Mathématiques spéciales

Feuille d'exercices n°11 bis : révisions d'algèbre linéaire de Sup'

1. Exercices basiques

Exercice 1.

Résoudre les systèmes linéaires suivants (de préférence avec le pivot de Gauss) :

$$\begin{cases} x+y+2z &= 3 \\ x+2y+z &= 1 \\ 2x+y+z &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2z &= 1 \\ -y+z &= 2 \\ x-2y &= 1 \end{cases}$$

Exercice 2.

Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x+y+z-3t &= 1 \\ 2x+y-z+t &= -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y-3z &= 4 \\ x+3y-z &= 11 \\ 2x+5y-5z &= 13 \\ x+4y+z &= 18 \end{cases}$$

Exercice 3.

Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B} = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}$ la base canonique de E et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la donnée des images des vecteurs de la base :

$$u(\mathcal{E}_1) = -2\mathcal{E}_1 + 2\mathcal{E}_3 \ , u(\mathcal{E}_2) = 3\mathcal{E}_2 \ , u(\mathcal{E}_3) = -4\mathcal{E}_1 + 4\mathcal{E}_3.$$

1. Écrire la matrice de u dans la base canonique.
2. Déterminer une base de ker u. u est-il injectif ? peut-il être surjectif ? Pourquoi ?
3. Déterminer une base de Im u. Quel est le rang de u ?
4. Montrer que $E = \ker u \bigoplus \operatorname{Im} u$.

Exercice 4.

Montrer que $P_1(X) = (X-1)^2$, $P_2(X) = X^2$ et $P_3(X) = (X+1)^2$ forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et donner les coordonnées de $X^2 + X + 1$ dans cette base.

Exercice 5.

On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z).$$

1. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
2. Déterminer une base de $\ker(f)$.
3. L'application f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 6.

Soit $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \mathbb{R}^2$. On considère $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ x = y = z = t\}$. Existe-t-il des applications linéaires de E dans F dont le noyau est H ?

Exercice 7.

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (2x - 2z, y, x - z)$. f est-elle une symétrie ? une projection ? Déterminer une base de ses éléments caractéristiques.

Exercice 8.

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $\phi \in \mathcal{L}(E)$ définie par $\phi(f) = f'$. Quel est le noyau de ϕ ? Quelle est son image ? ϕ est-elle injective ? surjective ?

Exercice 9.

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. On définit u l'application de E dans lui-même par

$$u(P) = P + (1 - X)P'.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de E.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(u)$.
3. Déterminer une base de $\ker(u)$.
4. Montrer que $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 10.

1. Pour $n \geq 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Déduire de la question précédente la valeur de A^n, pour $n \geq 2$.

Exercice 11.

Déterminer, suivant la valeur du réel a, le rang de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a^3 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12.

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donner une base de $\ker(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$. En déduire que $M^n = 0$ pour tout $n \geq 2$.

Exercice 13.

Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans leur base canonique respective est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

On appelle (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et (f_1, f_2) celle de $\mathbb{R}^2$. On pose

$$e_1' = e_2 + e_3,\ e_2' = e_3 + e_1,\ e_3' = e_1 + e_2 \text{ et } f_1' = \frac{1}{2}(f_1 + f_2),\ f_2' = \frac{1}{2}(f_1 - f_2).$$

1. Montrer que (e_1', e_2', e_3') est une base de $\mathbb{R}^3$ puis que (f_1', f_2') est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Quelle est la matrice de u dans ces nouvelles bases ?

Exercice 14.

Soient $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définies par $u(x, y) = (x + 2y, 2x - y, 2x + 3y)$ et $v(x, y, z) = (x - 2y + z, 2x + y - 3z)$.

