Corrigé de la feuille d'exercices n°10

1. Exercices basiques

a. Compacité

Exercice 1.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. L'image réciproque d'un compact par une application continue est un compact.

Correction.

1. C'est faux. Prenons par exemple la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1$. Alors $f^{-1}(\{1\}) = \mathbb{R}$ qui n'est pas compact, alors que $\{1\}$ est compact.

Exercice 2.

Déterminer si les ensembles suivants sont, ou ne sont pas, compacts :

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^4 = 1\} \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^5 = 2\}$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + xy + y^2 \leq 1\} \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + 8xy + y^2 \leq 1\}$$
$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y^2 = x(1-2x)\}.$$

Correction.

A- Puisque $x^2 \geq 0$ et $y^4 \geq 0$, l'équation $x^2 + y^4 = 1$ entraine $x^2 \leq 1$ et $y^4 \leq 1$. On obtient donc $x \in [-1,1]$ et $y \in [-1,1]$, ie $\|(x,y)\|_\infty \leq 1$: A est borné. De plus, f est l'image réciproque de $\{1\}$, qui est fermé, par l'application continue $f(x,y) = x^2 + y^4$. A est donc également fermé. C'est bien une partie compacte de $\mathbb{R}^2$.

B- B n'est pas borné. En effet, pour tout $r > 0$, $(r, \sqrt[5]{2 - r^2})$ est élément de B (remarquons que l'on peut prendre la racine 5-ième de *tout* réel (il ne doit pas être nécessairement positif). Mais $\|(r, \sqrt[5]{2-r^2})\|_\infty \geq r$ peut être aussi grand que l'on veut. B n'est donc pas borné, et pas compact.

C- On sait que $(|x| - |y|)^2 \geq 0$, d'où on tire l'inégalité classique $|xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2}$, ce qui implique $-xy \leq \frac{x^2+y^2}{2}$. Il vient $\frac{x^2+y^2}{2} \leq x^2 + xy + y^2$. Ainsi, un élément de C vérifie $\|(x,y)\|_2 \leq 2$, ce qui prouve que C est borné. Comme C est de plus fermé (c'est l'image réciproque du fermé $]-\infty, 1]$ par l'application continue $(x,y) \mapsto x^2 + xy + y^2$), C est compact.

D- D n'est pas borné. En effet, pour tout réel a, le point $(a, -a)$ est dans D car $a^2 - 8a^2 + a^2 = -6a^2 \leq 0 \leq 1$. Or, la norme infini de $(-a, a)$ est a et peut donc être choisi aussi grande que l'on veut puisque a est arbitraire. Donc D n'est pas compact.

E- Remarquons que si (x,y) est élément de E, alors $x(1-2x) \geq 0$. Or, $x(1-2x) \geq 0$ si et seulement si $x \in [0,1/2]$. Et dans ce cas, $x(1-2x) \leq 1/2 \times 1 = 1/2$. Ainsi, si (x,y) est élément de E, on a $x \in [0,1/2]$ et $y \in [-\sqrt{1/2}, \sqrt{1/2}]$. L'ensemble E est donc borné. On vérifie aisément qu'il est fermé, comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue $(x,y) \mapsto y^2 - x(1-2x)$. E est donc compact.

Exercice 3.

Soit $E = \mathcal{C}([0,2\pi])$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = e^{inx}$.

1. Calculer $\|f_n - f_p\|_2$ pour $p, n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire que $\bar{B}(0,1)$ n'est pas compacte.

Correction.

1. On a, pour tous $n, p \in \mathbb{N}$,
$$\|f_n - f_p\|_2^2 = \int_0^{2\pi} \left|e^{inx} - e^{ipx}\right|^2 dx = \int_0^{2\pi} \big(2 - 2\cos\big((n-p)x\big)\big)\, dx.$$
On distingue alors deux cas. Si $n = p$, alors clairement $\|f_n - f_p\|_2 = 0$. Sinon, on a
$$\int_0^{2\pi} \cos\big((n-p)x\big) dx = 0$$
et donc $\|f_n - f_p\|_2 = 2\sqrt{\pi}$.
2. Posons $g_n = f_n / \|f_n\|_2$. Alors (g_n) est une suite de $\bar{B}(0,1)$. De plus, puisque $\|f_n\|_2 = \sqrt{2\pi}$ (cette valeur est indépendante de n), alors pour tout $n \neq p$, on a
$$\|g_n - g_p\|_2 = \sqrt{2}.$$
Il vient que la suite (g_n) ne peut pas admettre de sous-suite convergente. En effet, si $(g_{\phi(n)})$ était une sous-suite convergente, alors $\|g_{\phi(n+1)} - g_{\phi(n)}\|$ devrait tendre vers 0, ce qui n'est pas le cas. Ainsi, il existe dans $\bar{B}(0,1)$ une suite n'admettant pas de suite extraite convergente. La boule unité fermée n'est pas compacte.

Exercice 4.

Soit K une partie compacte d'un espace vectoriel normé E contenu dans la boule unité ouverte. Démontrer qu'il existe $r < 1$ tel que K soit contenu dans $\bar{B}(0,r)$.

Correction.

Soit $f : K \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$. Alors f est continue et comme K est compact, f est bornée et atteint sa borne supérieure. Soit $x_0 \in K$ tel que $f(x_0) = \sup\{f(x);\ x \in K\}$. Alors on a $f(x_0) = \|x_0\| < 1$ puisque K est contenu dans la boule unité ouverte. Posons $r = \|x_0\| < 1$. On a donc, pour tout $x \in K$, $\|x\| = f(x) \leq f(x_0) = e$. C'est bien que K est contenu dans $\bar{B}(0,r)$.

Exercice 5.

Soient K, L deux compacts disjoints d'un espace vectoriel normé E. Démontrer que $d(K,L) = \inf_{x\in K,\ y\in L} \|y-x\| > 0$.

Correction.

Donnons deux rédactions possibles. La première consiste à remarquer que $K \times L$ est compact, comme produit de deux compacts. De plus, l'application $(x,y) \in K \times L \mapsto \|y-x\|$ est continue. Elle atteint donc son minimum. Ainsi, il existe $(x_0, y_0) \in K \times L$ tel que $\|y_0 - x_0\| = \inf\{(x,y) \in K\|y-x\|\}$. La deuxième rédaction n'utilise pas la compacité de $K \times L$ (mais, en quelque sorte, la redémontre...). Par définition de la borne inférieure, il existe deux suites (x_n) de K et (y_n) de L telles que $\|x_n - y_n\| \to d(K,L)$. Mais alors la suite (x_n) est une suite du compact K. Elle admet donc une suite extraite $(x_{\phi(n)})$ convergente vers $x \in K$. La suite $(y_{\phi(n)})$ est une suite du compact L. Elle admet une suite extraite $(y_{\psi(n)})$ qui converge vers $y \in L$. $(x_{\psi(n)})$ est aussi une suite extraite de $(x_{\phi(n)})$ elle converge donc encore vers x. Finalement, par passage à la limite, on a $\|x-y\| = d(K,L)$. Comme K et L sont disjoints, on en déduit que $d(K,L) = \|x-y\| > 0$.

Exercice 6.

Soit F un fermé, et C un compact de $\mathbb{R}^n$. On note $G = F + C = \{x+y;\ x \in F \text{ et } y \in C\}$. Montrer que G est fermé.

Correction.

On va utiliser le critère séquentiel pour les fermés. Soit (z_n) une suite de G qui converge vers z appartenant à $\mathbb{R}^n$. Il suffit de prouver que $z \in G$. z_n se décompose en $z_n = x_n + y_n$, où $x_n \in F$ et $y_n \in C$. La suite (y_n) qui évolue dans le compact C admet une sous-suite convergente $(y_{\varphi(n)})$ qui converge vers $y \in C$. Maitenant, la suite $x_{\varphi(n)}$, qui s'écrit comme différence de deux suites convergentes, converge vers $x \in \mathbb{R}^n$, et puisque F est fermé, la limite est dans F. Par passage à la limite dans $z_{\varphi(n)} = x_{\varphi(n)} + y_{\varphi(n)}$, $z = x + y$ est dans $F + C = G$ qui est fermé. Remarquons que ce résultat est faux si on suppose simplement que F et C sont fermés. Par exemple, on peut prendre $F = \mathbb{Z}$ et $C = \sqrt{2}\mathbb{Z}$, dans $\mathbb{R}$. D'après le résultat classique de structure des sous-groupes de $\mathbb{R}$, $F + C$ est dense dans $\mathbb{R}$, sans être $\mathbb{R}$ tout entier : en aucun cas, il ne peut donc être fermé.

Exercice 7.

Soit $\mathcal{C} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ x_1 + \dots + x_n = 1,\ x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$. Soit également $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue telle que $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathcal{C}$. Démontrer que $\inf_{x\in\mathcal{C}} f(x) > 0$.

Correction.

