Mathématiques spéciales

Corrigé de la feuille d'exercices n°9

1. Exercices basiques

a. Ouverts / Fermés / Adhérence / Intérieur / Densité

Exercice 1.

Déterminer si les ensembles suivants sont ouverts ou fermés :

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x-1| < 1\} \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y\}$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1,\ |y| \leq 1\} \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q} \text{ et } y \in \mathbb{Q}\}$$
$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \notin \mathbb{Q} \text{ ou } \ y \notin \mathbb{Q}\} \qquad F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}.$$

Correction.

A et F sont ouverts. B est fermé, les autres ne sont ni ouverts ni fermés. Voici une preuve variant les techniques :

1. A est ouvert. En effet, si $(x,y) \in A$, alors $0 < |x-1| < 1$, c'est-à-dire que $x \neq 1$ et $0 < x < 2$. On sait alors qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $1 \notin]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ et $0 < x-\varepsilon < x+\varepsilon < 2$. Alors, $B((x,y),\varepsilon)$ (pour la norme infinie) est contenue dans A. A n'est pas fermé, car la suite (u_n) définie par $u_n = (1/n, 0)$ est une suite d'éléments de A qui converge vers $(0,0)$ qui n'est pas dans A.
2. B est fermé. Si (x_n, y_n) est une suite d'éléments de B qui converge vers (x,y), alors on sait que pour chaque entier n, on a $0 \leq x_n \leq y_n$. En passant à la limite, on en déduit que $0 \leq x \leq y$ et donc que $(x,y) \in B$. B n'est pas ouvert : dans toute boule contenant $(0,0)$, il y a des points qui ne sont pas dans B (les points du type $(-\varepsilon, 0)$ par exemple).
3. C n'est pas fermé, car si $u_n = (1 - \frac{1}{n}, 1)$, (u_n) est une suite d'éléments de C qui converge vers $(1,1)$ qui n'est pas dans C. C n'est pas ouvert, car toute boule contenant le point $(0,1)$, qui est dans C, contient des éléments qui ne sont pas dans C (par exemple les points $(0, 1+\varepsilon)$.
4. D n'est pas fermé : si (r_n) est une suite de rationnels convergeant vers $\sqrt{2}$, alors la suite $(r_n, 0)$ est une suite d'éléments de D qui converge vers $(\sqrt{2}, 0)$ qui n'est pas élément de D. D n'est pas ouvert. Dans toute boule de centre $(0,0)$, qui est élément de D, il existe des éléments qui ne sont pas dans D, par exemple les éléments du type $(0, \sqrt{2}/n)$.
5. E n'est pas ouvert car son complémentaire, D, n'est pas fermé. E n'est pas fermé car son complémentaire n'est pas ouvert.
6. F est ouvert car c'est l'image réciproque de l'intervalle ouvert $]-\infty, 4[$ par la fonction continue $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 + y^2$. F n'est pas fermé, car la suite (u_n) définie par $u_n = (2 - \frac{1}{n}, 0)$ est une suite d'éléments de D qui converge vers $(2,0)$ qui n'est pas élément de F.

Exercice 2.

Démontrer que les deux ensembles suivants sont ouverts :

$$F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 < \exp(\sin y) - 12\right\}, \qquad G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; -1 < \ln(x^2+1) < 1\}.$$

Correction.

Posons $f(x,y) = x^2 - \exp(\sin y) + 12$. Alors f est continue sur $\mathbb{R}^2$, et $F = f^{-1}(]-\infty, 0[)$. Comme $]-\infty, 0[$ est ouvert, F est ouvert comme image réciproque d'un ouvert par une application continue. De même, posons $g(x,y) = \ln(x^2+1)$. Alors g est continue et $G = g^{-1}(]-1,1[)$ est ouvert comme image réciproque de l'ouvert $]-1,1[$ par g.

Exercice 3.

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. On pose

$$O = \{f \in E :\ f(1) > 0\} \text{ et } F = \left\{f \in E :\ \int_0^{1/2} f(t)dt \leq 0\right\}.$$

1. Est-ce que O est un ouvert de $(E, \|\cdot\|_\infty)$? de $(E, \|\cdot\|_1)$?
2. Est-ce que F est un fermé de $(E, \|\cdot\|_\infty)$? de $(E, \|\cdot\|_1)$?

Correction.

1. On va commencer par prouver que O est un ouvert de $(E, \|\cdot\|_\infty)$. Soit $f \in E$ et posons $r = f(1)$. Alors $B_\infty(f,r) \subset O$. En effet, si $g \in B_\infty(f,r)$, alors
$$g(1) \geq f(1) + g(1) - f(1) \geq f(1) - \|f-g\|_\infty > f(1) - f(1) = 0.$$
En revanche, O n'est pas un ouvert de $(E, \|\cdot\|_1)$. En effet, considérons $f \in O$ et $r > 0$ quelconque. Pour $n \geq 1$, posons $g_n = f - f(1)x^n$. Alors $\|g_n - f\|_1 = f(1)\int_0^1 x^n dx = \frac{f(1)}{n+1} \to 0$. Ainsi, pour n assez grand, $g_n \in B_1(f,r)$. En revanche, g_n n'est jamais élément de O. En effet, on a $g_n(1) = f(1) - f(1) = 0$.
2. On prouve que $E \backslash F = \{f \in E :\ \int_0^{1/2} f(t)dt > 0\}$ est ouvert pour $\|\cdot\|_\infty$ et aussi pour $\|\cdot\|_1$. Soit $f \in E\backslash F$ et commençons par traiter le cas de la norme infinie. Soit $r = \int_0^{1/2} f(t)dt > 0$ et $g \in B_\infty(f,r)$. Alors
$$\begin{aligned}
\int_0^{1/2} g(t)dt &= \int_0^{1/2} f(t)dt + \int_0^{1/2} g(t) - f(t) \\
&\geq \int_0^{1/2} f(t)dt - \int_0^{1/2} |g(t) - f(t)|dt \\
&\geq \int_0^{1/2} f(t)dt - \int_0^{1/2} \|g-f\|_\infty dt \\
&\geq \int_0^{1/2} f(t)dt - \int_0^{1/2} r dt \\
&\geq r - \frac{r}{2} > 0
\end{aligned}$$

Ainsi $B_\infty(f,r) \subset E\backslash F$ et F est bien un fermé de $(E, \|\cdot\|_\infty)$. Passons à la norme 1. On va prouver qu'on a toujours $B_1(f,r) \subset E\backslash F$. En effet, si $g \in B_1(f,r)$, alors

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/2} g(t)dt &= \int_0^{1/2} f(t)dt + \int_0^{1/2} g(t) - f(t) \\
&\geq \int_0^{1/2} f(t)dt - \int_0^{1/2} |g(t) - f(t)|dt \\
&\geq \int_0^{1/2} f(t)dt - \int_0^{1} |g(t) - f(t)|dt \\
&> r - r = 0
\end{aligned}$$

Remarquons qu'on aurait pu conclure que O est un ouvert pour $(E, \|\cdot\|_\infty)$ et que F est un fermé pour $(E, \|\cdot\|_\infty)$ et $(E, \|\cdot\|_1)$ en remarquant que ce sont respectivement l'image réciproque d'un ouvert ou d'un fermé de $\mathbb{R}$ par une forme linéaire continue.