1. Montrer que u et v sont linéaires et donner les matrices de $u, v, u \circ v$ et $v \circ u$ dans les bases canoniques de leurs espaces de définition respectifs. En déduire les expressions de $u \circ v(x, y, z)$ et $v \circ u(x, y)$.
2. Soit $\mathcal{B}_2 = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2\}$ et $\mathcal{B}_3 = \{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3\}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\mathcal{B}_2' := \{\mathcal{E}_1', \mathcal{E}_2'\}$ et $\mathcal{B}_3' := \{\mathcal{F}_1', \mathcal{F}_2', \mathcal{F}_3'\}$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ resp., où $\mathcal{E}_1' := \mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2' := \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$, $\mathcal{F}_1' := \mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2' := \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2$ et $\mathcal{F}_3' := \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_3$.
3. Donner la matrice P de passage de la base $\mathcal{B}_2$ à la base $\mathcal{B}_2'$ puis la matrice Q de passage de la base $\mathcal{B}_3$ à la base $\mathcal{B}_3'$.
4. Écrire la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}_2'$ et $\mathcal{B}_3$ puis dans les bases $\mathcal{B}_2'$ et $\mathcal{B}_3'$ et enfin celle de v dans les bases $\mathcal{B}_3'$ et $\mathcal{B}_2'$.

Exercice 15.

Soit Δ_n le déterminant de taille n suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

1. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $\Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n$.
2. En déduire la valeur de Δ_n pour tout $n \geq 1$.

Exercice 16.

Soit $n \geq 2$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ n nombres complexes distincts. On se propose de calculer le déterminant suivant :

$$V(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \dots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \dots & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

1. Calculer $V(\alpha_1, \alpha_2)$ et $V(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. On les donnera sous forme factorisée.
2. Démontrer que $V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, x)$ est une fonction polynômiale de x dont on précisera le degré.
3. En déduire que $V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, x) = V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1}(x - \alpha_i)$.
4. En déduire l'expression générale de $V(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Exercice 17.

Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$. On note $A(x)$ la matrice dont le terme général est $a_{i,j} + x$.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \det(A(x))$ est une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à 1.
2. Pour a et b deux réels distincts et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, en déduire la valeur du déterminant suivant

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & a & \dots & a \\ b & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & \alpha_n \end{vmatrix}.$$

Exercice 18.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs de α pour lesquelles l'application linéaire associée à M_α est bijective.

Exercice 19.

1. Dans $\mathbb{R}^2$, considérons les sous-espaces vectoriels $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = x\}$ et $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = 0\}$. Démontrer que $D_1 \oplus D_2 = \mathbb{R}^2$. Considérons s la symétrie par rapport à D_1 parallèlement à D_2 et p la projection sur D_1 parallèlement à D_2. Dessiner les sous-espaces vectoriels D_1, D_2 ainsi que l'image par p et s des vecteurs suivants : $\vec{u} = (1, 0)$, $\vec{v} = (1, 1)$, $\vec{w} = (2, 1)$. Vérifier vos résultats par le calcul.
2. Dans $\mathbb{R}^3$, considérons les sous-espaces vectoriels $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ y = x, z = 0\}$ et $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x = 0\}$. Démontrer que $D \oplus P = \mathbb{R}^3$. Considérons s la symétrie par rapport à P parallèlement à D et p la projection sur P parallèlement à D. Dessiner les sous-espaces vectoriels D, P ainsi que l'image par p et s des vecteurs suivants : $\vec{u} = (1, 0, 0)$,$\vec{v} = (1, 0, 1)$, $\vec{w} = (2, 1, 0)$. Vérifier vos résultats par le calcul.

Exercice 20.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f(x, y, z) = (-3x+2y-4z, 2x+2z, 4x-2y+5z)$. Montrer que f est la projection sur un plan P parallèlement à une droite D. Donner une équation cartésienne du plan P et un vecteur directeur de D.

Exercice 21.

Soit $A \in \mathbb{R}[X]$ non nul, et $\phi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ l'application qui à un polynôme P associe son reste dans la division euclidienne par A. Démontrer que ϕ est un projecteur et préciser ses éléments caractéristiques.

Exercice 22.

Soit E un espace vectoriel et p, q deux projecteurs de E tels que $p \neq 0$, $q \neq 0$ et $p \neq q$. Démontrer que (p, q) est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 23.

Soient $E_1, \ldots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E. On suppose que $E_1 \oplus \cdots \oplus E_n = E$. On note p_i le projecteur sur E_i parallèlement à $\oplus_{j \neq i} E_j$. Montrer que $p_i \circ p_j = 0$ si $i \neq j$ et que $p_1 + \cdots + p_n = Id_E$.

Exercice 24.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par u si $u(x) \in F$ pour tout $x \in F$. Soit p un projecteur de E. Démontrer que u commute avec p si et seulement si $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont stables par u.