Supposons pour commencer que l'ensemble $\mathcal{C}$ est compact. Alors on sait que f, qui est continue sur $\mathcal{C}$, y est bornée et atteint ses bornes. En particulier, il existe $a \in \mathcal{C}$ tel que $f(a) = \inf_{x\in\mathcal{C}} f(x)$. Puisque $f(a) > 0$, le résultat est démontré. Il suffit donc de prouver que $\mathcal{C}$ est compact. Puisque $\mathcal{C}$ est une partie de $\mathbb{R}^n$, il suffit de prouver qu'elle est bornée et fermée. Pour démontrer qu'elle est bornée, on peut choisir de munir $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|_1$ (toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes).

Mais, alors, si $x \in \mathcal{C}$, on a

$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n| = x_1 + \cdots + x_n = 1.$$

Ainsi, $\mathcal{C}$ est bornée. Pour démontrer que $\mathcal{C}$ est compact, on va poser

$$\mathcal{C}_0 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ x_1 + \cdots + x_n = 1\} \text{ et } \mathcal{C}_i = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ x_i \geq 0\},\ i = 1, \dots, n.$$

Il est clair que $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \cap \mathcal{C}_1 \cap \dots \mathcal{C}_n$. Pour démontrer que $\mathcal{C}$ est fermé, il suffit de démontrer que chaque $\mathcal{C}_i$ est fermé, puisque l'intersection de parties fermées est fermée. Or, posons $f_0(x) = x_1 + \cdots + x_n$ et $f_i(x) = x_i$, $i = 1, \dots, n$. Toutes les fonctions f_i sont continues. De plus,

$$\mathcal{C}_0 = f_0^{-1}(\{1\}) \text{ et } \mathcal{C}_i = f_i^{-1}([0, +\infty[).$$

Ainsi, chaque $\mathcal{C}_i$ est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue, ce qui achève la preuve de la compacité de $\mathcal{C}$.

Exercice 8.

Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum.

Correction.

Soit M un réel tel que $M > f(0)$. Par hypothèse, il existe $A > 0$ tel que $\|x\| \geq A \implies \|f(x)\| \geq M$. Ceci entraine en particulier que :

$$f(0) \leq \inf_{\|x\| \geq A} f(x).$$

Ainsi,

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \inf_{\|x\| \leq A} f(x).$$

Maintenant, la boule fermée de centre 0 et de rayon A est compacte dans $\mathbb{R}^d$, et il suffit d'appliquer le théorème qui dit qu'une fonction continue sur un compact admet un minimum.

Exercice 9.

Soit A une partie compacte d'un espace vectoriel normé, $f : A \to \mathbb{R}$. On suppose que f est localement bornée : pour tout $x \in A$, il existe $r > 0$ et $M > 0$ tels que, pour tout $y \in B(x, r) \cap A$, $|f(y)| \leq M$. Démontrer que f est bornée sur A tout entier.

Correction.

On suppose au contraire que f n'est pas bornée. Ainsi, pour tout $n \geq 1$, il existe $x_n \in A$ tel que $|f(x_n)| \geq n$. Puisque A est compact, il existe $x \in A$ et une suite extraite $(x_{\phi(n)})$ de (x_n) qui converge vers x. Soit $r > 0$ et $M > 0$ tels que, pour tout $y \in B(x, r) \cap A$, $|f(y)| \leq M$. Puisque $(x_{\phi(n)})$ converge vers x, il existe un entier N tel que, pour $n \geq N$, on a $x_{\phi(n)} \in B(x, r)$. Pour ces

entiers n, on a alors
$$\phi(n) \leq |f(x_{\phi(n)})| \leq M.$$
Faisant tendre n vers l'infini, on trouve une contradiction.

b. Connexité par arcs

Exercice 10.

Soit E un espace vectoriel normé et A, B deux parties connexes par arcs de E.

1. Démontrer que $A \times B$ est connexe par arcs.
2. En déduire que $A + B$ est connexe par arcs.
3. L'intérieur de A est-il toujours connexe par arcs ?

Correction.

1. Soit $(a, b) \in A \times B$ et $(a', b') \in A \times B$. Puisque A est connexe par arcs, il existe $f : [0, 1] \to A$ continue telle que $f(0) = a$ et $f(1) = a'$. Puisque B est connexe par arcs, il existe $g : [0, 1] \to B$ continue telle que $g(0) = b$ et $g(1) = b'$. Mais alors, posons, pour $t \in [0, 1]$, $h(t) = (f(t), g(t))$. Alors h est continue, à valeurs dans $A \times B$ et $h(0) = (a, b)$, $h(1) = (a', b')$. Ainsi, $A \times B$ est bien connexe par arcs.
2. Soit $\phi : A \times B \to E$, $(a, b) \mapsto a + b$. Alors ϕ est continue, et $\phi(A \times B) = A + B$. Puisque $A \times B$ est connexe par arcs, il en est de même de $A + B$.
3. Trouvons un contre-exemple dans $\mathbb{R}^2$. Il suffit de prendre pour A la réunion de deux boules disjointes que l'on relie par un segment. Cet ensemble est connexe par arcs. En revanche, l'intérieur, qui est égal à la réunion des deux boules ouvertes, n'est plus connexe par arcs car on ne peut plus passer de l'une à l'autre.

Exercice 11.

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties connexes par arcs de l'espace vectoriel normé E telles que $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \varnothing$. Démontrer que $\bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe par arcs.

Correction.

Soient $a, b \in \bigcup_{i \in I} A_i$. On va construire explicitement un chemin allant de a à b. Soit $c \in \bigcap_{i \in I} A_i$ et soit i_1, i_2 tel que $a \in A_{i_1}$ et $b \in A_{i_2}$. Alors, puisque A_{i_1} est connexe par arcs, il existe un chemin continu γ_1 contenu dans A_{i_1} tel que γ_1 relie a à c. Puisque A_{i_2} est connexe par arcs, il existe un chemin continu γ_2 contenu dans A_{i_2} tel que γ_2 relie c à b. Alors le chemin constitué de γ_1 suivi de γ_2 est un chemin contenu dans $\bigcup_{i \in I} A_i$ qui relie a à b. Ainsi, $\bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe par arcs.

Exercice 12.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On souhaite démontrer à l'aide de la connexité par arcs le résultat classique suivant : si f est continue et injective, alors f est strictement monotone. Pour cela, on pose $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x > y\}$ et $F(x,y) = f(x) - f(y)$, pour $(x,y) \in C$.

1. Démontrer que $F(C)$ est un intervalle.
2. Conclure.

Correction.

1. Remarquons d'abord que C est connexe par arcs, car convexe (faire un dessin). Puisque F est continue, $F(C)$ est un connexe par arcs de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire un intervalle.
2. Puisque f est injective, $0 \notin F(C)$. Puisque $F(C)$ est un intervalle, on a ou bien $F(C) \subset]0,+\infty[$ (et dans ce cas F est strictement croissante), ou bien $F(C) \subset]-\infty, 0[$ (et dans ce cas F est strictement décroissante). Dans tous les cas, on a bien prouvé que F est strictement monotone.

Exercice 13.

On dit que deux parties A et B de deux espaces vectoriels normés E et F sont homéomorphes s'il existe une bijection $f : A \to B$ telle que f et f^{-1} soient continues.

1. Démontrer que $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ est connexe par arcs.
2. Démontrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.
3. Démontrer que $[0,1]$ et le cercle trigonométrique ne sont pas homéomorphes.

Correction.

1. $\mathbb{R}^2$ est connexe par arcs. Considérons en effet x et y dans $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$. Il est facile de voir que l'on peut tracer un arc constitué de deux segments joignant x à y sans passer par l'origine.
2. Procédons par l'absurde et imaginons que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ soient homéomorphes. Il existerait alors une bijection $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui soit continues. Posons $a = f(0,0)$. Alors $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to \mathbb{R} \backslash \{a\}$ resterait une bijection continue. Mais $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ est connexe par arcs, et $\mathbb{R} \backslash \{a\}$ ne l'est pas (les parties de $\mathbb{R}$ connexes par arcs sont les intervalles).
3. On procède de la même façon, en remarquant que le cercle privé d'un point est connexe par arcs, ce qui n'est pas le cas de $[0,1] \backslash \{1/2\}$. En notant $\mathcal{C}$ le cercle unité et $f : \mathcal{C} \to [0,1]$ une éventuelle bijection continue, on pose $M = f^{-1}(1/2)$ et on remarque qu'on obtient encore une bijection continue entre le connexe par arcs $\mathcal{C} \backslash \{M\}$ et le non connexe par arcs $[0,1] \backslash \{1/2\}$.

c. Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 14.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et E l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Démontrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout $P \in E$, on a

$$\int_0^1 |P(t)|dt \geq \lambda \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|.$$

Correction.

Il suffit de remarquer que E est de dimension finie et que $\int_0^1 |P(t)|dt$ et $\sup_{t\in[0,1]} |P(t)|$ définissent des normes sur E. Elles sont donc équivalentes d'où le résultat.

Exercice 15.

Démontrer que l'ensemble des matrices symétriques est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Correction.

