.

Soit E l'espace vectoriel des suites $(a_n)_{n\geq 1}$ de nombres complexes telle que $\sum_{n\geq 1} |a_n|$ converge. On pose, pour $a = (a_n) \in E$,

$$\|a\| = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|.$$

1. Démontrer que $\|\cdot\|$ définit une norme sur E.
2. On pose $F = \{a \in E; \ \sum_{n\geq 1} a_n = 1\}$. F est-il ouvert ? fermé ? borné ?

Exercice 26.

Soit E un espace vectoriel normé et $\mathcal{L}_c(E)$ l'ensemble des applications linéaires continues sur E. Pour $u \in \mathcal{L}_c(E)$, on pose

$$\|u\| = \sup\{\|u(x)\|;\ \|x\| \leq 1\}.$$

1. Démontrer que ceci définit une norme sur $\mathcal{L}_c(E)$.
2. Démontrer que, pour tout $x \in E$ et tout $u \in \mathcal{L}_c(E)$, on a

$$\|u(x)\| \leq \|u\| \times \|x\|.$$

   En déduire que, pour tous $u, v \in \mathcal{L}_c(E)$, alors $\|u \circ v\| \leq \|u\| \times \|v\|$.

Exercice 27.

Soit E un espace vectoriel normé et $u \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que u est continue si et seulement si $\{x \in E;\ \|u(x)\| = 1\}$ est fermé.

Exercice 28.

Soit E un espace vectoriel normé et u un endomorphisme de E vérifiant, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leq \|x\|$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u^k.$$

1. Simplifier $v_n \circ (u - Id)$.
2. Montrer que $\ker(u - Id) \cap \operatorname{Im}(u - Id) = \{0\}$.
3. On suppose désormais que E est de dimension finie. Démontrer que

$$\ker(u - Id) \oplus \operatorname{Im}(u - Id) = E.$$

4. Soit p la projection sur $\ker(u - Id)$ parallèlement à $\operatorname{Im}(u - Id)$. Démontrer que, pour tout $x \in E$, $v_n(x) \to p(x)$.

Exercice 29.

Soit E un espace vectoriel normé (sur $\mathbb{R}$) et soit $\phi : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire non identiquement nulle. Le but de l'exercice est de démontrer que ϕ est continue si et seulement si le noyau de ϕ est fermé.

1. Démontrer le sens direct.
2. Réciproquement, on suppose que le noyau de ϕ, noté H, est fermé. On fixe $y \in E$ tel que $\phi(y) = 1$.
   (a) Démontrer que $\phi^{-1}(\{1\})$ est fermé.
   (b) En déduire qu'il existe $r > 0$ tel que $B(0, r) \cap \phi^{-1}(\{1\}) = \varnothing$.
   (c) Démontrer que $x \in B(0, r) \implies |\phi(x)| \leq 1$.
   (d) Conclure.

3. Exercices d'approfondissement

a. Continuité des applications linéaires

Exercice 30.

Soit $E = \mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbb{R})$. On considère l'opérateur de dérivation $D : E \to E$, $f \mapsto f'$. Montrer que, quelle que soit la norme N dont on munit E, D n'est jamais une application linéaire continue de (E, N) dans (E, N).

b. Norme subordonnée

Exercice 31.

Soit $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On munit $\mathcal{C}(I)$ de la norme $\|.\|_\infty$. On dit qu'une forme linéaire $u : \mathcal{C}(I) \to \mathbb{R}$ est positive si $u(f) \geq 0$ pour tout $f \in C(I)$ vérifiant $f(x) \geq 0$ si $x \in I$.

1. Démontrer que, pour toute forme linéaire $u : \mathcal{C}(I) \to \mathbb{R}$ positive, $|u(f)| \leq u(|f|)$.
2. Soit e la fonction définie par $e(x) = 1$ pour tout $x \in I$. Déduire de la question précédente que toute forme linéaire positive est continue, et calculer $|||u|||$ en fonction de $u(e)$.