

Feuille d'exercices n°10

1. Exercices basiques**a. Compacité****Exercice 1.**

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. L'image réciproque d'un compact par une application continue est un compact.

Exercice 2.

Déterminer si les ensembles suivants sont, ou ne sont pas, compacts :

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^4 = 1\} & B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^5 = 2\} \\ C &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + xy + y^2 \leq 1\} & D &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + 8xy + y^2 \leq 1\} \\ E &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y^2 = x(1 - 2x)\}. \end{aligned}$$

Exercice 3.

Soit $E = \mathcal{C}([0, 2\pi])$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = e^{inx}$.

1. Calculer $\|f_n - f_p\|_2$ pour $p, n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire que $\bar{B}(0, 1)$ n'est pas compact.

Exercice 4.

Soit K une partie compacte d'un espace vectoriel normé E contenu dans la boule unité ouverte. Démontrer qu'il existe $r < 1$ tel que K soit contenu dans $\bar{B}(0, r)$.

Exercice 5.

Soient K, L deux compacts disjoints d'un espace vectoriel normé E . Démontrer que $d(K, L) = \inf_{x \in K, y \in L} \|y - x\| > 0$.

Exercice 6.

Soit F un fermé, et C un compact de \mathbb{R}^n . On note $G = F + C = \{x + y; x \in F \text{ et } y \in C\}$. Montrer que G est fermé.

Exercice 7.

Soit $\mathcal{C} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 + \dots + x_n = 1, x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$. Soit également $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue telle que $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathcal{C}$. Démontrer que $\inf_{x \in \mathcal{C}} f(x) > 0$.

Exercice 8.

Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum.

Exercice 9.

Soit A une partie compacte d'un espace vectoriel normé, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f est localement bornée : pour tout $x \in A$, il existe $r > 0$ et $M > 0$ tels que, pour tout $y \in B(x, r) \cap A$, $|f(y)| \leq M$. Démontrer que f est bornée sur A tout entier.

b. Connexité par arcs**Exercice 10.**

Soit E un espace vectoriel normé et A, B deux parties connexes par arcs de E .

1. Démontrer que $A \times B$ est connexe par arcs.
2. En déduire que $A + B$ est connexe par arcs.
3. L'intérieur de A est-il toujours connexe par arcs ?

Exercice 11.

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties connexes par arcs de l'espace vectoriel normé E telles que $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$. Démontrer que $\bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe par arcs.

Exercice 12.

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On souhaite démontrer à l'aide de la connexité par arcs le résultat classique suivant : si f est continue et injective, alors f est strictement monotone. Pour cela, on pose $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > y\}$ et $F(x, y) = f(x) - f(y)$, pour $(x, y) \in C$.

1. Démontrer que $F(C)$ est un intervalle.
2. Conclure.

Exercice 13.

On dit que deux parties A et B de deux espaces vectoriels normés E et F sont homéomorphes s'il existe une bijection $f : A \rightarrow B$ telle que f et f^{-1} soient continues.

1. Démontrer que $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est connexe par arcs.

2. Démontrer que \mathbb{R} et \mathbb{R}^2 ne sont pas homéomorphes.
3. Démontrer que $[0, 1]$ et le cercle trigonométrique ne sont pas homéomorphes.

c. Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 14.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et E l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n . Démontrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout $P \in E$, on a

$$\int_0^1 |P(t)| dt \geq \lambda \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|.$$

Exercice 15.

Démontrer que l'ensemble des matrices symétriques est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 16.

Soit N une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$N(AB) \leq CN(A)N(B).$$

2. Exercices d'entraînement

a. Compacité

Exercice 17.

Soient K, L deux parties compactes d'un espace vectoriel normé E . On pose $K + L = \{x + y; x \in K, y \in L\}$. Démontrer que $K + L$ est une partie compacte de E .

Exercice 18.