Soit $(S_{i,j}(k))$ une suite de matrices symétriques qui converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers la matrice $S = (S_{i,j})$. Alors tous les entiers $1 \leq i, j \leq n$ et $k \geq 1$, on a $S_{i,j}(k) = S_{j,i}(k)$. Puisque la convergence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ entraîne la convergence coordonnées par coordonnées, ceci implique en faisant tendre k vers $+\infty$ que $S_{i,j} = S_{j,i}$ pour tous $1 \leq i, j \leq n$. Ainsi, la matrice S est symétrique et l'ensemble des matrices symétriques est fermé.

Exercice 16.

Soit N une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$N(AB) \leq CN(A)N(B).$$

Correction.

Il y a plusieurs méthodes pour résoudre cet exercice. On peut par exemple prouver que l'inégalité est vraie pour une norme particulière sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puis utiliser l'équivalence des normes. Précisément, considérons $N_\infty(A) = \sup_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|$. Prenons $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$ et $C = AB$. Alors on a, pour tout $1 \leq i, j \leq n$,

$$|c_{i,j}| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \times |b_{k,j}| \leq \sum_{k=1}^{n} N_\infty(A)N_\infty(B)$$

ce qui prouve que $N_\infty(AB) \leq nN_\infty(A)N_\infty(B)$. Mais d'autre part, N et N_∞ sont équivalentes. Il existe donc $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha N \leq N_\infty \leq \beta N$. On en déduit que

$$N(AB) \leq \frac{1}{\alpha}N_\infty(AB) \leq \frac{1}{\alpha}nN_\infty(A)N_\infty(B) \leq \frac{n\beta^2}{\alpha}N(A)N(B).$$

2. Exercices d'entraînement

a. Compacité

Exercice 17.

Soient K, L deux parties compactes d'un espace vectoriel normé E. On pose $K+L = \{x+y;\ x \in K,\ y \in L\}$. Démontrer que $K+L$ est une partie compacte de E.

Correction.

Soit (z_n) une suite de $K+L$. Alors pour chaque n, z_n s'écrit $z_n = x_n + y_n$ avec $x_n \in K$ et $y_n \in L$. La suite (x_n) est une suite de K : elle admet donc une suite extraite $(x_{\phi(n)})$ qui converge vers $x \in K$. De plus, la suite $(y_{\phi(n)})$ est une suite de L. Elle admet donc une suite extraite $(y_{\psi(n)})$ qui converge vers $y \in L$. Comme la suite $(x_{\psi(n)})$ est extraite de $(x_{\phi(n)})$, elle converge également vers x. Ainsi, la suite $(z_{\psi(n)})$ converge vers $x+y \in K+L$. Ce dernier ensemble est bien compact. Remarquons ici l'importance de procéder à des extractions successives.

Exercice 18.

Soit E un espace vectoriel normé de dimension n. Si F est un sous-ensemble quelconque de E, on appelle enveloppe convexe de F, et on note $\mathrm{Conv}(F)$, le plus petit sous-ensemble convexe (au sens de l'inclusion) contenant F. On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in (\mathbb{R}_+)^{n+1}$ et on admet que $\mathrm{Conv}(F)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de la forme $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$, où $x_1, \dots, x_{n+1} \in F$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathcal{H}$. Le but de l'exercice est de démontrer que si K est une partie compacte de E, alors $\mathrm{Conv}(K)$ est aussi une partie compacte de E.

1. Démontrer que $\mathcal{H}$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^{n+1}$.
2. Définir une application continue $\phi : \mathbb{R}^{n+1} \times E^{n+1} \to E$ telle que $\mathrm{Conv}(K) = \phi(\mathcal{H} \times K^{n+1})$.
3. Conclure.

Correction.

1. Notons $H = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1};\ x_1 + \cdots + x_{n+1} = 1\}$. Alors H est fermé : c'est l'image réciproque de $\{1\}$ par l'application continue (car linéaire en dimension finie) $\phi(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_{n+1}$. De plus, si $E_i = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1};\ x_i \geq 0\}$, alors E_i est également fermé. Ainsi, $\mathcal{H} = H \cap E_1 \cap \cdots \cap E_n$ est fermé comme intersection de fermés. De plus, $\mathcal{H}$ est borné. En effet, si $u = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in H$, alors
$$\|u\| = |\lambda_1| + \cdots + |\lambda_{n+1}| = \lambda_1 + \cdots + \lambda_{n+1} = 1.$$
Ainsi, $\mathcal{H}$ est un fermé et borné de l'espace $\mathbb{R}^{n+1}$:$\mathcal{H}$ est compact.
2. Posons
$$\phi\big((\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}), (x_1, \dots, x_{n+1})\big) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i.$$
Alors ϕ est une application bilinéaire définie sur un produit de deux espaces de dimension finie. Ainsi, ϕ est continue. De plus, d'après le rappel donné par l'énoncé, on a $\mathrm{Conv}(K) = \phi(\mathcal{H} \times K^{n+1})$.

3. L'ensemble $\mathcal{H} \times K^{n+1}$ est compact comme produit d'un nombre fini de compacts. L'image d'un compact par une application continue étant un compact, on en déduit que $\mathrm{Conv}(K)$ est compact.

Exercice 19.

Soit $E = \mathbb{R}^d$ muni d'une norme $\|\cdot\|$, et A une partie non vide de E. On définit la distance d'un élément x_0 de E à une partie A de E, notée $d(x_0, A)$, par la formule

$$d(x_0, A) = \inf_{x \in A} \|x - x_0\|.$$

1. Supposons A compact. Montrer que pour tout $x_0 \in E$ il existe $y \in A$ tel que $d(x_0, A) = \|y - x_0\|$.
2. Montrer que le résultat est encore vrai si on suppose seulement que A est fermé. (On remarquera que pour toute partie B de A on a $d(x_0, B) \geq d(x_0, A)$.)
3. Montrer que l'application qui à x_0 associe $d(x_0, A)$ est continue sur E (sans aucune hypothèse sur A).
4. En déduire que si A est un fermé de E et B un compact de E tels que A et B sont disjoints, alors il existe une constante $\delta > 0$ telle que

$$\|a - b\| \geq \delta \qquad \forall (a, b) \in A \times B.$$

5. Montrer par un contre-exemple que le résultat est faux si on suppose seulement que A et B sont deux fermés disjoints.

Correction.

1. La fonction $x \mapsto \|x - x_0\|$ est continue, à valeurs réelles. Elle atteint sa borne inférieure sur tout compact.
2. On fixe un point $z \in A$, et on pose $B = A \cap \overline{B}(x_0, \|x_0 - z\|)$. Puisque $B \subset A$, il est clair que $d(x_0, B) \geq d(x_0, A)$. Maintenant, si $y \in B \backslash A$, on a $\|y - x_0\| \geq \|z - x_0\| \geq d(x_0, B)$. Ceci prouve que $d(x_0, A) = d(x_0, B)$. Maintenant, B est fermé comme intersection de deux fermés, et est compact car il est aussi fermé. Il existe $y \in B \subset A$ tel que :

$$d(x_0, A) = d(x_0, B) = \|y - x_0\|.$$

3. On fixe x_0 et x_1 deux point de E, et y dans A. D'après l'inégalité triangulaire :

$$\|x_0 - y\| - \|x_1 - y\| \leq \|x_0 - x_1\|.$$

On obtient ensuite :

$$d(x_0, A) \leq \|x_0 - y\| \leq \|x_0 - x_1\| + \|x_1 - y\|.$$

On prend enfin la borne inf pour y dans A :

$$d(x_0, A) \leq \|x_0 - x_1\| + d(x_1, A) \implies d(x_0, A) - d(x_1, A) \leq \|x_0 - x_1\|.$$

Par symétrie du rôle joué par x_0 et x_1, on a finalement :

$$|d(x_0, A) - d(x_1, A)| \leq \|x_0 - x_1\|.$$

L'application $x_0 \mapsto d(x_0, A)$ est 1-lipschitzienne, donc continue.

4. L'application étant continue sur le compact B, elle y atteint son minimum, disons en $y_0 \notin A$. Puisque A est fermé, $d(y_0, A) > 0$, et donc :
$$\forall a \in A, \forall b \in B, \|a - b\| \geq d(b, A) \geq d(y_0, A) > 0.$$
5. Soit $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = x\right\}$ et $B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = x + e^{-x}\right\}$. A et B sont deux fermés disjoints, mais ils ont des points infiniment proches.

Exercice 20.

Soit E un espace vectoriel normé et (K_n) une suite de parties compactes de E telle que, pour chaque entier n, on $K_{n+1} \subset K_n$. On pose $K = \bigcap_{n \geq 1} K_n$.

1. Démontrer que $K \neq \varnothing$.
2. Soit U un ouvert contenant K. Démontrer qu'il existe un entier n tel que $K_n \subset U$.

Correction.

1. Pour tout entier n, considérons $x_n \in K_n$. Alors (x_n) est une suite du compact K_0. Elle admet donc une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ qui converge vers x. Mais alors, pour tout entier p et tout $n \geq p$, on a $\phi(n) \geq n \geq p$ et donc $x_{\phi(n)} \in K_p$. Puisque K_p est fermé, $x \in K_p$. Ceci étant vrai pour tout $p \geq 0$, on en déduit que $x \in K$ et donc que K est non vide.
2. Supposons que ceci soit faux. Alors pour tout entier n, il existe $x_n \in K_n \cap U^c$. Mais alors, comme à la question précédente, on peut extraire une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ qui converge vers $x \in K$. Mais, puisque U^c est fermé, on a aussi que $x \in U^c$. Ceci contredit que $K \subset U$.