Exercice 25.

Pour chacun des sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbb{R}^3$ suivants, déterminer s'ils sont en somme directe.

1. $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\right\}$ et $G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left\{\begin{array}{l} 2x + y + 3z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \end{array}\right.\right\}$;
2. $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 2z = 0\right\}$ et $G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left\{\begin{array}{l} 2x + y + 3z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \end{array}\right.\right\}$.

Exercice 26.

Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces vectoriels $F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \ x + y + z + t = 0\right\}$ et $G = \{(2a, -a, 0, a), \text{ avec } a \in \mathbb{R}\}$.

1. Démontrer que F et G sont en somme directe.
2. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que le vecteur $(x - 2a, y + a, z, t - a) \in F$.
3. En déduire que F et G sont supplémentaires.

Exercice 27.

Soit $E = \mathbb{R}^4$. On considère (u_1, u_2, u_3, u_4) une famille libre de E et on pose

$$F = \mathrm{vect}(u_1 + u_2, u_3), \ G = \mathrm{vect}(u_1 + u_3, u_4), \ H = \mathrm{vect}(u_1 + u_4, u_2).$$

Démontrer que $F \cap G = \{0\}$, que $F \cap H = \{0\}$ et que $G \cap H = \{0\}$. La somme $F + G + H$ est-elle directe ?

Exercice 28.

Soit $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \ f(0) = f(1) = 0\}$ et $G = \{x \mapsto ax + b : \ a, b \in \mathbb{R}\}$.

1. Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Démontrer que F et G sont en somme directe.
3. Soit $h \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = h(x) - (ax + b)$ vérifie $f \in F$.
4. En déduire que F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 29.

On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$u_1 = (0, 1, -2, 1), \quad u_2 = (1, 0, 2, -1), \quad u_3 = (3, 2, 2, -1), \quad u_4 = (0, 0, 1, 0).$$

Dire, en justifiant, si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

1. $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3) = \mathrm{Vect}\big((1, 1, 0, 0), (-1, 1, -4, 2)\big)$;
2. $(1, 1, 0, 0) \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2) \cap \mathrm{Vect}(u_2, u_3, u_4)$;
3. $\mathrm{Vect}(u_1, u_2) + \mathrm{Vect}(u_2, u_3, u_4) = \mathbb{R}^4$.

Exercice 30.

1. Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -Id_E$. Que dire de la dimension de E ?

Exercice 31.

Montrer que $D = \begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} = 1 + a + b + c$ sans le développer.

Exercice 32.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs de α pour lesquelles l'application linéaire associée à M_α est bijective.

Exercice 33.

Calculer en mettant en évidence la factorisation le déterminant suivant :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 1 & \cos b & \cos 2b \\ 1 & \cos c & \cos 2c \end{vmatrix}.$$

Exercice 34.

Soient $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} s_1 & \dots & \dots & s_1 \\ \vdots & s_2 & \dots & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{vmatrix}.$$

Exercice 35.

Soient $a_0, \dots, a_{n-1}$ n nombres complexes et soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Calculer $\det(A - xI_n)$.

Exercice 36.

Soient a, b, c des réels et Δ_n le déterminant de la matrice $n \times n$ suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ c & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \dots & 0 & c & a \end{vmatrix}.$$

1. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $\Delta_{n+2} = a\Delta_{n+1} - bc\Delta_n$.
2. On suppose que $a^2 = 4bc$. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $\Delta_n = \frac{(n+1)a^n}{2^n}$.

2. Exercices d'entraînement

Exercice 37.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer
$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & -x & 0 & \dots & 0 \\ -x & 1+x^2 & -x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -x & 1+x^2 & -x \\ 0 & \dots & 0 & -x & 1+x^2 \end{vmatrix}.$$

Exercice 38.

Soient, dans $\mathbb{R}^3$, P le plan d'équation $z = x - y$ et D la droite d'équation $x = -y = z$. Trouver la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection p de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D.

Exercice 39.

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'application de $M_2(\mathbb{R})$ dans $M_2(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = AM$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer sa matrice dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.

Exercice 40.

Soit U la matrice
$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une relation simple liant I_4, U et U^2.
2. En déduire, pour $k \geq 0$, la valeur de U^k.