Soit E un espace vectoriel normé de dimension n . Si F est un sous-ensemble quelconque de E , on appelle enveloppe convexe de F , et on note $\text{Conv}(F)$, le plus petit sous-ensemble convexe (au sens de l'inclusion) contenant F . On note \mathcal{H} l'ensemble des $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in (\mathbb{R}_+)^{n+1}$ et on admet que $\text{Conv}(F)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de la forme $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$, où $x_1, \dots, x_{n+1} \in F$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathcal{H}$. Le but de l'exercice est de démontrer que si K est une partie compacte de E , alors $\text{Conv}(K)$ est aussi une partie compacte de E .

1. Démontrer que \mathcal{H} est une partie compacte de \mathbb{R}^{n+1} .
2. Définir une application continue $\phi : \mathbb{R}^{n+1} \times E^{n+1} \rightarrow E$ telle que $\text{Conv}(K) = \phi(\mathcal{H} \times K^{n+1})$.

3. Conclure.

Exercice 19.

Soit $E = \mathbb{R}^d$ muni d'une norme $\|\cdot\|$, et A une partie non vide de E . On définit la distance d'un élément x_0 de E à une partie A de E , notée $d(x_0, A)$, par la formule

$$d(x_0, A) = \inf_{x \in A} \|x - x_0\|.$$

1. Supposons A compact. Montrer que pour tout $x_0 \in E$ il existe $y \in A$ tel que $d(x_0, A) = \|y - x_0\|$.
2. Montrer que le résultat est encore vrai si on suppose seulement que A est fermé. (On remarquera que pour toute partie B de A on a $d(x_0, B) \geq d(x_0, A)$.)
3. Montrer que l'application qui à x_0 associe $d(x_0, A)$ est continue sur E (sans aucune hypothèse sur A).
4. En déduire que si A est un fermé de E et B un compact de E tels que A et B sont disjoints, alors il existe une constante $\delta > 0$ telle que

$$\|a - b\| \geq \delta \quad \forall (a, b) \in A \times B.$$

5. Montrer par un contre-exemple que le résultat est faux si on suppose seulement que A et B sont deux fermés disjoints.

Exercice 20.

Soit E un espace vectoriel normé et (K_n) une suite de parties compactes de E telle que, pour chaque entier n , on $K_{n+1} \subset K_n$. On pose $K = \bigcap_{n \geq 1} K_n$.

1. Démontrer que $K \neq \emptyset$.
2. Soit U un ouvert contenant K . Démontrer qu'il existe un entier n tel que $K_n \subset U$.

Exercice 21.

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . Démontrer qu'il existe toujours une suite exhaustive de compacts $(K_j)_{j \geq 1}$ qui vérifie

1. $\forall j \geq 1, K_j \subset \Omega$
2. $\forall j \geq 1, K_j \subset K_{j+1}$
3. $\Omega = \bigcup_{j \geq 1} K_j$.

Exercice 22.

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\forall M > 0, \exists R > 0$ tel que $\|x\| > R \implies |f(x)| > M$.

2. Pour toute partie bornée B de \mathbb{R} , $f^{-1}(B)$ est une partie bornée de \mathbb{R}^n .
3. Pour toute partie compacte K de \mathbb{R} , $f^{-1}(K)$ est une partie compacte de \mathbb{R}^n .

Exercice 23.

Une fonction f définie sur une partie $A \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans \mathbb{R}^n est dite *localement lipschitzienne* si, pour tout $x \in A$, il existe un voisinage V_x de x et une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall (y, z) \in A \cap V_x, \|f(y) - f(z)\| \leq C\|y - z\|.$$

Montrer qu'une fonction localement lipschitzienne sur une partie compacte K de \mathbb{R}^n est en fait lipschitzienne.

Exercice 24.

Soient A, B deux parties d'un espace vectoriel normé E , $f : A \rightarrow B$ une application et $G = \{(x, f(x)); x \in A\}$ son graphe.