Exercice 4.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $F = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$.

1. On pose $A_1 = \{f \in E : \ \forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) \geq 0\}$. Est-ce que A_1 est une partie fermée de $(E, \|\cdot\|_\infty)$?
2. On pose $A_2 = \{f \in E : \ \forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) > 0\}$. Est-ce que A_2 est une partie ouverte de $(E, \|\cdot\|_\infty)$?
3. On pose $A_3 = \{f \in F : \ \forall x \in [0,1], \ f(x) > 0\}$. Est-ce que A_3 est une partie ouverte de $(F, \|\cdot\|_\infty)$?
4. Est-ce que A_3 est une partie ouverte de $(F, \|\cdot\|_1)$?

Correction.

1. A_1 est fermé. Pour cela, on peut utiliser la caractérisation séquentielle. En effet, prenons une suite (f_n) de A_1 qui converge vers $f \in E$, et prouvons que $f \in A_1$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors on sait que $f_n(x) \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, on sait que
$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty$$
et donc que $f_n(x) \to f(x)$. On en déduit par passage à la limite que $f(x) \geq 0$, et comme c'est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f \in A_1$.
2. On va prouver que A_2 n'est pas ouvert. En effet, on va trouver une fonction $f \in A_2$ telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, $B(f, \varepsilon)$ n'est pas contenu dans A_2. Prenons par exemple la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Alors f est dans A_2. Soit $\varepsilon > 0$ et considérons g définie par $g(x) = f(x) - \varepsilon/2$. Il est clair que $g \in B(f, \varepsilon)$. Mais si x_0 est tel que $f(x_0) < \varepsilon/2$ (ce qui est possible si x_0 est assez grand puisque $\lim_{+\infty} f = 0$), alors $g(x_0) < 0$ et donc $g \notin A_2$. Ainsi, A_2 n'est pas ouvert.
3. On va prouver cette fois que A_3 est ouvert dans $(F, \|\cdot\|_\infty)$. Fixons en effet $f \in A_3$. Par rapport à la question précédente, on a des informations supplémentaires : f est continue et on ne s'intéresse qu'au segment $[0,1]$. Sur ce segment, f atteint son minimum : il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que, pour tout $x \in [0,1]$, on a $f(x) \geq f(x_0)$. Remarquons que $f(x_0) > 0$

et posons $\varepsilon = f(x_0)/2$. Alors, pour tout $g \in B_\infty(f, \varepsilon)$, on a $g \in A_3$. En effet, pour tout $x \in [0, 1]$, on a

$$g(x) \geq f(x) - \varepsilon \geq f(x_0) - \varepsilon \geq \varepsilon/2 > 0.$$

Ainsi, A_3 est ouvert dans $(F, \|\cdot\|_\infty)$.

4. On va vérifier qu'en changeant de norme, on peut passer d'un ensemble ouvert à un ensemble qui ne l'est plus. Prenons f la fonction identiquement égale à 1, qui est bien sûr élément de A_3. On va prouver que, pour tout $\varepsilon > 0$, la boule $B_1(f, \varepsilon)$ n'est pas contenue dans A_3. Pour cela, il suffit de trouver une suite (f_n) de F telle que, pour n assez grand, $\|f_n - f\|_1 < \varepsilon$ et $f_n \notin A_3$. Posons pour $n \geq 1$ $f_n(x) = 1 - x^n$. Alors $f_n(1) = 0$ et donc $f_n \notin A_3$. De plus,

$$\|f_n - f\|_1 = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \to 0.$$

Donc pour n assez grand, $f_n \in B_1(f, \varepsilon)$. Ainsi, on a bien prouvé que A_3 n'est pas un ouvert de $(F, \|\cdot\|_1)$.

Exercice 5.

Soit (E, N) un espace vectoriel normé, et A et B deux parties de E. On définit :

$$A + B = \{z \in E;\ \exists x \in A,\ \exists y \in B,\ z = x + y\}.$$

1. Démontrer que si A est ouvert, alors pour tout $b \in E$, $A + \{b\}$ est ouvert.
2. Démontrer que si A est ouvert, alors $A + B$ est ouvert.
3. Démontrer que les parties $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ xy = 1\}$ et $B = \{0\} \times \mathbb{R}$ sont fermées.
4. Démontrer que $A + B$ n'est pas fermée, pour A et B les parties de $\mathbb{R}^2$ introduites à la question précédente.

Correction.

1. Soit $z \in A + \{b\}$, $z = x + b$ avec $x \in A$. Puisque A est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset A$. Mais alors, $B(z, \varepsilon) = B(x + b, \varepsilon) \subset A + b$. En effet, si y est élément de cette boule, $N((y - b) - x) < \varepsilon$, et donc $y - b = a$ avec $a \in B(x, \varepsilon) \subset A$. D'où $y = a + b \in A + \{b\}$.
2. Remarquons que :

$$A + B = \bigcup_{b \in B} A + \{b\}.$$

La réunion d'une famille (quelconque) d'ouverts étant un ouvert et puisque $A + \{b\}$ est ouvert d'après la question précédente, on obtient que $A + B$ est ouvert.

3. Soit $(u_n) = (x_n, y_n)$ une suite d'éléments de A, convergeant vers $u = (x, y)$. Alors pour tout entier n, on a $x_n y_n = 1$ et donc en passant à la limite, $xy = 1$ ce qui prouve que $u \in A$. Par la caractérisation séquentielle des fermés, on en déduit que A est fermé. B est lui-aussi fermé, en utilisant une démonstration tout à fait similaire, ou parce que le produit cartésien de deux fermés est un fermé.
4. Considérons la suite $(u_n) = (1/n, 1)$. Alors c'est une suite d'éléments de $A + B$ car elle s'écrit $u_n = a_n + b_n$ avec $a_n = (1/n, n) \in A$ et $b_n = (0, 1 - n) \in B$. Elle converge vers $(0, 1)$,

qui n'est pas un élément de $A+B$ car tout élément de $A+B$ a sa première coordonnée non nulle.

Exercice 6.

Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E. On suppose que F est ouvert. Démontrer que $F = E$.

Correction.

Si F est ouvert, alors puisque $0 \in F$, il existe $r > 0$ tel que $B(0,r) \subset F$. Mais alors, prenons $x \in E$, $x \neq 0$. Alors $y = \frac{rx}{2\|x\|}$ a pour norme $r/2$, c'est donc un élément de F. Puisque F est stable par multiplication par un scalaire, $x = \frac{2\|x\|}{r} y$ est élément de F et donc $F = E$.

Exercice 7.

Dessiner, puis déterminer l'intérieur et l'adhérence des parties de $\mathbb{R}^2$ suivantes :

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0\right\} \qquad B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ xy = 1\right\}$$
$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ xy > 1\right\} \qquad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 2\right\} \setminus \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+y^2 < 1\right\}.$$

Correction.