Exercice 21.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Démontrer qu'il existe toujours une suite exhaustive de compacts $(K_j)_{j \geq 1}$ qui vérifie

1. $\forall j \geq 1,\ K_j \subset \Omega$
2. $\forall j \geq 1,\ K_j \subset K_{j+1}$
3. $\Omega = \cup_{j \geq 1} K_j$.

Correction.

Posons $L_j = \left\{x \in \mathbb{R}^n;\ \mathrm{dist}(x, \Omega^c) \geq \frac{1}{j}\right\}$. Alors L_j est fermé : si on note $F = \Omega^c$, l'application $x \mapsto d(x, F)$ est continue et L_j est l'image réciproque du fermé $[1/j, +\infty[$ par cette application). Donc $K_j = \bar{B}(O, j) \cap L_j$ est compact, puisque c'est un fermé et borné de $\mathbb{R}^n$. La suite $(K_j)_{j \geq 1}$ vérifie les conclusions demandées :

1. Si $x \in K_j$, alors $x \in L_j$ et donc $\mathrm{dist}(x, \Omega^c) > 0$. En particuler, $x \notin \Omega^c$, c'est-à-dire $x \in K$.
2. Si $x \in K_j$, alors $\|x\| \leq j \implies \|x\| \leq j + 1$ et $d(x, F) \geq \frac{1}{j} \geq \frac{1}{j+1}$.
3. On a $\bigcup_{j \geq 1} K_j \subset \Omega$. Réciproquement, si $x \in \Omega$, puisque Ω est ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que

$B(x,\delta) \subset \Omega$. En particulier, $\mathrm{dist}(x,F) \geq \delta$. Si on choisit $j \geq 1$ tel que $j \geq \|x\|$ et $\frac{1}{j} \leq \delta$, alors on a $x \in K_j$ ce qui prouve que $\Omega \subset \bigcup_{j \geq 1} K_j$.

Exercice 22.

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\forall M > 0,\ \exists R > 0$ tel que $\|x\| > R \implies |f(x)| > M$.
2. Pour toute partie bornée B de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(B)$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^n$.
3. Pour toute partie compacte K de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(K)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$.

Correction.

— 1. $\implies$ 2. : Soit M tel que $y \in B \implies |y| \leq M$. Soit $R > 0$ associé à ce M par la propriété 1. Si $x \in f^{-1}(B)$ et $\|x\| > R$, par (i), on aurait $|f(x)| > M$, ce qui est impossible puisque $f(x) \in B$.

— 2. $\implies$ 3. : K étant compacte, elle est fermée bornée. Ceci entraîne que $f^{-1}(K)$ est fermé, car l'image réciproque d'un fermé par une application continue est fermé, et que $f^{-1}(K)$ est borné, par (ii). Les compacts de $\mathbb{R}^n$ étant exactement les fermés bornés, on a le résultat.

— 3. $\implies$ 1. : Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors, il existe M et une suite (x_n) de $\mathbb{R}^n$ telle que $\|x\| \geq n$ et $|f(x)| \leq M$. Mais alors l'image réciproque de $[-M, M]$ contient la suite (x_n), elle n'est pas bornée et n'est par conséquent pas compacte.

Exercice 23.

Une fonction f définie sur une partie $A \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ est dite *localement lipschitzienne* si, pour tout $x \in A$, il existe un voisinage V_x de x et une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall (y,z) \in A \cap V_x,\ \|f(y) - f(z)\| \leq C\|y - z\|.$$

Montrer qu'une fonction localement lipschitzienne sur une partie compacte K de $\mathbb{R}^n$ est en fait lipschitzienne.

Correction.

On raisonne par l'absurde et on suppose que f n'est pas lipschitzienne sur K. Pour chaque entier n, on peut donc trouver deux éléments y_n et z_n de K tels que

$$\|f(y_n) - f(z_n)\| > n\|y_n - z_n\|.$$

Remarquons que, puisque f est bornée (elle est continue sur le compact K), disons par M, on a

$$\|y_n - z_n\| \leq \frac{2M}{n} \tag{1}$$

et donc $\|y_n - z_n\| \to 0$. D'autre part, puisqu'elle vit dans le compact K, la suite (y_n) admet une sous-suite $(y_{\phi(n)})$ qui converge vers $x \in K$. D'après l'inégalité (1),il en est de même pour $(z_{\phi(n)})$.

Mais on sait que f est localement lipschitzienne en x et donc il existe $C > 0$ et un voisinage V_x de x tels que

$$\forall (y,z) \in K \cap V_x,\ \|f(y) - f(z)\| \leq C\|y - z\|.$$

Pour n assez grands, $y_\phi(n)$ et $z_{\phi(n)}$ sont éléments de $K \cap V_x$. On en déduit

$$n\|y_{\phi(n)} - z_{\phi(n)}\| < \|f(y_{\phi(n)}) - f(z_{\phi(n)})\| \leq C\|y_{\phi(n)} - z_{\phi(n)}\|.$$

Faisant tendre n vers $+\infty$, c'est manifestement une contradiction !

Exercice 24.

Soient A, B deux parties d'un espace vectoriel normé E, $f : A \to B$ une application et $G = \{(x, f(x));\ x \in A\}$ son graphe.

1. On suppose que f est continue. Démontrer que son graphe est fermé.
2. On suppose de plus que B est compact et que le graphe de f est fermé. Démontrer que f est continue (on pourra utiliser le théorème suivant : une suite d'éléments d'une partie compacte converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.)

Correction.

1. Soit $(x_n, f(x_n))$ une suite de G qui converge vers $(x, y) \in A \times B$. Alors, puisque f est continue, on sait que $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$ et donc que $y = f(x)$. Ainsi, $(x, y) \in G$ qui est fermé.
2. Soit $x \in A$ et (x_n) une suite de A qui converge vers x. Il s'agit de démontrer que $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$. Pour cela, puisque $(f(x_n))$ est une suite du compact B, il suffit de démontrer que $f(x)$ est sa seule valeur d'adhérence. Soit y une valeur d'adhérence de $(f(x_n))$. Alors il existe une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(f(x_{\varphi(n)}))$ converge vers y. Mais $(x_{\varphi(n)})$ converge aussi vers x. Comme la suite $(x_{\varphi(n)}, f(x_{\varphi(n)})$ est une suite du fermé G, sa limite est aussi dans G. Autrement dit, $y = f(x)$, ce qu'il fallait démontrer.

b. Connexité par arcs

Exercice 25.

Soit E un espace vectoriel normé de dimension supérieure ou égale à deux (éventuellement, de dimension infinie). Démontrer que sa sphère unité $\mathcal{S}_E$ est connexe par arcs.

Correction.

Soit $x, y \in \mathcal{S}_E$. Supposons d'abord que $y \neq -x$. Alors le segment $[x, y]$ ne passe pas par l'origine. Autrement dit, pour tout $t \in [0, 1]$, on a $(1 - t)x + ty \neq 0$. On cosidère alors $\gamma : [0, 1] \to \mathcal{S}_E$,

$$\gamma(t) = \frac{(1-t)x + ty}{\|(1-t)x + ty\|}.$$

Alors γ définit bien un chemin continu sur la sphère tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Supposons maintenant que $y = -x$. Alors, puisque E est de dimension au moins égale à deux, il existe $z \in E$ tel que (x, z) est libre. On définit alors, par le raisonnement précédent, un chemin continu γ_1 sur la sphère de x vers z, puis un chemin continu γ_2 sur la sphère de z à $-x$. La réunion des deux chemins γ_1 et γ_2 donne un chemin continu sur la sphère de x à $-x$.

Exercice 26.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable. Notons $A = \{(x, y) \in I \times I;\ x < y\}$.

1. Démontrer que A est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$.
2. Pour $(x, y) \in A$, posons $g(x, y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Démontrer que $g(A) \subset f'(I) \subset \overline{g(A)}$.
3. Démontrer que $f'(I)$ est un intervalle.

Correction.

1. A est convexe, donc connexe par arcs.
2. Soit $z \in g(A)$. Alors il existe $(x, y) \in A$ tel que
$$z = g(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$
Par le théorème des accroissements finis, il existe $a \in I$ tel que
$$z = g(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(a)$$
et donc $z \in f'(I)$. D'autre part, soit $z = f'(a) \in f'(I)$. Soit (b_n) une suite de I qui tend vers a par valeurs supérieures. Alors, on a par la définition de la dérivée en a que
$$f'(a) = \lim_{n \to +\infty} g(a, b_n).$$
Mais $g(a, b_n) \in g(A)$, et donc $z \in \overline{g(A)}$.
3. $g(A)$ est un connexe par arcs de $\mathbb{R}$, donc un intervalle. Ainsi, $f'(I)$, qui est compris entre un intervalle et l'adhérence d'un intervalle, est lui-même un intervalle.

c. Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 27.