1. On suppose que f est continue. Démontrer que son graphe est fermé.
2. On suppose de plus que B est compact et que le graphe de f est fermé. Démontrer que f est continue (on pourra utiliser le théorème suivant : une suite d'éléments d'une partie compacte converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.)

b. Connexité par arcs

Exercice 25.

Soit E un espace vectoriel normé de dimension supérieure ou égale à deux (éventuellement, de dimension infinie). Démontrer que sa sphère unité \mathcal{S}_E est connexe par arcs.

Exercice 26.

Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable. Notons $A = \{(x, y) \in I \times I; x < y\}$.

1. Démontrer que A est une partie connexe par arcs de \mathbb{R}^2 .
2. Pour $(x, y) \in A$, posons $g(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$. Démontrer que $g(A) \subset f'(I) \subset \overline{g(A)}$.
3. Démontrer que $f'(I)$ est un intervalle.

c. Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 27.

Montrer que l'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles est un ouvert dense dans $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 28.

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, K une partie compacte de E et $r > 0$. On pose $L = \bigcup_{x \in K} \bar{B}(x, r)$. Démontrer que L est compact.

Exercice 29.

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer que tout sous-espace vectoriel de E est fermé.

Exercice 30.

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé E .

1. Démontrer que pour tout $a \in E$, il existe $x \in F$ tel que $d(a, F) = \|x - a\|$.
2. On suppose $F \neq E$. Soit $a \in E \setminus F$ et soit $x \in F$ tel que $d(a, F) = \|a - x\|$. On pose $b = (a - x)/\|a - x\|$. Démontrer que $d(b, F) = 1$ et $\|b\| = 1$.
3. On suppose que E est de dimension infinie. Construire une suite (b_n) de E telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|b_n\| = 1 \text{ et } d(b_n, \text{vect}(b_0, \dots, b_{n-1})) = 1.$$

4. En déduire que la boule unité fermée de E n'est pas compacte.

Exercice 31.

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, A une partie bornée non-vide de E . On souhaite prouver qu'il existe une boule fermée de rayon minimal contenant A . Pour cela, on note $D = \{r > 0; A \text{ est contenu dans une boule de rayon } r\}$.

1. Démontrer que D admet une borne inférieure. Cette borne inférieure sera notée r_0 .
2. Pour $n \geq 1$, on pose $r_n = r_0 + \frac{1}{n}$. Démontrer qu'il existe $x_n \in E$ tel que $A \subset \bar{B}(x_n, r_n)$.
3. Démontrer que (x_n) est bornée.
4. Conclure.
5. On suppose dans cette question que $E = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$. Donner un exemple d'ensemble borné A pour lequel il existe plusieurs boules de rayon minimum contenant A .
6. On suppose dans cette question que $E = (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$. Démontrer qu'il existe une unique boule de rayon minimal contenant A . On rappelle l'identité du parallélogramme

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Exercice 32.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et A une partie bornée de E non vide.

1. Soit $a \in E$. Démontrer qu'il existe une boule $\bar{B}(a, R_a)$ de rayon minimal qui contient A .
2. On pose $R = \inf\{R_a; a \in E\}$. Démontrer qu'il existe $b \in E$ tel que $A \subset \bar{B}(b, R)$.

En particulier, $\bar{B}(b, R)$ est une boule de E de rayon minimal contenant A .

Exercice 33.

Montrer que l'ensemble des matrices orthogonales $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ (celles qui vérifient ${}^tMM = I_n$) est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Est-il connexe par arcs ?

3. Exercices d'approfondissement

a. Compacité

Exercice 34.

Soit E un espace vectoriel normé, B la boule unité fermée de E et S la sphère unité. Démontrer que B est compact si et seulement si S est compact.

Exercice 35.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et K une partie compacte de E . Pour tout $r > 0$, on pose $K_r = \bigcup_{x \in K} \bar{B}(x, r)$. Démontrer que K_r est une partie compacte de E .