Exercice 41.

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose que $\mathrm{tr}(AA^T) = 0$. Que dire de la matrice A ?
2. On suppose que, pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{tr}(AX) = \mathrm{tr}(BX)$. Démontrer que $A = B$.

Exercice 42.

Soient (a_n), (b_n) et (c_n) trois suites réelles telles que $a_0 = 1$, $b_0 = 2$, $c_0 = 7$, et vérifiant les

relations de récurrence :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & 3a_n + \quad b_n \\ b_{n+1} & = & \quad\quad 3b_n + \quad c_n \\ c_{n+1} & = & \quad\quad\quad\quad 3c_n \end{array}\right.$$

On souhaite exprimer a_n, b_n, et c_n uniquement en fonction de n.

1. On considère le vecteur colonne $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Trouver une matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$. En déduire que $X_n = A^n X_0$.
2. Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer N^2, N^3, puis N^p pour $p \geq 3$.
3. Montrer que :
$$A^n = 3^n I + 3^{n-1} nN + 3^{n-2}\frac{n(n-1)}{2}N^2.$$
4. En déduire a_n, b_n et c_n en fonction de n.

Exercice 43.

Prouver qu'une matrice A de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r s'écrit comme somme de r matrices de rang 1.

Exercice 44.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\phi \in \mathcal{L}(E)$. On dit que ϕ est une transvection si

— $\mathrm{Im}(\phi - Id_E) \subset \ker(\phi - Id_E)$;

— $\ker(\phi - Id_E)$ est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$.

Démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de ϕ peut s'écrire

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où α est un réel non nul.

Exercice 45.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soient α, β deux réels distincts.

1. Démontrer que $E = \mathrm{Im}(f - \alpha Id_E) + \mathrm{Im}(f - \beta Id_E)$. On suppose de plus que α et β sont non nuls et que
$$(f - \alpha Id_E) \circ (f - \beta Id_E) = 0.$$

2. Démontrer que f est inversible, et calculer f^{-1}.
3. Démontrer que $E = \ker(f - \alpha Id_E) \oplus \ker(f - \beta Id_E)$.
4. Exprimer en fonction de f le projecteur p sur $\ker(f - \alpha Id_E)$ parallèlement à $\ker(f - \beta Id_E)$.

Exercice 46.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient p et q deux projecteurs de E.

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Montrer que, dans ce cas, on a $\mathrm{Im}(p + q) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$ et $\ker(p + q) = \ker p \cap \ker q$.

Exercice 47.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, F le sous-espace vectoriel des fonctions périodiques de période 1 et G le sous-espace vectoriel des fonctions f telles que $\lim_{+\infty} f = 0$. Démontrer que $F \cap G = \{0\}$. Est-ce que F et G sont supplémentaires ?

Exercice 48.

Soit E l'espace vectoriel des suites réelles,

$$F = \{u \in E;\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = 0\}$$

$$G = \{u \in E;\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = u_{2n+1}\}.$$

Démontrer que F et G sont supplémentaires.

Exercice 49.

Soit $A \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non-nul et $F = \{P \in \mathbb{R}[X];\ A \text{ divise } P\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ et trouver un supplémentaire à F.

Exercice 50.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E tels que $F + G = E$. Soit F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F. Montrer que $F' \oplus G = E$.

Exercice 51.

Soient E un espace vectoriel et F, G, H trois sous-espaces vectoriels de E. Démontrer que F, G et H sont en somme directe si et seulement si ($F \cap G = \{0\}$ et $(F + G) \cap H = \{0\}$).

Exercice 52.

Soient $n \geq 1$, $p \geq 0$. Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n}{p} \\ \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \dots & \binom{n+1}{p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n+p}{0} & \binom{n+p}{1} & \dots & \binom{n+p}{p} \end{vmatrix}.$$

Exercice 53.

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$. Calculer $\det(u)$ dans chacun des cas suivants :

1. $u(P) = P + P'$;
2. $u(P) = P(X+1) - P(X)$;
3. $u(P) = XP' + P(1)$.

Exercice 54.

Soient $a_1, \dots, a_n$ des nombres complexes, $\omega = e^{2i\pi/n}$, et A et M les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & \dots & a_1 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \dots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Calculer $\det(AM)$ et en déduire $\det(A)$.