Montrer que l'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles est un ouvert dense dans $M_n(\mathbb{R})$.

Correction.

L'application déterminant est continue sur $M_n(\mathbb{R})$ (c'est un polynôme en les coefficients de la matrice). En outre,

$$GL_n(\mathbb{R}) = \det{}^{-1}(\mathbb{R}^*).$$

Ainsi, cet ensemble est ouvert comme image réciproque d'un ouvert. Prouvons qu'il est dense. Une matrice M n'admet qu'un nombre fini de valeurs propres. Il existe donc $\rho > 0$ tel que $0 < |\lambda| < \rho$ entraîne que $M - \lambda I$ est inversible. En outre, si $\lambda \to 0$, $M - \lambda I \to M$, et donc M est limite d'une suite de matrices inversibles.

Exercice 28.

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, K une partie compacte de E et $r > 0$. On pose $L = \bigcup_{x\in K} \bar{B}(x, r)$. Démontrer que L est compact.

Correction.

Il suffit de démontrer que L est fermé et borné. D'abord, puisque K est compact, il est borné. Il existe donc $M > 0$ tel que, pour tout $x \in K$, on a $\|x\| \leq M$. Prenons ensuite $y \in L$. Alors il existe $x \in K$ tel que $\|y - x\| \leq r$. Il vient $\|y\| \leq \|x\| + r \leq M + r$ et donc L est bornée. Soit ensuite (y_n) une suite de L qui converge vers $y \in E$, et prouvons que $y \in L$. Pour chaque entier n, il existe $x_n \in K$ tel que $\|y_n - x_n\| \leq r$. Puisque K est compact, il existe $x \in K$ et une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ telle que $(x_{\phi(n)})$ converge vers x. Mais alors $(y_{\phi(n)})$ converge aussi vers y et de l'inégalité $\|y_{\phi(n)} - x_{\phi(n)}\| \leq r$, on tire en passant à la limite que $\|y - x\| \leq r$. Ceci prouve que $y \in L$, et donc que L est compact.

Exercice 29.

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer que tout sous-espace vectoriel de E est fermé.

Correction.

Soit F un tel sous-espace, et $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F. On complète $(e_1, \dots, e_p)$ en une base $(e_1, \dots, e_q)$ de E. On considère enfin la norme N sur E :

$$N\left(\sum_{i=1}^{q} x_i e_i\right) = \max_i |x_i|.$$

Rappelons que, puisque E est de dimension finie, toutes les normes sur E sont équivalentes, il suffit de prouver que F est fermé relativement à cette norme. Soit $(x(n))$ une suite de F, qui converge vers $x \in E$ pour cette norme. Chaque $x(n)$ s'écrit :

$$x(n) = x_1(n)e_1 + \dots x_p(n)e_p + x_{p+1}(n)e_{p+1} + \dots + x_q(n)e_q,$$

avec $x_i(n) = 0$ si $i \geq p + 1$. On décompose également x sous cette forme :

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_q e_q.$$

Remarquons maintenant que :

$$|x_i(n) - x_i| \leq N(x(n) - x).$$

Ceci prouve que chaque suite $(x_i(n))$ converge vers x_i (dans un evn de dimension finie, la convergence équivaut à la convergence coordonnée par coordonnée). En particulier, pour $i \geq p+1$, $x_i = 0$ ce qui prouve que $x \in F$.

Exercice 30.

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé E.

1. Démontrer que pour tout $a \in E$, il existe $x \in F$ tel que $d(a, F) = \|x - a\|$.
2. On suppose $F \neq E$. Soit $a \in E \backslash F$ et soit $x \in F$ tel que $d(a, F) = \|a - x\|$ On pose $b = (a - x)/\|a - x\|$. Démontrer que $d(b, F) = 1$ et $\|b\| = 1$.
3. On suppose que E est de dimension infinie. Construire une suite (b_n) de E telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\|b_n\| = 1 \text{ et } d(b_n, \mathrm{vect}(b_0, \ldots, b_{n-1})) = 1.$$
4. En déduire que la boule unité fermée de E n'est pas compacte.

Correction.

1. Par définition de la borne inférieure d'un ensemble, il existe une suite (x_n) de F telle que $\|x_n - a\| \to d(a, F)$. En particulier, la suite (x_n) est bornée et c'est une suite de l'espace vectoriel normée de dimension finie F. Elle admet donc une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ qui converge vers $x \in F$. Mais alors, par passage à la limite, on a $\|x - a\| = d(a, F)$.
2. Il est d'abord évident que $\|b\| = 1$. De plus, $d(b, F) \leq \|b - 0\| \leq 1$. De plus, pour tout $y \in F$, on a
$$\|b - y\| = \frac{1}{\|a - x\|} \times \|a - z\|$$
où $z = x + \|a - x\| y \in F$. Ainsi, $\|b - y\| \geq 1$ et donc $d(b, F) \geq 1$.
3. On construit la suite (b_n) par récurrence. On l'initialise avec b_0 un vecteur unitaire, puis si $b_0, \ldots, b_{n-1}$ ont été construits, on définit b_n en utilisant le résultat de la question précédente avec $F = \mathrm{vect}(b_0, \ldots, b_{n-1})$. Bien sûr, $F \neq E$ puisque E est de dimension infinie.
4. Si la boule unité fermée de E était compacte, la suite (b_n) construite à la question précédente aurait une sous-suite convergente. Mais ce n'est pas le cas. En effet, pour tout $n > m$, on a
$$\|b_n - b_m\| \geq d(b_n, \mathrm{vect}(b_0, \ldots, b_{n-1})) = 1.$$
On ne peut pas extraire d'une telle suite une suite convergente. Autrement, si $(b_{\phi(n)})$ était une telle suite, on aurait $\|b_{\phi(n+1)} - b_{\phi(n)}\| \to 0$, ce qui contredit l'inégalité précédente.

Exercice 31.

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, A une partie bornée non-vide de E. On souhaite prouver qu'il existe une boule fermée de rayon minimal contenant A. Pour cela, on note $D = \{r > 0;\ A \text{ est contenu dans une boule de rayon } r\}$.

1. Démontrer que D admet une borne inférieure. Cette borne inférieure sera notée r_0.
2. Pour $n \geq 1$, on pose $r_n = r_0 + \frac{1}{n}$. Démontrer qu'il existe $x_n \in E$ tel que $A \subset \bar{B}(x_n, r_n)$.
3. Démontrer que (x_n) est bornée.
4. Conclure.
5. On suppose dans cette question que $E = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$. Donner un exemple d'ensemble borné A pour lequel il existe plusieurs boules de rayon minimum contenant A.
6. On suppose dans cette question que $E = (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$. Démontrer qu'il existe une unique boule de rayon minimal contenant A. On rappelle l'identité du parallélogramme

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big).$$

Correction.

1. D est un ensemble non vide (car A est borné) et minoré par 0. Il admet donc une borne inférieure.
2. Par définition de la borne inférieure, il existe $r \in D$ tel que $r_0 \leq r < r_n$. Par définition de D, il existe $x_n \in E$ tel que $A \subset \bar{B}(x_n, r) \subset \bar{B}(x_n, r_n)$.
3. Soit $a \in A$. Alors
$$\|x_n - a\| \leq r_n \leq r_0 + 1.$$
Ainsi, (x_n) est une suite bornée.
4. Puisque (x_n) est une suite bornée dans un espace vectoriel normé de dimension finie, elle admet une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ convergente vers $x \in E$. Soit $a \in A$. Passant à la limite dans l'inégalité $\|a - x_{\phi(n)}\| \leq r_{\phi(n)}$, on trouve $\|a - x\| \leq r_0$. Ainsi, $D \subset \bar{B}(x, r_0)$, et cette boule est une boule fermée de rayon minimal contenant A.
5. Considérons $A = [0,1] \times \{0\}$. Une boule contenant A a au moins un rayon égal à $1/2$ (considérer ce qui se passe sur la première coordonnée). Maintenant, si $x = (1/2, 0)$ et $y = (1/2, 1/4)$, alors $A \subset \bar{B}(x, 1/2)$ et $A \subset \bar{B}(y, 1/2)$. Il n'y a pas unicité d'une boule fermée de rayon minimal contenant A.
6. Supposons que $A \subset \bar{B}(x_1, r_0)$ et $A \subset \bar{B}(x_2, r_0)$. Alors, en utilisant l'identité du parallélogramme, on trouve que, pour tout $a \in A$:
$$\begin{aligned}\left\|a - \frac{x_1+x_2}{2}\right\|^2 &= \frac{1}{2}\|a-x_1\|^2 + \frac{1}{2}\|a-x_2\|^2 - \frac{1}{4}\|x_1-x_2\|^2 \\ &\leq r_0^2 - \frac{\|x_1-x_2\|^2}{4}.\end{aligned}$$
En notant $x = (x_1+x_2)/2$ et $\rho = \sqrt{r_0^2 - \frac{\|x_1-x_2\|^2}{4}} < r_0$, on a donc $A \subset \bar{B}(x, \rho)$, ce qui contredit la minimalité de r_0.

Exercice 32.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et A une partie bornée de E non vide.