Exercice 36.

Soit (u_n) une suite de \mathbb{R}^d . Pour $n \geq 1$, on pose $A_n = \{u_p; p \geq n\}$. Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est :

$$V = \bigcap_{n \geq 1} \overline{A_n}.$$

En déduire que si la suite est bornée, V (l'ensemble des valeurs d'adhérence) est compact.

Exercice 37.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit (x_n) une suite convergente de E et soit x sa limite. Montrer que l'ensemble :

$$A = \{x\} \cup \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$$

est compact.

Exercice 38.

Soit E une partie compacte d'un espace vectoriel normé, et $f : E \rightarrow E$ une fonction continue vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2, x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

1. Montrer que f admet un unique point fixe (que l'on notera α).
2. Ces résultats subsistent-ils si on suppose simplement E fermé ?

Exercice 39.

Soit A une partie compacte d'un espace vectoriel normé, et $f : A \rightarrow A$ vérifiant $\|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\|$ pour tous $x, y \in A$. Le but de l'exercice est de démontrer que f est une isométrie surjective.

1. Soit $a, b \in A$, et $(a_n), (b_n)$ les suites de A définies par $a_0 = a, b_0 = b, a_{n+1} = f(a_n)$ et $b_{n+1} = f(b_n)$. Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $p \geq 1$, il existe $k \geq p$ tel que $\|a - a_k\| < \varepsilon$ et $\|b - b_k\| < \varepsilon$. En déduire que f est à image dense.
2. On pose $u_n = \|a_n - b_n\|$. Montrer que (u_n) est une suite stationnaire.
3. En déduire que f est une isométrie.
4. Démontrer que f est surjective.

b. Connexité par arcs**Exercice 40.**

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E , et $f : A \rightarrow F$ une application continue, où F est un espace vectoriel normé. On dit que f est localement constante si, pour tout $a \in A$, il existe $r > 0$ tel que f est constante sur $B(a, r) \cap A$. Le but de l'exercice est de démontrer que si A est connexe par arcs et f est localement constante, alors f est constante. Pour cela, on fixe $a, b \in A$ et on considère $\phi : [0, 1] \rightarrow A$ un chemin continu tel que $\phi(0) = a$ et $\phi(1) = b$. On pose $t = \sup\{s \in [0, 1]; f(\phi(s)) = f(a)\}$.

1. Démontre que $t = 1$.
2. Conclure.

Exercice 41.

Soient A une partie connexe par arcs d'un espace vectoriel normé, et soit B une partie de A qui est à la fois ouverte et fermée relativement à A . On pose $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ si $x \in B$ et $f(x) = 0$ si $x \notin B$.

1. Démontrer que f est continue.
2. En déduire que $B = \emptyset$ ou $B = A$.

c. Espaces vectoriels de dimension finie**Exercice 42.**

Soit $n > 0$ et $0 \leq p \leq n$ deux entiers. Montrer que l'ensemble F_p des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang inférieur ou égal à p est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 43.

Soit $n \geq 1$ un entier.

1. Démontrer que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Démontrer qu'il existe un voisinage de A dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ne contenant aucune matrice diagonalisable.

Exercice 44.

Déterminer l'intérieur de l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 45.

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie n . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leq 1$.

1. Montrer que $\ker(u - Id_E) = \ker(u - Id_E)^2$.
2. En déduire que $\ker(u - Id_E) \oplus \text{Im}(u - Id_E) = E$.
3. Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \frac{1}{n}(Id_E + u + \dots + u^{n-1})$. Montrer que u_n converge dans $\mathcal{L}(E)$ vers une application v que l'on déterminera.

Exercice 46.

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel normé de dimension finie, et K un compact de E tel que $0 \in \overset{\circ}{K}$. On note H l'ensemble des $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u(K) \subset K$. Montrer que pour tout $u \in H$, on a $|\det u| \leq 1$.