Exercice 55.

Soit ϕ l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ défini par $\phi(A) = {}^tA$. Calculer le déterminant de ϕ.

Exercice 56.

Soit $n \geq 2$. Déterminer toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que, pour tout $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.

3. Exercices d'approfondissement

Exercice 57.

Soit E un espace vectoriel de dimension n. On souhaite démontrer qu'il existe une base de $\mathcal{L}(E)$ constituée de projecteurs. On fixe une base $\mathcal{B}$ de E. On note $E_{i,j}$ les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. À quelle condition une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-elle la matrice dans la base $\mathcal{B}$ d'un projecteur de E.
2. En déduire que pour tout $i, j \in \{1, \dots n\}$ avec $i \neq j$, les matrices $E_{i,i}$ et $E_{i,i} + E_{i,j}$ sont des matrices de projecteurs.
3. Démontrer la propriété annoncée.

Exercice 58.

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice à diagonale dominante, c'est-à-dire que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$. Montrer que la matrice A est inversible.

Exercice 59.

Déterminer le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $AM = MA$.

Exercice 60.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que si $\mathrm{rg}(M) = 1$, il existe deux vecteurs colonnes $X, Y \in \mathbb{C}^n$ tels que $M = XY^t$.
2. Montrer que si $\mathrm{rg}(M) = 2$, il existe deux couples de vecteurs indépendants (X, Z) et (Y, T) tels que $M = XY^t + ZT^t$.
3. Généraliser aux matrices de rang k.

Exercice 61.

Soit $n \geq 3$. On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *magique* si, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} m_{j,i} = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} m_{i,n+1-i}.$$

On note $MG(n)$ l'ensemble des matrices magiques d'ordre n.

1. Que signifie être une matrice magique ?
2. Montrer que $MG(n)$ est un espace vectoriel.
3. Montrer que l'application $\phi : MG(n) \to \mathcal{M}_{n-2,n-1}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n-2}$, qui envoie la matrice M

qui s'écrit

$$M = \begin{pmatrix} & & & & m_{1,n} \\ & M_1 & & & \vdots \\ & & & & m_{n-2,n} \\ m_{n-1,1} & \dots & \dots & m_{n-1,n-1} & m_{n-1,n} \\ m_{n,1} & \dots & \dots & m_{n,n-1} & m_{n,n} \end{pmatrix}$$

sur $(M_1, m_{1,n}, m_{n-1,1}, m_{n-1,3}, m_{n-1,4}, \dots, m_{n-1,n-2})$ est un isomorphisme d'espace vectoriel.

4. En déduire la dimension de $MG(n)$.

Exercice 62.

Soit $I = [a, b]$ un intervalle, $\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3$ trois fonctions continues sur I, à valeurs réelles, et pour lesquelles on peut trouver des coefficients réels $a_1,\ a_2,\ a_3$ non tous nuls tels que la fonction

$$\theta = a_1\theta_1 + a_2\theta_2 + a_3\theta_3$$

admette au moins trois racines distinctes $x_1,\ x_2,\ x_3$. Prouver qu'il existe des réels $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ non tous nuls tels que :

$$\lambda_1\theta_k(x_1) + \lambda_2\theta_k(x_2) + \lambda_3\theta_k(x_3) = 0,$$

pour $k = 1, 2$ ou 3.

Exercice 63.

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note F le sous-espace vectoriel des fonctions paires (ie $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) et G le sous-espace vectoriel des fonctions impaires (ie $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Montrer que F et G sont supplémentaires.

Exercice 64.

Soit E un espace vectoriel dans lequel tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire. Soit F un sous-espace vectoriel propre de E (c'est-à-dire que $F \neq \{0\}$ et que $F \neq E$). Démontrer que F admet au moins deux supplémentaires distincts.

Exercice 65.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On désigne par F le sous-espace des fonctions constantes et par G_a le sous-espace des fonctions qui s'annulent en a. Montrer que F et G_a sont supplémentaires dans E.
2. Plus généralement, soient $a_0, \dots, a_N$ des éléments distincts de $\mathbb{R}$ et $G = \{f \in E;\ f(a_0) = \dots = f(a_N) = 0\}$. Trouver un supplémentaire à G.