1. Soit $a \in E$. Démontrer qu'il existe une boule $\bar{B}(a, R_a)$ de rayon minimal qui contient A.
2. On pose $R = \inf\{R_a;\ a \in E\}$. Démontrer qu'il existe $b \in E$ tel que $A \subset \bar{B}(b, R)$.

En particulier, $\bar{B}(b, R)$ est une boule de E de rayon minimal contenant A.

Correction.

1. On pose $R_a = \sup\{\|x - a\|;\ x \in E\}$. Alors on a $A \subset \bar{B}(a, R_a)$ et de plus, par définition de la borne supérieure, R_a est le plus petit réel avec cette propriété.
2. Soit (a_n) une suite de E telle que (R_{a_n}) converge vers R. Alors, (a_n) est une suite bornée. En effet, fixons $x_0 \in A$. Alors, pour tout entier n, on a d'après l'inégalité triangulaire,
$$\|a_n\| \leq \|a_n - x_0\| + \|x_0\| \leq R_{a_n} + \|x_0\| \leq R + 1 + \|x_0\|$$
dès que n est assez grand. Puisque E est de dimension finie, on peut extraire de (a_n) une suite $(a_{\phi(n)})$ qui converge vers un certain $b \in E$. Mais alors, puisque pour tout $x \in A$, on a pour tout entier n,
$$\|x - a_{\phi(n)}\| \leq R_{a_{\phi(n)}},$$
on a par passage à la limite
$$\|x - b\| \leq R.$$

Exercice 33.

Montrer que l'ensemble des matrices orthogonales $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ (celles qui vérifient ${}^tMM = I_n$) est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Est-il connexe par arcs ?

Correction.

Il suffit de prouver que cet ensemble est fermé et borné, puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie n^2. Mais cet espace est fermé, car c'est l'image réciproque d'un fermé, à savoir I_n, par l'application continue $M \mapsto {}^tMM$. Il est de plus borné. Munissons $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme infinie N_∞ et notons f l'endomorphisme associé à M dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Aors, si M est orthogonale, f est une isométrie et on a
$$|m_{i,j}| = |\langle f(e_j), e_i\rangle| \leq 1.$$
Enfin, $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs. En effet, s'il l'était, puisque l'application déterminant est continue, l'image de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ par l'application déterminant serait un connexe par arcs de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire un intervalle. Or, il est facile de voir que si $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $\det(M)^2 = 1$ et donc $\det(M) = \pm 1$. De plus, ces deux valeurs sont atteintes, car $\det(I_n) = 1$ et $\det(A) = -1$ où A est la matrice orthogonale diagonale avec -1 pour premier coefficient sur la diagonale, et 0 ailleurs. On a donc $\det(\mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \{\pm 1\}$, et donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

3. Exercices d'approfondissement

a. Compacité

Exercice 34.

Soit E un espace vectoriel normé, B la boule unité fermée de E et S la sphère unité. Démontrer que B est compact si et seulement si S est compact.

Correction.

Un sens est assez facile. En effet, si B est compact, alors S est une partie fermée (pourquoi ?) de l'ensemble compact B. C'est donc également un compact. Réciproquement, si S est compact, prouvons que B est compact. Pour cela, considérons (x_n) une suite d'éléments de B. Si (x_n) admet une sous-suite qui converge vers 0, alors il n'y a rien à prouver. Sinon, pour tout n assez grand, $x_n \neq 0$ et on peut donc considérer $y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$. Alors (y_n) est une suite de S et comme S est compact, (y_n) admet une sous-suite $(y_{\phi(n)})$ qui converge vers $y \in S$. De plus, la suite $(\|x_{\phi(n)}\|)$ est une suite du segment $[0,1]$ qui est compact. Elle admet donc une suite extraite $(\|x_{\psi(n)}\|)$ qui converge vers le réel $a \in [0,1]$. Mais alors, $x_{\psi(n)} = \|x_{\psi(n)}\| \times y_{\psi(n)}$ converge vers ay qui est bien un élement de B. Ainsi, B est compact.

Exercice 35.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et K une partie compacte de E. Pour tout $r > 0$, on pose $K_r = \bigcup_{x\in K} \bar{B}(x,r)$. Démontrer que K_r est une partie compacte de E.

Correction.

Puisque K_r est une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie, il suffit de démontrer que K_r est une partie fermée et bornée de E. Que K_r est bornée est facile à démontrer. K étant compact, c'est une partie bornée : soit $M > 0$ tel que pour tout $x \in K$, on a $\|x\| \leq M$. Alors si $y \in K_r$, l'inégalité triangulaire montre facilement que $\|y\| \leq M + r$. Prouvons désormais que K_r est fermé. Soit (y_n) une suite de K_r qui converge vers $y \in E$. Alors pour chaque n, il existe $x_n \in K$ tel que $y_n \in \bar{B}(x_n, r)$. La suite (x_n) est une suite du compact K. Elle admet donc une sous-suite $(y_{\phi(n)})$ qui converge vers un certain $x \in K$. Mais alors, de l'inégalité $\|y_{\phi(n)} - x_{\phi(n)}\| \leq r$, on tire par passage à la limite que $\|y - x\| \leq r$. Ceci entraîne que $y \in K_r$ et donc que K_r est fermé.

Exercice 36.

Soit (u_n) une suite de $\mathbb{R}^d$. Pour $n \geq 1$, on pose $A_n = \{u_p;\ p \geq n\}$. Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est :

$$V = \bigcap_{n\geq 1} \overline{A_n}.$$

En déduire que si la suite est bornée, V (l'ensemble des valeurs d'adhérence) est compact.

Correction.

Soit x une valeur d'adhérence, et $n \geq 1$. x est limite d'une suite extraite $(u_{\varphi(k)})$. Quitte à retirer les premiers termes de cette suite, on peut supposer qu'on a toujours $\varphi(k) \geq n$, et donc $x \in \overline{A_n}$. Pour l'inclusion réciproque, soit $x \in \bigcap_n \overline{A_n}$. On construit par récurrence une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ telle que $\|u_{\varphi(n)} - x\| \leq \frac{1}{2^n}$. Au rang 0, puisque $x \in \overline{A_1}$, il est possible de choisir $\varphi(0)$ tel que $\|u_{\varphi(0)} - x\| \leq 1$. Supposons les termes construits jusqu'au rang n. Puisque $x \in \overline{A_{\varphi(n)+1}}$, il existe $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ tel que :

$$\|u_{\varphi(n+1)} - x\| \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Ceci prouve que x est une valeur d'adhérence de (u_n). L'ensemble V des valeurs d'adhérence apparait donc comme une intersection de fermés : c'est un fermé. En outre, si (u_n) est bornée, il est clair que V est aussi borné. Dans ce cas, par caractérisation des parties compactes de $\mathbb{R}^d$, on a prouvé que V est compact.

Exercice 37.

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Soit (x_n) une suite convergente de E et soit x sa limite. Montrer que l'ensemble :

$$A = \{x\} \cup \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$$

est compact.

Correction.

Soit (y_n) une suite de A. Si elle prend un nombre infini de fois la valeur x, alors elle possède une suite extraite constante égale à x, donc convergente dans A. Sinon, y_n prend une infinité de fois une valeur différente de x. Quitte à considérer une suite extraite, on peut supposer que, pour chaque n, y_n est un terme de la suite de départ, d'où $y_n = x_{\varphi(n)}$. On traite deux cas séparément :

1. La suite d'entiers $(\varphi(n))$ est bornée : autrement dit, (y_n) ne prend qu'un nombre fini de valeurs différentes. Clairement, une telle suite admet une sous-suite convergente (il suffit de prendre une valeur qui est prise une infinité de fois) avec une limite dans A.
2. La suite d'entiers $(\varphi(n))$ n'est pas bornée : on peut alors extraire de (y_n) une sous-suite $(y_{\psi(n)})$ telle que $\varphi \circ \psi(n)$ soit strictement croissante. Mais alors, $y_{\psi(n)} = x_{\varphi\circ\psi(n)}$ converge vers x puisque c'est une suite extraite de (x_n).

Dans tous les cas, on a prouvé que (y_n) admettait une suite extraite convergente : l'ensemble A est compact. On peut aussi donner une preuve en utilisant la propriété de Borel-Lebesgue, si on connait cette caractérisation des parties compactes des espaces vectoriels normés. Pour cela, on considère un recouvrement de A par une famille d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$, et on doit prouver qu'on peut en extraire un sous-recouvrement fini. Soit i_0 tel que $x \in U_{i_0}$. Alors, puisque la suite converge vers x, il existe un entier N tel que pour tout $n > N$, on a $x_n \in U_{i_0}$. Soient ensuite $i_1, \dots, i_N$ tels que, pour $j \leq N$, $x_j \in U_{i_j}$. Alors, il est clair que $U_{i_0} \cup \dots \cup U_{i_N}$ est un recouvrement ouvert de A, prouvant que A est compact. Sur cet exemple, la preuve utilisant la propriété de Borel-Lebesgue est sans doute plus facile.

Exercice 38.