1. Remarquons d'abord que A est une partie ouverte (c'est le demi-plan droit strict) : si $(x,y) \in A$, alors $B((x,y), x/2)$ est contenue dans A. Ainsi, $\overset{\circ}{A} = A$. D'autre part, on a $\bar{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0\}$. En effet, si (x_n, y_n) est une suite de A qui converge vers (x,y), alors par passage à la limite $x \geq 0$, ce qui prouve que $\bar{A} \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0\}$. Réciproquement, soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \geq 0$. Alors, si $x > 0$, $(x,y) \in A \subset \bar{A}$ et si $x = 0$, alors prenons la suite (x_n, y_n) définie par $x_n = x + \frac{1}{n}$, $y_n = y$. (x_n, y_n) est une suite de A qui converge vers (x,y), ce qui démontre l'inclusion réciproque.
2. On montre facilement que B est fermé, et donc que $\bar{B} = B$. D'autre part, $\overset{\circ}{B} = \varnothing$. En effet, si $(x,y) \in B$, il existe une suite (x_n, y_n) qui n'est pas dans B et qui converge vers x, par exemple $x_n = x + \frac{1}{n}$ et $y_n = y$, on a $x_n y_n = 1 + \frac{y}{n} \neq 1$ puisque $y \neq 0$.
3. On remarque d'abord que cet ensemble est ouvert (le plus facile est de dire qu'il s'agit de l'image réciproque de l'ouvert $]1, +\infty[$ par l'application continue $\phi(x,y) = xy$). Ainsi, $\overset{\circ}{C} = C$. D'autre part, par une démonstration semblable à la démonstration effectuée pour A, on démontre que $\bar{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ xy \geq 1\}$.
4. On va écrire l'ensemble D autrement :
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 2\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+y^2 \geq 1\}.$$
Remarquons que D est fermé, et donc $\bar{D} = D$. D'autre part, l'intérieur de l'intersection vaut l'intersection des intérieurs. On a donc :
$$\overset{\circ}{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 2\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+y^2 > 1\}.$$

La frontière est alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{Fr}(D) &= \big(\{(x;y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2\leqslant 2\}\cap\{(x;y)\in\mathbb{R}^2|(x-1)^2+y^2=1\}\big)\\ &\quad\cup\big(\{(x;y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2=2\}\cap\{(x;y)\in\mathbb{R}^2|(x-1)^2+y^2\geq 1\}.\big)\end{aligned}$$

Exercice 8.

Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que l'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée de même centre et même rayon.

Correction.

Soit $B = B(x,R)$ une telle boule ouverte, et $y \in \bar{B}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe z dans B avec $\|z-y\| \leq \varepsilon$. On en déduit par l'inégalité triangulaire que :

$$\|y-x\| \leq R+\varepsilon,$$

et donc puisque ceci est vérifié pour tout $\varepsilon > 0$, $\|y-x\| \leq R$, ce qui montre une inclusion. D'autre part, si y est dans la boule fermée de centre x et de rayon R, il suffit de se restreindre à y sur la sphère, et si ε est un réel positif, on considère :

$$z = x + (R-\varepsilon)\frac{y-x}{R}.$$

Alors, on a $\|z-x\| \leq R-\varepsilon \implies z \in B$ et $\|z-y\| \leq \varepsilon$. Ceci montre que $y \in \bar{B}$. Bien sûr, on aurait pu faire toute la preuve avec la caractérisation séquentielle, en remplaçant ε par $1/n$ avec $n \to +\infty$.

Exercice 9.

On considère sur E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ les deux normes suivantes :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \text{ et } \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt.$$

On note $F = \{f \in E;\ f(0) = 0\}$. Déterminer l'adhérence de F dans E pour chacune des deux normes précédentes.

Correction.

Introduisons $L(f) = f(0)$. Alors, pour tout $f \in E$, $|L(f)| \leq \|f\|_\infty$. Ainsi, la forme linéaire L est continue de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Puisque $F = L^{-1}(\{0\})$, F est un fermé de E pour $\|\cdot\|_\infty$. Ceci ne fonctionne plus avec la norme $\|\cdot\|_1$, et on va au contraire prouver que F est dense dans E pour cette norme. Pour cela, fixons $f \in E$ et, pour $n \geq 1$, considérons f_n la fonction de E qui est égale à f sur $[1/n, 1]$ et qui est affine sur $[0, 1/n]$, avec de plus $f_n(0) = 0$ de sorte que $f_n \in F$.

Alors on a

$$\|f_n - f\|_1 = \int_0^{1/n} |f_n(t) - f(t)|dt.$$

Mais, pour tout $t \in [0, 1/n]$, $|f(t)| \leq \|f\|_\infty$. De même, pour tout $t \in [0, 1/n]$, on a

$$|f_n(t)| \leq |f_n(1/n)| = |f(1/n)| \leq \|f\|_\infty.$$

Ainsi,

$$\|f_n - f\|_1 \leq \int_0^{1/n} \big(|f(t)| + |f_n(t)|\big)dt \leq \frac{2\|f\|_\infty}{n}.$$

On a bien $f_n \to f$ pour la norme $\|\cdot\|_1$, et F est dense dans E.

Exercice 10.

Soient U et V deux ouverts denses d'un espace vectoriel normé E. Démontrer que $U \cap V$ reste dense.

Correction.

Soit $a \in E$ et $\varepsilon > 0$. Il s'agit de prouver que $B(a, \varepsilon) \cap U \cap V$ est non-vide. Mais U est dense dans E, et donc il existe $u \in U \cap B(a, \varepsilon)$. Puisque $U \cap B(a, \varepsilon)$ est ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que $B(u, \delta) \subset U \cap B(a, \varepsilon)$. Maintenant, puisque V est dense, il existe $v \in V \cap B(u, \delta)$. Alors $v \in B(a, \varepsilon) \cap U \cap V$. Remarquons que l'hypothèse V ouvert est inutile. On aurait pu se contenter de supposer que U est un ouvert dense et que V est dense.

b. Continuité des applications linéaires

Exercice 11.

Déterminer si l'application linéaire $T : (E, N_1) \to (F, N_2)$ est continue dans les cas suivants :

1. $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$ et $T : (E, \|.\|_1) \to (E, \|.\|_1)$, $f \mapsto fg$ où $g \in E$ est fixé.
2. $E = \mathbb{R}[X]$ muni de $\|\sum_{k\geq 0} a_k X^k\| = \sum_{k\geq 0} |a_k|$ et $T : (E, \|.\|) \to (E, \|.\|)$, $P \mapsto P'$.
3. $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni de $\|\sum_{k=0}^n a_k X^k\| = \sum_{k=0}^n |a_k|$ et $T : (E, \|.\|) \to (E, \|.\|)$, $P \mapsto P'$.
4. $E = \mathbb{R}[X]$ muni de $\|\sum_{k\geq 0} a_k X^k\| = \sum_{k\geq 0} k!|a_k|$ et $T : (E, \|.\|) \to (E, \|.\|)$, $P \mapsto P'$.
5. $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$, $F = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$ et $T : (E, \|.\|_2) \to (F, \|.\|_1)$, $f \mapsto fg$ où $g \in E$ est fixé.