Soit E une partie compacte d'un espace vectoriel normé, et $f : E \to E$ une fonction continue vérifiant :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

1. Montrer que f admet un unique point fixe (que l'on notera α).
2. Ces résultats subsistent-ils si on suppose simplement E fermé ?

Correction.

1. Soit la fonction continue $\psi(x) = \|f(x) - x\|$, définie sur E, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Cette fonction admet un minimum atteint en α. Supposons que $\alpha \neq f(\alpha)$. Alors :

$$\psi(f(\alpha)) = \|f(\alpha) - f(f(\alpha))\| < \|\alpha - f(\alpha)\| = \psi(\alpha),$$

ce qui contredit la définition de la borne inférieure. Donc $f(\alpha) = \alpha$. L'unicité est immédiate : si α et β sont deux points fixes distincts, on a en effet :

$$\|\beta - \alpha\| = \|f(\beta) - f(\alpha)\| < \|\beta - \alpha\|,$$

ce qui est absurde.

2. On prend $E = \mathbb{R}$, et $f(x) = 1$ si $x <= 0$, $f(x) = x + \frac{1}{1+x}$ si $x > 0$. Cette fonction vérifie les hypothèses demandées, mais n'admet aucun point fixe.

Exercice 39.

Soit A une partie compacte d'un espace vectoriel normé, et $f : A \to A$ vérifiant $\|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\|$ pour tous $x, y \in A$. Le but de l'exercice est de démontrer que f est une isométrie surjective.

1. Soit $a, b \in A$, et (a_n), (b_n) les suites de A définies par $a_0 = a$, $b_0 = b$, $a_{n+1} = f(a_n)$ et $b_{n+1} = f(b_n)$. Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $p \geq 1$, il existe $k \geq p$ tel que $\|a - a_k\| < \varepsilon$ et $\|b - b_k\| < \varepsilon$. En déduire que f est à image dense.
2. On pose $u_n = \|a_n - b_n\|$. Montrer que (u_n) est une suite stationnaire.
3. En déduire que f est une isométrie.
4. Démontrer que f est surjective.

Correction.

1. La suite (a_n, b_n) est une suite du compact A^2. Elle admet donc une suite extraite $(a_{\phi(n)}, b_{\phi(n)})$ qui converge. En particulier, il existe $n \geq 1$ tel que

$$\|a_{\phi(n+p)} - a_{\phi(n)}\| < \varepsilon \text{ et } \|b_{\phi(n+p)} - b_{\phi(n)}\| < \varepsilon.$$

Concentrons-nous sur la première inégalité. Elle implique

$$\|a_{\phi(n+p)-1} - a_{\phi(n)-1}\| \leq \|f(a_{\phi(n+p)-1}) - f(a_{\phi(n)-1})\| = \|a_{\phi(n+p)} - a_{\phi(n)}\| < \varepsilon.$$

Itérant ce procédé, on trouve

$$\|a_{\phi(n+p)-\phi(n)} - a_0\| < \varepsilon.$$

On peut faire la même chose pour (b_n) et on trouve le résultat demandé avec $k = \phi(n + p) - \phi(n) \geq p$. En notant $x = a_{k-1}$, on a en particulier prouvé que, pour tout $a \in A$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in A$ tel que $\|f(x) - a\| < \varepsilon$. Ceci implique que f est à image dense.

2. La suite (u_n) est croissante par propriété de dilatation des distances de f. Elle est majorée, donc elle est convergente. Notons u_∞ sa limite. De plus, on peut trouver k aussi grand qu'on veut tel que $\|a - a_k\| \leq \varepsilon$ et $\|b - b_k\| \leq \varepsilon$. Ainsi, on a

$$0 \leq u_k - u_0 = \|a_k - b_k\| - \|a - b\| \leq \|a_k - a\| + \|b_k - b\| + 2\varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour des valeurs de k que l'on peut choisir arbitrairement grandes, ceci implique que

$$0 \leq u_\infty - u_0 \leq 2\varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a finalement $u_\infty = u_0$ et la suite (croissante) est stationnaire.

3. On a $u_1 = u_0$ et donc $\|f(a) - f(b)\| = \|a - b\|$. Ceci étant vrai pour tout couple (a, b) de A^2, f est bien une isométrie.
4. f est continue car f est une isométrie (en particulier, elle est lipschitzienne). Puisque A est compact, $f(A)$ est compact donc fermé. De plus, $f(A)$ est dense dans A. On a donc $f(A) = A$ et f est surjective.

b. Connexité par arcs

Exercice 40.

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E, et $f : A \to F$ une application continue, où F est un espace vectoriel normé. On dit que f est localement constante si, pour tout $a \in A$, il existe $r > 0$ tel que f est constante sur $B(a, r) \cap A$. Le but de l'exercice est de démontrer que si A est connexe par arcs et f est localement constante, alors f est constante. Pour cela, on fixe $a, b \in A$ et on considère $\phi : [0, 1] \to A$ un chemin continu tel que $\phi(0) = a$ et $\phi(1) = b$. On pose $t = \sup\{s \in [0, 1];\ f(\phi(s)) = f(a)\}$.

1. Démontre que $t = 1$.
2. Conclure.

Correction.

1. Posons $H = \{s \in [0, 1];\ f(\phi(s)) = f(a)\}$. Cet ensemble est non vide, car $0 \in H$, majoré, il admet donc une borne supérieure t. De plus, $t \in H$, car il existe une suite (s_n) de H qui tend vers t. On a donc $f(a) = f(\phi(s_n))$ et par passage à la limite, $f(t) = f(a)$. Supposons $t < 1$ et posons $c = \phi(t)$. Alors il existe $r > 0$ tel que f est constante sur $B(c, r) \cap A$. Mais alors, par continuité de ϕ, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $t + \varepsilon < 1$ et $\phi(t + \varepsilon) \in B(c, r)$. Ceci signifie que $t + \varepsilon \in H$, une contradiction avec le fait que t est la borne supérieure de H. Donc $t = 1$.
2. D'après la question précédente, $t = 1$ et $f(b) = f(\phi(1)) = f(a)$. Comme a et b sont arbitraires, c'est bien que f est constante.

Exercice 41.

Soient A une partie connexe par arcs d'un espace vectoriel normé, et soit B une partie de A qui est à la fois ouverte et fermée relativement à A. On pose $f : A \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ si $x \in B$ et $f(x) = 0$ si $x \notin B$.

1. Démontrer que f est continue.
2. En déduire que $B = \varnothing$ ou $B = A$.

Correction.

1. Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$. On va prouver que l'image réciproque de O est un ouvert de A. On distingue quatre cas.
   — Si $0 \notin O$ et $1 \notin O$, alors $f^{-1}(O) = \varnothing$, qui est bien ouvert (relatif de A).
   — Si $0 \notin O$ et $1 \in O$, alors $f^{-1}(O) = B$, qui est bien ouvert (relativement à A).
   — Si $0 \in O$ et $1 \notin O$, alors $f^{-1}(O) = B^c$, qui est bien ouvert relativement à A puisque B est fermé relativement à A.
   — Si $0 \in O$ et $1 \in O$, alors $f^{-1}(O) = A$, qui est bien un ouvert relatif de A.

   Ainsi, l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert, et donc f est continue.
2. Puisque A est connexe par arcs et que f est continue, $f(A)$ est connexe par arcs. C'est donc un intervalle de $\mathbb{R}$. Mais $f(A) \subset \{0, 1\}$, et il y a donc deux cas possibles : $f(A) = \{0\}$, ce qui signifie que $B = \varnothing$, et $f(A) = \{1\}$, ce qui signifie que $B = A$.

c. Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 42.

Soit $n > 0$ et $0 \leq p \leq n$ deux entiers. Montrer que l'ensemble F_p des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang inférieur ou égal à p est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Correction.

L'important (et le plus difficile) dans cet exercice est de trouver une bonne caractérisation de ces matrices. Nous allons utiliser la suivante : une matrice est de rang inférieur ou égal à p si et seulement si tous ses déterminants d'ordre $p + 1$ sont nuls. On peut commencer par écarter le cas $p = n$, puisque dans ce cas $F_p = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose donc $p < n$. Pour I, J deux parties de $\{1, \dots, n\}$ de cardinal $p + 1$ et $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, on désigne par $M_{I,J}$ la matrice de $\mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{R})$ définie par $(m_{i,j})_{i\in I, j\in J}$. Alors on a

$$F_p = \bigcap_{I,J} \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R});\ \det(M_{I,J}) = 0\}.$$

Or, les deux applications suivantes sont continues :

$$\begin{array}{rcl} g_{I,J} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M_{I,J} \\ det : \mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & \det(A). \end{array}$$

On a donc
$$F_p = \bigcap_{I,J} (\det \circ g_{I,J})^{-1}(\{0\}).$$
F_p est donc une intersection d'images réciproques de fermés par une application continue. C'est donc un fermé.

Exercice 43.

Soit $n \geq 1$ un entier.

1. Démontrer que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Démontrer qu'il existe un voisinage de A dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ne contenant aucune matrice diagonalisable.

Correction.

1. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Puisque A est trigonalisable, A s'écrit :
$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & & \\ 0 & \lambda_2 & \dots & & \\ 0 & 0 & \lambda_3 & * & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & * \end{pmatrix} P^{-1}.$$
On pose, pour tout k :
$$A_k = P \begin{pmatrix} \lambda_1 + \frac{1}{k} & * & \dots & & \\ 0 & \lambda_2 + \frac{2}{k} & \dots & & \\ 0 & 0 & \lambda_3 + \frac{3}{k} & * & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & * \end{pmatrix} P^{-1}.$$
Dès que k est assez grand, les nombres $\lambda_i + \frac{i}{k}$ sont tous distincts (si $\lambda_i = \lambda_j$, c'est clair, et si $\lambda_i \neq \lambda_j$, ce n'est pas non plus très compliqué à vérifier !). Donc les matrices A_k sont diagonalisables. Et elles tendent évidemment vers A.
2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ telle que $\|A - M\|_\infty < 1/4$. Alors le polynôme caractéristique de M est
$$\chi_M(X) = X^2 - (a+d)X + (ad - bc).$$
Son discriminant est donc
$$\Delta = (a+d)^2 - 4(ad - bc)$$
En utilisant que $-1/4 \leq a, d \leq 1/4$, $3/4 \leq c \leq 5/4$ et $-5/4 \leq b \leq 3/4$, on trouve que
$$\Delta \leq \frac{1}{4} - 4\left(\frac{9}{16} - \frac{1}{16}\right) = \frac{1}{4} - 2 < 0.$$
Ainsi, M n'admet pas de valeurs propres réelles et n'est pas diagonalisable (sur $\mathbb{R}$). Le résultat de la question précédente est donc faux dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 44.

Déterminer l'intérieur de l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Correction.

On va prouver que l'intérieur de l'ensemble des matrices diagonalisables $\mathcal{D}$ de $M_n(\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices diagonalisables dont toutes les valeurs propres sont disjointes. Pour cela, on va démontrer deux choses :

1. Soit M une matrice diagonalisable ayant deux valeurs propres égales. Alors M n'est pas dans l'intérieur de $\mathcal{D}$. Autrement dit, on peut trouver une suite de matrice (M_p) qui converge vers M et qui ne sont pas diagonalisables. Soit P une matrice inversible telle que $M = PDP^{-1}$ où D est diagonale,
$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \vdots & \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$
Alors, posons
$$D_p = \begin{pmatrix} \lambda & 1/p & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$
(on peut toujours s'arranger pour que ce soient les deux premières valeurs propres qui sont égales). Alors la suite (M_p) définie par $M_p = PD_pP^{-1}$ converge vers M et chaque M_p n'est pas diagonalisable. Sinon, D_p serait diagonalisable, ce qui n'est pas le cas (la restriction de D_p au sous-espace vectoriel engendré par les deux premiers vecteurs de base n'est pas diagonalisable).
2. Soit M une matrice diagonalisable dont toutes les valeurs propres sont distinctes. Son polynôme caractéristique χ_M est scindé à racines simples. Par continuité de $A \mapsto \chi_A$ et des racines d'un polynôme en fonction de ses coefficients, il existe un voisinage V de M tel que, pour tout $A \in V$, le polynôme χ_A est scindé à racines simples. Autrement dit, A est diagonalisable. Un voisinage de M est contenu dans $\mathcal{D}$, donc M est dans l'intérieur de $\mathcal{D}$.

Exercice 45.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leq 1$.

1. Montrer que $\ker(u - Id_E) = \ker(u - Id_E)^2$.
2. En déduire que $\ker(u - Id_E) \oplus \mathrm{Im}(u - Id_E) = E$.
3. Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \frac{1}{n}(Id_E + u + \cdots + u^{n-1})$. Montrer que u_n converge dans $\mathcal{L}(E)$ vers une application v que l'on déterminera.

Correction.

1. Soit $x \in \ker(u - Id_E)^2$, i.e. $u^2(x) = 2u(x) - x$. On prouve par récurrence sur $n \geq 1$ que
$$u^n(x) = nu(x) - (n-1)x.$$
La formule est en effet vérifiée pour $n = 1$, et si elle est vraie au rang n, alors
$$u^{n+1}(x) = nu^2(x) - (n-1)u(x) = n(2u(x) - x) - (n-1)u(x) = (n+1)u(x) - nx.$$
Écrivons ceci sous la forme
$$u^n(x) = n(u(x) - x) - x.$$
Puisque la suite $(u^n(x))$ est bornée (par $\|x\|$), ceci n'est possible que si $u(x) = x$. Donc $x \in \ker(u - Id_E)$ ce qui prouve que $\ker(u - Id_E)^2 \subset \ker(u - Id_E)$. Comme l'autre inclusion est toujours vérifiée, on a égalité.
2. D'après le théorème du rang, il suffit de démontrer que $\ker(u - Id_E) \cap \mathrm{Im}(u - Id_E) = \{0\}$. En effet, si ceci est vérifié, on aura automatiquement par le théorème du rang que la somme directe $\ker(u - Id_E) \oplus \mathrm{Im}(u - Id_E)$ est de dimension $\dim(E)$, et donc est égale à E. Prenons donc $x \in \ker(u - Id_E) \cap \mathrm{Im}(u - Id_E)$. On peut alors écrire $x = u(y) - y$, et $u(x) = x$. Il vient $u^2(y) = u(x) + u(y) = x + u(y) = 2u(y) - y$ et donc $y \in \ker(u - Id_E)^2$. D'après la question précédente, y est élément de $\ker(u - Id_E)$ et donc $x = 0$.
3. Prenons $x \in E$ et décomposons le en $x = x_1 + x_2$ dans la somme directe $E = \ker(u - Id_E) \oplus \mathrm{Im}(u - Id_E)$. On a $u(x_1) = x_1$ tandis que, si $x_2 = u(y) - y$, on a
$$u^k(x_2) = u^{k+1}(y) - u^k(y).$$
Il vient
$$u_n(x) = x_1 + \frac{1}{n}(u^n(y) - y) \to x_1$$
lorsque n tend vers $+\infty$ puisque, comme auparavant, la suite $(u^n(y))$ est bornée. Donc, pour chaque x, la suite $(u_n(x))$ converge vers $P(x)$ où P est la projection sur $\ker(u - Id_E)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(u - Id_E)$. Mais on veut plus. On veut prouver que $\|u_n - P\| \to 0$. Introduisons v l'endomorphisme de $\mathrm{Im}(u - Id_E) = F$ induit par u. $v - Id_F$ est inversible (son noyau est restreint à $\{0\}$) et $y = (v - Id_F)^{-1}(x_2)$. Notons aussi Q la projection sur $\mathrm{Im}(u - Id_E)$ parallèlement à $\ker(u - Id_E)$, de sorte que $x_2 = Q(x)$. Le calcul précédent donne alors
$$u_n(x) = P(x) + \frac{1}{n}(u^n(v(Q(x))) - Q(x)).$$
On en déduit :
$$\|u_n(x) - P(x)\| \leq \frac{1}{n}\left(\|v\|\|Q\| + \|Q\|\right)\|x\|$$
i.e.
$$\|u_n - P\| \leq \frac{1}{n}\left(\|v\|\|Q\| + \|Q\|\right).$$
Ceci prouve bien que $\|u_n - P\|$ tend vers 0.

Exercice 46.

Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel normé de dimension finie, et K un compact de E tel que $0 \in \overset{\circ}{K}$. On note H l'ensemble des $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u(K) \subset K$. Montrer que pour tout $u \in H$, on a

$|\det u| \leq 1$.

Correction.

On munit $\mathcal{L}(E)$ de la norme usuelle associée à celle de E :

$$\|u\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|u(x)\|.$$

$\mathcal{L}(E)$ est ainsi un espace vectoriel normé de dimension finie. Montrons que H est compact :

— H est borné : en effet, fixons $u \in H$ et soit $x \in E$ avec $\|x\| = 1$. Puisque $0 \in \overset{\circ}{K}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{B}(0, \varepsilon) \in K$. Ceci entraine $\varepsilon x \in K$. Maintenant, puisque u est continue et que K est compact, il existe $M > 0$ tel que $\|u(y)\| \leq M$ si $y \in K$. On en déduit

$$\|u(x)\| \leq \frac{\|u(\varepsilon x)\|}{\varepsilon} \leq \frac{M}{\varepsilon}\|x\|.$$

Ainsi, on a prouvé que $\|u\| \leq \frac{M}{\varepsilon}$.

— H est fermé : soit (u_n) une suite de H qui converge vers u. En particulier, pour tout x dans K, la suite $(u_n(x))$ converge vers $u(x)$. Maintenant, puisque K est compact, donc fermé, $u(x) \in K$, et $u \in H$.

H étant fermé et borné dans un espace vectoriel normé de dimension finie, il est compact. Maintenant, l'application déterminant est continue, et l'image de H par cette application est donc bornée dans $\mathbb{R}$. Soit $u \in H$. Puisque $u(K) \subset K \implies u^n(K) \subset u^{n-1}(K) \subset \dots K$, u^n est dans H. Mais la suite $\det(u^n) = \det(u)^n$ est bornée. Ceci n'est possible que si $|\det u| \leq 1$.