Correction.

1. Puisque g est continue sur le segment $[0, 1]$, elle y est bornée (et atteint ses bornes). Posons

$M = \max_{t\in[0,1]} |g(t)|$. Alors on a

$$\|Tf\|_1 = \int_0^1 |f(t)g(t)|dt \leq M \int_0^1 |f(t)|dt \leq M\|f\|_1.$$

Ceci prouve que T est continue.

2. Supposons que T est continue. Alors il existe $C > 0$ tel que, pour tout $P \in E$, on a $\|TP\| \leq C\|P\|$. Soit $n \geq 0$. Pour $P = X^n$, on trouve

$$TP = nX^{n-1}, \text{ d'où } n = \|TP\| \leq C\|P\| = C.$$

Ceci est impossible car $\mathbb{N}$ n'est pas majoré. Donc T n'est pas continue.

3. On peut utiliser deux arguments différents. On peut d'une part remarquer que E est un espace vectoriel de dimension finie, que toute application linéaire entre espaces de dimension finie est continue. On peut aussi utiliser un calcul direct. En effet, soit $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in E$. Alors on a

$$\begin{aligned} \|TP\| &= \left\| \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1} \right\| \\ &= \sum_{k=1}^n k|a_k| \\ &\leq n \sum_{k=1}^n |a_k| \leq n\|P\|. \end{aligned}$$

Puisque n ne dépend pas de P (ceci ne dépend que de E), on obtient que T est continue.

4. On va prouver que T est continue par un calcul direct. Prenons en effet $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in E$ (la somme est en fait finie). Alors on a :

$$\begin{aligned} \|TP\| &= \left\| \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a_{k+1} X^k \right\| \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)k!|a_{k+1}| = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)!|a_{k+1}| \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} k!|a_k| \\ &\leq \|P\|. \end{aligned}$$

Ceci prouve la continuité de P.

5. On prouve que T est continue en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\|Tf\| = \int_0^1 |f(t)||g(t)|dt \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^2 \right)^{1/2} \left(\int_0^1 |g(t)|^2 dt \right)^{1/2} = C\|f\|_2,$$

avec

$$C = \left(\int_0^1 |g(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

C est bien un réel fini, car g est continue sur $[0,1]$, donc bornée, et on a $C \leq \|g\|_\infty$.

Exercice 12.

Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt,$$

dont on admettra qu'il s'agit d'une norme sur E. Soit ϕ l'endomorphisme de E défini par

$$\phi(f)(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

1. Justifier la terminologie : "ϕ est un endomorphisme de E."
2. Démontrer que ϕ est continue.
3. Pour $n \geq 0$, on considère f_n l'élément de E défini par $f_n(x) = ne^{-nx}$, $x \in [0,1]$. Calculer $\|f_n\|_1$ et $\|\phi(f_n)\|_1$.
4. On pose $|||\phi||| = \sup_{f \neq 0_E} \frac{\|\phi(f)\|_1}{\|f\|_1}$. Déterminer $|||\phi|||$.

Correction.

1. ϕ est clairement une application linéaire, et il faut juste rappeler que $\phi(f)$, comme primitive d'une fonction continue, est elle-même continue (donc C^1).
2. On a
$$|\phi(f)(x)| \leq \int_0^x |f(t)|dt \leq \int_0^1 |f(t)|dt \leq \|f\|_1.$$
On en déduit que
$$\|\phi(f)\|_1 \leq \int_0^1 \|f\|_1 dt \leq \|f\|_1.$$
Ainsi, ϕ est continue.
3. On a $\phi(f_n)(x) = \int_0^x ne^{-nt}dt = 1 - e^{-nx}$. En particulier, $\|f_n\|_1 = \phi(f_n)(1) = 1 - e^{-n}$. De plus,
$$\|\phi(f_n)\|_1 = \int_0^1 (1 - e^{-nx})dx = 1 - \frac{1 - e^{-n}}{n}.$$
4. D'après la question 2, pour tout $f \in E$,
$$\|\phi(f)\|_1 \leq \|f\|_1,$$
et donc $|||\phi||| \leq 1$. De plus, on a
$$\|\phi(f_n)\|_1 \leq |||\phi|||\|f_n\|_1 \implies 1 - e^{-n} \leq \left(1 - \frac{1 - e^{-n}}{n}\right)|||\phi|||.$$
Passant à la limite dans cette inégalité, on conclut que $|||\phi||| \geq 1$, ce qui prouve finalement que $|||\phi||| = 1$.

Exercice 13.

Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. On pose

$$A = \left\{ f \in E;\ f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t)dt \geq 1 \right\}.$$

Démontrer que A est une partie fermée de E.

Correction.

Posons, pour $f \in E$, $\phi(f) = f(0)$ et $\psi(f) = \int_0^1 f(t)dt$. Alors ϕ et ψ sont deux formes linéaires. De plus, elles sont continues car, pour tout $f \in E$,

$$|\phi(f)| \leq \|f\|_\infty$$

$$|\psi(f)| \leq \int_0^1 |f(t)|dt \leq \int_0^1 \|f\|_\infty dt \leq \|f\|_\infty.$$

De plus, on a $A = \phi^{-1}(\{0\}) \cap \psi^{-1}([1,+\infty[)$. Comme images réciproques de fermés par une application continue, $\phi^{-1}(\{0\})$ et $\psi^{-1}([1,+\infty[)$ sont fermés. Leur intersection est donc un fermé et A est bien fermé.

Exercice 14.

Soit E un espace préhilbertien muni de la norme associée au produit scalaire. Démontrer que l'orthogonal de toute partie A de E est un fermé de E.

Correction.

On a $A^\perp = \{x \in E;\ \forall a \in A,\ \langle x, a\rangle = 0\}$. Posons $f_a(x) = \langle x, a\rangle$. Alors f_a est une application linéaire continue : en effet, pour tout $x \in E$, on a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle x, a\rangle| \leq \|a\| \times \|x\|.$$

Mais alors, $A^\perp = \bigcap_{a\in A} f_a^{-1}(\{0\})$. Ainsi, $A^\perp$ est un fermé comme intersection (quelconque) de parties fermées de E.

Exercice 15.

Soit N_1 et N_2 deux normes sur l'espace vectoriel E. Montrer que N_1 et N_2 sont équivalentes si et seulement si $Id : (E, N_1) \to (E, N_2)$ et $Id : (E, N_2) \to (E, N_1)$ sont continues.

Correction.

Les deux normes sont équivalentes si et seulement s'il existe $a, b > 0$ tels que, pour tout $x \in E$, on a $N_1(x) \leq aN_2(x)$ et $N_2(x) \leq bN_1(x)$. Si on réécrit ces deux inégalités sous la forme

$$N_1(Id(x)) \leq aN_2(x) \text{ et } N_2(Id(x)) \leq bN_1(x)$$

alors on en déduit que c'est équivalent à la continuité des deux applications mentionnées dans l'énoncé.

c. Norme subordonnée

Exercice 16.

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la norme N définie pour tout $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ par $N(A) = \sup_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right\}$ (on admet qu'il s'agit d'une norme). Démontrer que l'application trace $\mathrm{Tr} : E \to \mathbb{R}$ est continue, et calculer sa norme subordonnée.

Correction.

On remarque que l'application trace est linéaire. De plus, soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$. Alors

$$\begin{aligned} |\mathrm{Tr}(A)| &\leq \sum_{i=1}^n |a_{i,i}| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \\ &\leq \sum_{i=1}^n N(A) \leq nN(A). \end{aligned}$$

Ceci prouve que l'application trace est continue et que $\|\mathrm{Tr}\| \leq n$. De plus, on a

$$\mathrm{Tr}(I_n) = n \text{ et } N(I_n) = 1.$$

Ainsi, on a exactement $\|\mathrm{Tr}\| = n$.

Exercice 17.

Soit $E = \mathcal{C}([0,1])$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ et $F = \mathcal{C}^1([0,1])$ muni de $\|f\|_F = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Soit $T : E \to F$ défini par $Tf(x) = \int_0^x f(t)dt$. Démontrer que T est continue et calculer sa norme subordonnée.

Correction.

On remarque d'abord que Tf, étant une primitive d'une fonction continue, est bien de classe $\mathcal{C}^1$ donc élément de F. De plus, pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$|Tf(x)| \leq \int_0^x |f(t)|dt \leq x\|f\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

De plus, $(Tf)' = f$ et donc $\|(Tf)'\|_\infty = \|f\|_\infty$. On en déduit que $\|Tf\|_F \leq 2\|f\|_\infty$, ce qui prouve que T est continue et que $\|T\| \leq 2$. Nous allons maintenant démontrer que $\|T\| = 2$. Puisque $\|(Tf)'\|_\infty = \|f\|_\infty$, il n'y a (jamais) aucune perte dans cette majoration, et on est amené à chercher une fonction $f \in E$ telle que $\int_0^1 f(t)dt = \|f\|_\infty$. Prenons $f = 1$. Alors $\|f\|_\infty = 1$,

$Tf(x) = x$ et donc $\|Tf\|_\infty = 1$. Il vient $\|Tf\|_F = 2\|f\|_\infty$, et donc on a effectivement $\|T\| = 2$.

Exercice 18.

On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme suivante :

$$\|\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\| = \sup\{|a_k|;\ 0 \leq k \leq n\}.$$

Pour $c \in \mathbb{R}$, on définit la forme linéaire $\phi_c : (\mathbb{R}[X], \|\cdot\|) \to (\mathbb{R}, |\cdot|), P \mapsto P(c)$. Pour quelles valeurs de c la forme linéaire ϕ_c est-elle continue ? Dans ce cas, déterminer la norme subordonnée de ϕ_c.

Correction.

Supposons d'abord que $|c| < 1$. Alors, pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$,

$$|\phi_c(P)| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k c^k\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k||c|^k \leq \|P\|_\infty \frac{1-|c|^{n+1}}{1-|c|}.$$

Puisque $|c| < 1$, on en déduit que

$$|\phi_c(P)| \leq \|P\| \frac{1}{1-|c|}$$

donc ϕ_c est continue et $\|\phi_c\| \leq \frac{1}{1-|c|}$. On va prouver que cette dernière inégalité est en fait une égalité. D'abord, si $c \geq 0$, on considère le polynôme $P_n(X) = 1 + X + \cdots + X^n$. Alors

$$\phi_c(P_n) = 1 + c + \cdots + c^n = \frac{1-c^{n+1}}{1-c}.$$

Mais $\|P_n\| = 1$, et donc on obtient

$$\frac{1-c^{n+1}}{1-c} = \|\phi_c(P_n)\| \leq \|\phi_c\|\|P_n\| = \|\phi_c\|.$$

Faisant tendre n vers $+\infty$, on conclut que $\|\phi_c\| \geq \frac{1}{1-c}$, ce qui donne l'autre inégalité. Si maintenant $c < 0$, on effectue le même travail avec le polynôme $Q(X) = 1 - X + X^2 + \cdots + (-1)^n X^n$. Pour $c \geq 1$, on a $\phi_c(P_n) = 1 + c + \cdots + c^n \geq n+1$ alors que $\|P_n\| = 1$. L'application ϕ_c ne peut pas être continue. On a le même résultat si $c \leq -1$, en considérant cette fois Q_n.

2. Exercices d'entraînement

a. Ouverts / Fermés / Adhérence / Intérieur / Densité

Exercice 19.

Soit E un espace vectoriel normé. Démontrer que les seules parties à la fois ouvertes et fermées de E sont $\varnothing$ et E.

Correction.

On commence par remarquer que $\varnothing$ et E sont des parties à la fois ouvertes et fermées de E. Réciproquement, soit A une partie de E à la fois ouverte et fermée. Supposons $A \neq \varnothing$ et $A \neq E$. On peut alors trouver $a \in A$ et $b \in E \backslash A$. Considérons ensuite

$$I = \{t \in [0,1] : \ (1-t)a + tb \in A\}.$$

Alors I est une partie non vide de $\mathbb{R}$ car $0 \in I$ et I est majorée par 1. Elle admet une borne supérieure s. Soit (t_n) une suite de I qui converge vers t_0. Alors $(1-t_n)a + t_n b \in A$. Comme A est fermé, par passage à la limite, $(1-s)a + sb \in A$. Si $s = 1$, alors il y a une contradiction avec $b \in E \backslash A$. Si $s < 1$, alors notons $x_0 = (1-s)a + sb$. Puisque A est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset A$. Mais alors, il existe $t \in]s, 1[$ tel que $ta + (1-t)b \in B(x_0, r) \subset A$. Ceci contredit que s est la borne supérieure de I.

Exercice 20.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de $\|\cdot\|_\infty$. On note D l'ensemble des fonctions de E qui sont dérivables et P l'ensemble des fonctions de E qui sont polynomiales. Déterminer l'intérieur de D et de P.

Correction.

On va prouver que l'intérieur de D est vide. Pour cela, prenons $f \in D$ et construisons une suite de fonctions f_n dans D^c qui converge vers f pour $\|\cdot\|$. Pour cela, considérons $g(x) = |x - \frac{1}{2}|$, de sorte que $\|g\|_\infty = \frac{1}{2}$. Mais alors, posons

$$f_n(x) = f(x) + \frac{1}{n} g(x).$$

Alors $\|f_n - f\|_\infty = \frac{1}{n}\|g\|_\infty \leq \frac{1}{2n} \to 0$. Et de plus, f_n n'est pas dérivable en $1/2$ car g ne l'est pas alors que f l'est. Donc $f_n \in D^c$, ce qui achève la preuve que l'intérieur de D est vide. Puisque $P \subset D$, l'intérieur de P est vide lui aussi.

Exercice 21.

Soit C une partie convexe d'un espace vectoriel normé. Démontrer que l'adhérence de C est convexe, puis que l'intérieur de C est convexe.

Correction.

Soit $x, y \in \bar{C}$, et $t \in [0,1]$. x (resp. y) est limite d'une suite (x_n) (resp. (y_n)) d'éléments de C.

Puisque C est convexe, la suite

$$z_n = tx_n + (1-t)y_n$$

est dans C. On passe à la limite : la suite (z_n) converge vers $tx+(1-t)y$, et cette limite est dans $\bar{C}$. D'où $tx+(1-t)y \in \bar{C}$, ensemble qui est donc convexe. Prouvons maintenant le résultat concernant l'intérieur. Soit $x, y \in \overset{\circ}{C}$, $x \neq y$, et soit $z \in]x, y[$. Alors il existe une (unique) homothétie de centre x qui envoie y sur z (une homothétie de centre x est une application de la forme $w \mapsto x+\lambda(w-x)$. Cette homothétie transforme la boule de centre y et de rayon δ en la boule de centre z et de rayon $\lambda\delta$. Soit $\delta > 0$ tel que $B(y, \delta) \subset C$ et soit $w \in B(z, \lambda\delta)$. Alors $w = h(u)$, avec u un point de $B(y, \delta)$, et h l'homothétie précédemment considérée. En particulier,w est sur le segment $[x, u]$ et est donc un élément de C. Autrement dit, on vient de prouver que $B(z, \lambda\delta) \subset C$, ce qui prouve $z \in \overset{\circ}{C}$. $\overset{\circ}{C}$ est convexe.

Exercice 22.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et (u_n) une suite de E. On note V l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n).

1. Démontrer que $V = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{u_p : \ p \geq n\}}$.
2. En déduire que V est fermé.

Correction.

1. Soit $\ell \in V$. Il existe une suite extraite $(u_{\phi(n)})$ qui converge vers ℓ. Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$. Alors, pour $k \geq n$, on a $\phi(k) \geq k \geq n$, et donc

$$u_{\phi(k)} \in \{u_p : \ p \geq n\}.$$

   Puisque $(u_{\phi(k)})$ converge vers ℓ, on en déduit que $\ell \in \overline{\{u_p : \ p \geq n\}}$. Puisque c'est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc $\ell \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{u_p : \ p \geq n\}}$.
   Réciproquement, supposons que $\ell \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{u_p : \ p \geq n\}}$. On va construire par récurrence une suite $(\phi(k))$ d'entiers telle que, pour tout $k \geq 1$, $\|\ell - u_{\phi(k)}\| \leq 2^{-k}$ et $\phi(k) > \phi(k-1)$. On initialise la construction en disant que $\ell \in \overline{\{u_p : \ p \geq 0\}}$ et donc qu'il existe $\phi(0) \in \mathbb{N}$ tel que $\|\ell - u_{\phi(0)}\| \leq 1$. Supposons maintenant la construction réalisée jusqu'au rang $k-1$ et réalisons-la au rang k, avec $k \geq 1$. On utilise cette fois que $\ell \in \overline{\{u_p : \ p \geq \phi(k-1)+\}}$ pour obtenir un entier $\phi(k) \geq \phi(k-1)+1 > \phi(k-1)$ tel que $\|\ell - u_{\phi(k)}\| \leq 2^{-k}$. Finalement, on a que $(u_{\phi(k)})$ converge vers ℓ, et donc que $\ell \in V$.
2. Maintenant, c'est facile : V est fermé comme intersection de fermés !

Exercice 23.

Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$.

1. Justifier l'existence de $m = \inf\{x \in H; \ x > 0\}$.
2. On suppose que $m > 0$. Démontrer que $m \in H$ puis que $H = m\mathbb{Z}$.
3. On suppose que $m = 0$. Démontrer que H est dense dans $\mathbb{R}$.

4. En déduire que, si a et b sont deux réels non nuls, $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$.

Correction.

1. Il suffit de prouver que $\{x \in H;\ x > 0\}$ est non-vide, puisque c'est une partie de $\mathbb{R}$ minorée. Soit $x \in H$, $x \neq 0$. Si $x > 0$, c'est bon. Sinon, on considère $-x$.
2. Supposons que $m \notin H$. Alors, par définition de la borne inférieure, il existe $x \in H$ tel que $m < x < 2m$. Toujours pas définition de la borne inférieure, il existe $y \in H$ tel que $m < y < x$. Mais alors, $x - y \in H$ puisque H est un groupe et $0 < x - y < m$, ce qui contredit la définition de la borne inférieure. On en déduit que $m \in H$ puis, parce que H est un groupe, que $m\mathbb{Z} \subset H$. Réciproquement, prenons $x \in H$. Si $x \notin m\mathbb{Z}$, soit k l'unique entier relatif tel que $mk < x < (k+1)m$. Alors $0 < x - mk < m$ et $x - mk \in H$, ce qui contredit à nouveau la définition de la borne inférieure. Donc $H = m\mathbb{Z}$.
3. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Il s'agit de prouver que $H \cap]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\neq \varnothing$. Comme H est symétrique par rapport à l'origine, on peut toujours supposer que $a \geq 0$. On sait qu'il existe $x \in H$ tel que $0 < x < \varepsilon$. Soit $n = \lfloor \frac{a}{x} \rfloor$. Alors on sait que $n \leq \frac{a}{x} < n+1$ soit $nx \leq a < (n+1)x < nx+\varepsilon$. On en tire que $a - \varepsilon < nx \leq a$ et puisque $nx \in H$, que $H \cap]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ est non vide. Ceci prouve bien que H est dense dans $\mathbb{R}$.
4. $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est ou bien dense dans $\mathbb{R}$ ou bien de la forme $m\mathbb{Z}$. S'il est de la forme $m\mathbb{Z}$ alors $a \in m\mathbb{Z}$ et $b \in m\mathbb{Z}$, donc il existe $p, q \in \mathbb{Z}$ tels que $a = mp$ et $b = mq$. Il vient $\frac{a}{b} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Réciproquement, si $\frac{a}{b} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, alors on sait que

$$\begin{aligned} x \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} &\iff \exists (k,l) \in \mathbb{Z}^2,\ x = ak + bl \\ &\iff \exists (k,l) \in \mathbb{Z}^2,\ x = b\left(\frac{a}{b}k + l\right) \\ &\iff \exists (k,l) \in \mathbb{Z}^2,\ x = b\left(\frac{p}{q}k + l\right) \\ &\iff \exists (k,l) \in \mathbb{Z}^2,\ x = \frac{b}{q}(pk + lq) \\ &\iff x \in \frac{b}{q}(p\mathbb{Z} + q\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Or, $p\mathbb{Z} + q\mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$ et tous les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont de la forme $n\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Donc

$$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \frac{bn}{q}\mathbb{Z}.$$

b. Continuité des applications linéaires

Exercice 24.

Soit $E = \mathbb{R}[X]$, muni de la norme $\|\sum_i a_i X^i\| = \sum_i |a_i|$.

1. Est-ce que l'application linéaire $\phi : (E, \|.\|) \to (E, \|.\|)$, $P(X) \mapsto P(X+1)$ est continue sur E ?

2. Est-ce que l'application linéaire $\psi : (E, \|.\|) \to (E, \|.\|)$, $P(X) \mapsto AP$, où A est un élément fixé de E, est continue sur E ?

Correction.

1. Supposons ϕ continue. Alors il existe $C \geq 1$ tel que
$$\|\phi(P)\| \leq C\|P\|$$
pour tout polynôme P. Prenons le polynôme $P(X) = X^n$. Alors $\|P\| = 1$. Mais $P(X+1) = (X+1)^n = X^n + nX^{n-1} + \dots$. Ainsi, on obtient
$$n \leq \|P(X+1)\| \leq C,$$
ce qui impossible si on choisit n assez grand. Ainsi, ϕ n'est pas continue.
2. Écrivons $A(X) = \sum_{j=0}^{p} b_j X^j$ et $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$. Alors $AP(X) = \sum_{k=0}^{n+p} c_k X^k$ avec
$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j.$$
Notons $M = \max_{j=0,\dots p} |b_j|$. On a donc
$$|c_k| \leq M \sum_{i=\max(0,k-p)}^{k} |a_i|,$$
ce qui entraîne
$$\|AP\|_1 \leq M \sum_{k=0}^{n+p} \sum_{i=\max(0,k-p)}^{k} |a_i|.$$
Fixons i_0 dans $\{0, \dots, n\}$. S'il apparait dans la somme $\sum_{i=\max(k-p,0)}^{k} |a_i|$, c'est que $k - p \leq i_0 \leq k$. En particulier, il apparait au plus $k - (k-p) + 1 = (p+1)$ fois. On en déduit que
$$\|AP\|_1 \leq M(p+1)\|P\|_1,$$
ce qui prouve que ψ est continue.

Exercice 25.

Soit E l'espace vectoriel des suites $(a_n)_{n\geq 1}$ de nombres complexes telle que $\sum_{n\geq 1} |a_n|$ converge. On pose, pour $a = (a_n) \in E$,
$$\|a\| = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|.$$

1. Démontrer que $\|\cdot\|$ définit une norme sur E.
2. On pose $F = \{a \in E;\ \sum_{n\geq 1} a_n = 1\}$. F est-il ouvert ? fermé ? borné ?

Correction.

1. On suit la méthode classique. Si $a = (a_n)$ et $b = (b_n)$ sont éléments de E et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on a pour tout N,

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n + b_n| \leq \sum_{n=1}^{N} (|a_n| + |b_n|) \leq \sum_{n=1}^{N} |a_n| + \sum_{n=1}^{N} |b_n| \leq \|a\| + \|b\|.$$

Faisant tendre N vers l'infini, on en déduit que

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|.$$

Une preuve similaire donne $\|\lambda a\| = |\lambda| \times \|a\|$ tandis que si $\|a\| = 0$, alors on a nécessairement $0 \leq |a_n| \leq \|a\| = 0$ pour tout $n \geq 1$ et donc $a = 0$.

2. Posons $\phi(a) = \sum_{n\geq 1} a_n$. Alors ϕ est bien défini sur E (car la convergence absolue entraine la convergence) et ϕ est linéaire. Démontrons que ϕ est continue. Pour cela, on remarque que

$$|\phi(a)| = \left| \sum_{n\geq 1} a_n \right| \leq \sum_{n\geq 1} |a_n| \leq \|a\|.$$

Ceci démontre que ϕ est continue, et comme $F = \phi^{-1}(\{1\})$, F est l'image réciproque d'un fermé par une application continue, donc F est fermé. Par ailleurs, F n'est ni ouvert, ni borné. Il n'est pas ouvert, car prenons $a = (1, 0, 0, \dots)$ qui est un élément de F. Alors, pour tout $\delta > 0$, $a + \delta a \notin F$, et donc F n'est pas un voisinage de son élément a. En particulier, F n'est pas ouvert. F n'est pas non plus borné. En effet, prenons la suite $a(p) = (p+1, -p, 0, 0, \dots)$. Alors, pour chaque p, $a(p)$ est élément de F. Or, $\|a(p)| = 2p+1 \to +\infty$ si $p \to +\infty$. Donc F n'est pas bornée.

Exercice 26.

Soit E un espace vectoriel normé et $\mathcal{L}_c(E)$ l'ensemble des applications linéaires continues sur E. Pour $u \in \mathcal{L}_c(E)$, on pose

$$\|u\| = \sup\{\|u(x)\|;\ \|x\| \leq 1\}.$$

1. Démontrer que ceci définit une norme sur $\mathcal{L}_c(E)$.
2. Démontrer que, pour tout $x \in E$ et tout $u \in \mathcal{L}_c(E)$, on a

$$\|u(x)\| \leq \|u\| \times \|x\|.$$

En déduire que, pour tous $u, v \in \mathcal{L}_c(E)$, alors $\|u \circ v\| \leq \|u\| \times \|v\|$.

Correction.

1. Soit $u \in \mathcal{L}_c(E)$. D'abord, si $u = 0$, on a bien $\|u\| = 0$. Réciproquement, si $\|u\| = 0$, alors $\|u(x)\| = 0$ pour tout $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$. Considérons alors $y \in E$. Si $y = 0$, on a bien $u(y) = 0$. Si $y \neq 0$, considérons $x = y/\|y\|$. Alors $\|x\| = 1$, donc $u(x) = 0$, donc par homogénéité de u, $u(x) = 0$ et u est bien nulle. Considérons maintenant $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\{\|\lambda u(x)\|;\ \|x\| = 1\} = |\lambda| \times \{\|u(x)\|;\ \|x\| = 1\}.$$

On en déduit que $\|\lambda u\| = |\lambda| \times \|u\|$. Finalement, soient $u, v \in \mathcal{L}_c(E)$. Alors, pour tout $x \in E$

avec $\|x\| = 1$, on a

$$\|u(x) + v(x)\| \leq \|u(x)\| + \|v(x)\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Passant au sup sur x, on obtient bien que $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$. Ainsi, la formule

$$\|u\| = \sup\{\|u(x)\|;\ \|x\| \leq 1\}$$

définit bien une norme sur $\mathcal{L}_c(E)$.

2. Soit $x \in E$. Si $x = 0$, la formule est claire sinon posons $y = x/\|x\|$. Alors on a $\|u(y)\| \leq \|u\|$ ce qui implique facilement par homogénéité que $\|u(x)\| \leq \|u\| \times \|x\|$. Soit maintenant $u, v \in \mathcal{L}_c(E)$. Alors, pour tout $x \in E$ avec $\|x\| = 1$, on a

$$\|u(v(x))\| \leq \|u\| \times \|v(x)\| \leq \|u\| \times \|v\|.$$

Passant au sup en x, on en déduit bien que $\|u \circ v\| \leq \|u\| \times \|v\|$.

Exercice 27.

Soit E un espace vectoriel normé et $u \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que u est continue si et seulement si $\{x \in E;\ \|u(x)\| = 1\}$ est fermé.

Correction.

Notons $F = \{x \in E;\ \|u(x)\| = 1\}$. D'une part, si u est continue, alors $F = u^{-1}(\{1\})$ est un fermé. Réciproquement, supposons que u ne soit pas continue. Alors il existe une suite (x_n) de E, $x_n \neq 0$, telle que $\|u(x_n)\|/\|x_n\| \to +\infty$. Posons $y_n = \frac{x_n}{\|u(x_n)\|}$. Alors $\|y_n\| \to 0$ et $\|u(y_n)\| = 1$. Ainsi, chaque y_n est élément de F. Si F était fermé, alors 0 serait élément de E, ce qui n'est pas le cas. Donc F n'est pas fermé, ce qui démontre que u est continue si et seulement si F est fermé.

Exercice 28.

Soit E un espace vectoriel normé et u un endomorphisme de E vérifiant, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leq \|x\|$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u^k.$$

1. Simplifier $v_n \circ (u - Id)$.
2. Montrer que $\ker(u - Id) \cap \mathrm{Im}(u - Id) = \{0\}$.
3. On suppose désormais que E est de dimension finie. Démontrer que

$$\ker(u - Id) \oplus \mathrm{Im}(u - Id) = E.$$

4. Soit p la projection sur $\ker(u - Id)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(u - Id)$. Démontrer que, pour tout $x \in E$, $v_n(x) \to p(x)$.

Correction.

1. On a, par télescopage,
$$\sum_{k=0}^{n} u^k(u - Id) = u^{n+1} - Id$$
et donc $v_n = \frac{1}{n+1}(u^{n+1} - Id)$.
2. Soit $y \in \ker(u - Id) \cap \mathrm{Im}(u - Id)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = (u - Id)(x)$. On en déduit que $v_n(y) = \frac{1}{n+1}(u^{n+1}(x) - x)$. Puisque $\|u^{n+1}(x)\| \leq \|x\|$, on obtient que $(v_n(y))$ tend vers 0. Mais d'autre part, on sait aussi que $u(y) = y$, et donc, pour tout entier n, on a $v_n(y) = y$. Par unicité de la limite, $y = 0$.
3. C'est une conséquence immédiate du théorème du rang et du résultat de la question précédente.
4. Soit $x \in E$, écrivons $x = y + z$ avec $y \in \ker(u - Id)$ et $z \in \mathrm{Im}(u - Id)$. Alors le calcul effectué à la deuxième question montre que $v_n(y) = y$ et que $v_n(z)$ tend vers 0. Ainsi, $(v_n(x))$ tend vers y qui est bien égal à $p(x)$.

Exercice 29.

Soit E un espace vectoriel normé (sur $\mathbb{R}$) et soit $\phi : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire non identiquement nulle. Le but de l'exercice est de démontrer que ϕ est continue si et seulement si le noyau de ϕ est fermé.

1. Démontrer le sens direct.
2. Réciproquement, on suppose que le noyau de ϕ, noté H, est fermé. On fixe $y \in E$ tel que $\phi(y) = 1$.
   (a) Démontrer que $\phi^{-1}(\{1\})$ est fermé.
   (b) En déduire qu'il existe $r > 0$ tel que $B(0, r) \cap \phi^{-1}(\{1\}) = \varnothing$.
   (c) Démontrer que $x \in B(0, r) \implies |\phi(x)| \leq 1$.
   (d) Conclure.

Correction.

1. Si ϕ est continue, alors $\ker\phi = \phi^{-1}(\{0\})$ est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue.
2. (a) Fixons $y \in E$ tel que $\phi(y) = 1$ et notons $H = \ker\phi$. Soit $z \in E$. On a
$$\phi(z) = 1 \iff \phi(z) = \phi(y) \iff \phi(z - y) = 0 \iff z - y \in H \iff z \in y + H.$$
Ainsi, $\phi^{-1}(\{1\}) = y + H$ est fermé puisque c'est lui translaté de H qui est fermé.
   (b) On sait que $0 \notin \phi^{-1}(\{1\})$ qui est fermé. Il existe donc $r > 0$ tel que $B(0, r) \cap \phi^{-1}(\{1\}) = \varnothing$.
   (c) Supposons qu'il existe $x \in B(0, r)$ tel que $|\phi(x)| > 1$. Alors $\phi(\lambda x) = \lambda\phi(x) = 1$ pour $\lambda = 1/\phi(x) \in]-1, 1[$. Mais alors $z = \lambda x \in B(0, r)$ et $\phi(z) = 1$, une contradiction.
   (d) Il suffit de raisonner par homogénéité. Si $\|x\| < 1$ alors $\|rx\| < r$ et donc $|\phi(rx)| \leq 1$. On en déduit que $|\phi(x)| \leq 1/r$ et donc que ϕ est continue avec $\|\phi\| \leq 1/r$.

3. Exercices d'approfondissement

a. Continuité des applications linéaires

Exercice 30.

Soit $E = \mathcal{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$. On considère l'opérateur de dérivation $D : E \to E$, $f \mapsto f'$. Montrer que, quelle que soit la norme N dont on munit E, D n'est jamais une application linéaire continue de (E,N) dans (E,N).

Correction.

Pour $a \in \mathbb{R}$, la fonction $f_a(x) = e^{ax}$ est dans E, et elle vérifie $Df_a = af_a$. Or, si D était continue pour la norme N, il existerait une constante $C > 0$ telle que

$$N(D(f_a)) \leq CN(f_a)$$

pour tout $a \in \mathbb{R}$. On obtiendrait alors que, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$|a|N(f_a) \leq CN(f_a) \implies |a| \leq C.$$

C'est bien sûr impossible, et D n'est pas continue sur (E,N).

b. Norme subordonnée

Exercice 31.

Soit $I = [a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On munit $\mathcal{C}(I)$ de la norme $\|.\|_\infty$. On dit qu'une forme linéaire $u : \mathcal{C}(I) \to \mathbb{R}$ est positive si $u(f) \geq 0$ pour tout $f \in C(I)$ vérifiant $f(x) \geq 0$ si $x \in I$.

1. Démontrer que, pour toute forme linéaire $u : \mathcal{C}(I) \to \mathbb{R}$ positive, $|u(f)| \leq u(|f|)$.
2. Soit e la fonction définie par $e(x) = 1$ pour tout $x \in I$. Déduire de la question précédente que toute forme linéaire positive est continue, et calculer $|||u|||$ en fonction de $u(e)$.

Correction.

1. Remarquons que $|f| \geq f$, et donc $|f| - f \geq 0$. On en déduit que $u(|f|) \geq u(f)$. De même, on a $|f| \geq -f$, soit $|f| + f \geq 0$ et donc $u(|f|) \geq u(-f) = -u(f)$. Finalement, on obtient bien que $|u(f)| \leq u(|f|)$.
2. On sait que $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$, ce qui s'écrit encore $\|f\|_\infty e - |f| \geq 0$. Ainsi, on a

$$|u(f)| \leq u(|f|) \leq u(\|f\|_\infty e) \leq u(e)\|f\|_\infty.$$

Ceci prouve que u est continue, avec $\|u\| \leq u(e)$. De plus, pour $f = e$, on a exactement $u(f) = u(e)\|e\|_\infty$, ce qui prouve qu'en réalité $\|u\| = u(e)$.